IEC 61710

Edition 2.0 2013-05

INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

colour inside

Power law model – Goodness-of-fit tests and estimation methods

Modèle de loi en puissance – Essais d'adéquation et méthodes d'estimation des paramètres

IEC 61710:2013

IEC Central Office
3, rue de Varembé
CH-1211 Geneva 20
Switzerland

Tel.: +41 22 919 02 11
Fax: +41 22 919 03 00
info@iec.ch
www.iec.ch

About the IEC

The International Electrotechnical Commission (IEC) is the leading global organization that prepares and publishes International Standards for all electrical, electronic and related technologies.

About IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC. Please make sure that you have the latest edition, a corrigenda or an amendment might have been published.

Useful links:

IEC publications search - www.iec.ch/searchpub

The advanced search enables you to find IEC publications by a variety of criteria (reference number, text, technical committee,…).
It also gives information on projects, replaced and withdrawn publications.

IEC Just Published - webstore.iec.ch/justpublished

Stay up to date on all new IEC publications. Just Published details all new publications released. Available on-line and also once a month by email.

Electropedia - www.electropedia.org

The world's leading online dictionary of electronic and electrical terms containing more than 30 000 terms and definitions in English and French, with equivalent terms in additional languages. Also known as the International Electrotechnical Vocabulary (IEV) on-line.

Customer Service Centre - webstore.iec.ch/csc

If you wish to give us your feedback on this publication or need further assistance, please contact the Customer Service Centre: csc@iec.ch.

A propos de la CEI

La Commission Electrotechnique Internationale (CEI) est la première organisation mondiale qui élabore et publie des Normes internationales pour tout ce qui a trait à l'électricité, à l'électronique et aux technologies apparentées.

A propos des publications CEI

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu. Veuillez vous assurer que vous possédez l'édition la plus récente, un corrigendum ou amendement peut avoir été publié.

Liens utiles:

Recherche de publications CEI - www.iec.ch/searchpub

La recherche avancée vous permet de trouver des publications CEI en utilisant différents critères (numéro de référence, texte, comité d'études,…).
Elle donne aussi des informations sur les projets et les publications remplacées ou retirées.

Just Published CEI - webstore.iec.ch/justpublished

Restez informé sur les nouvelles publications de la CEI. Just Published détaille les nouvelles publications parues. Disponible en ligne et aussi une fois par mois par email.

Electropedia - www.electropedia.org

Le premier dictionnaire en ligne au monde de termes électroniques et électriques. Il contient plus de 30 000 termes et définitions en anglais et en français, ainsi que les termes équivalents dans les langues additionnelles. Egalement appelé Vocabulaire Electrotechnique International (VEI) en ligne.

Service Clients - webstore.iec.ch/csc

Si vous désirez nous donner des commentaires sur cette publication ou si vous avez des questions contactez-nous: csc@iec.ch.

IEC 61710

Edition 2.0 2013-05

INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

colour inside

Power law model – Goodness-of-fit tests and estimation methods

Modèle de loi en puissance – Essais d'adéquation et méthodes d'estimation des paramètres

INTERNATIONAL
ELECTROTECHNICAL
COMMISSION

COMMISSION
ELECTROTECHNIQUE
INTERNATIONALE

PRICE CODE
CODE PRIX
XA

ICS 03.120.01; 03.120.30

ISBN 978-2-83220-797-0

Warning! Make sure that you obtained this publication from an authorized distributor.
Attention! Veuillez vous assurer que vous avez obtenu cette publication via un distributeur agréé.

CONTENTS

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

POWER LAW MODEL – GOODNESS-OF-FIT TESTS AND ESTIMATION METHODS

FOREWORD

1) The International Electrotechnical Commission (IEC) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, IEC publishes International Standards, Technical Specifications, Technical Reports, Publicly Available Specifications (PAS) and Guides (hereafter referred to as "IEC Publication(s)"). Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
2) The formal decisions or agreements of IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested IEC National Committees.
3) IEC Publications have the form of recommendations for international use and are accepted by IEC National Committees in that sense. While all reasonable efforts are made to ensure that the technical content of IEC Publications is accurate, IEC cannot be held responsible for the way in which they are used or for any misinterpretation by any end user.
4) In order to promote international uniformity, IEC National Committees undertake to apply IEC Publications transparently to the maximum extent possible in their national and regional publications. Any divergence between any IEC Publication and the corresponding national or regional publication shall be clearly indicated in the latter.
5) IEC itself does not provide any attestation of conformity. Independent certification bodies provide conformity assessment services and, in some areas, access to IEC marks of conformity. IEC is not responsible for any services carried out by independent certification bodies.
6) All users should ensure that they have the latest edition of this publication.
7) No liability shall attach to IEC or its directors, employees, servants or agents including individual experts and members of its technical committees and IEC National Committees for any personal injury, property damage or other damage of any nature whatsoever, whether direct or indirect, or for costs (including legal fees) and expenses arising out of the publication, use of, or reliance upon, this IEC Publication or any other IEC Publications.
8) Attention is drawn to the Normative references cited in this publication. Use of the referenced publications is indispensable for the correct application of this publication.
9) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this IEC Publication may be the subject of patent rights. IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

International Standard IEC 61710 has been prepared by IEC technical committee 56: Dependability.

This second edition cancels and replaces the first edition, published in 2000, and constitutes a technical revision.

The main changes with respect to the previous edition are listed below:

– the inclusion of an additional Annex C on Bayesian estimation for the power law model.

The text of this standard is based on the following documents:

FDIS	Report on voting
56/1500/FDIS	56/1508/RVD

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 2.

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until the stability date indicated on the IEC web site under "http://webstore.iec.ch" in the data related to the specific publication. At this date, the publication will be

- reconfirmed,
- withdrawn,
- replaced by a revised edition, or
- amended.

IMPORTANT – The 'colour inside' logo on the cover page of this publication indicates that it contains colours which are considered to be useful for the correct understanding of its contents. Users should therefore print this document using a colour printer.

INTRODUCTION

This International Standard describes the power law model and gives step-by-step directions for its use. There are various models for describing the reliability of repairable items, the power law model being one of the most widely used. This standard provides procedures to estimate the parameters of the power law model and to test the goodness-of-fit of the power law model to data, to provide confidence intervals for the failure intensity and prediction intervals for the length of time to future failures. An input is required consisting of a data set of times at which relevant failures occurred, or were observed, for a repairable item or a set of copies of the same item, and the time at which observation of the item was terminated, if different from the time of final failure. All output results correspond to the item type under consideration.

Some of the procedures can require computer programs, but these are not unduly complex. This standard presents algorithms from which computer programs should be easy to construct.

POWER LAW MODEL – GOODNESS-OF-FIT TESTS AND ESTIMATION METHODS

1 Scope

This International Standard specifies procedures to estimate the parameters of the power law model, to provide confidence intervals for the failure intensity, to provide prediction intervals for the times to future failures, and to test the goodness-of-fit of the power law model to data from repairable items. It is assumed that the time to failure data have been collected from an item, or some identical items operating under the same conditions (e.g. environment and load).

2 Normative references

The following documents, in whole or in part, are normatively referenced in this document and are indispensable for its application. For dated references, only the edition cited applies. For undated references, the latest edition of the referenced document (including any amendments) applies.

IEC 60050-191:1990, *International Electrotechnical Vocabulary (IEV) – Chapter 191: Dependability and quality of service*

3 Terms and definitions

For the purposes of this document, the terms and definitions of IEC 60050-191 apply.

4 Symbols and abbreviations

The following symbols and abbreviations apply:

β	shape parameter of the power law model
$\hat{\beta}$	estimated shape parameter of the power law model
β_{LB}, β_{UB}	lower, upper confidence limits for β
C^2	Cramer-von-Mises goodness-of-fit test statistic
$C^2_{1-\gamma}(M)$	critical value for the Cramer-von-Mises goodness-of-fit test statistic at γ level of significance
χ^2	Chi-square goodness-of-fit test statistic
$\chi^2_{\gamma}(\upsilon)$	γth fractile of the χ^2 distribution with υ degrees of freedom
d	number of intervals for groups of failures
$E[N(t)]$	expected accumulated number of failures up to time t
$E[t_j]$	expected accumulated time to jth failure

$\hat{E}[N[t(i)]]$	estimated expected accumulated number of failures up to $t(i)$
$\hat{E}[t_j]$	estimated expected accumulated time to jth failure
$F_\gamma(\nu_1,\nu_2)$	γ th fractile for the F distribution with (ν_1,ν_2) degrees of freedom
i	general purpose indicator
j	general purpose indicator
k	number of items
L, U	multipliers used in calculation of confidence intervals for failure intensity
λ	scale parameter of the power law model
$\hat{\lambda}$	estimated scale parameter of the power law model
M	parameter for Cramer-von-Mises statistical test
N	number of relevant failures
N_j	number of failures for jth item
$N(t)$	accumulated number of failures up to time t
$N[t(i)]$	accumulated number of failures up to time $t(i)$
R	difference between the order number of future (predicted) failure and order number of last (observed) failure
T	accumulated relevant time
T^*	total accumulated relevant time for time terminated test
T_j	total accumulated relevant time for jth item
T_{RL}, T_{RU}	lower, upper prediction limits for the length of time to the Rth future failure
$\hat{T}_{N+1}$	estimated median time to $(N+1)$th failure
t_i	accumulated relevant time to the ith failure
t_{ij}	ith failure time for jth item
t_N	total accumulated relevant time for failure terminated test
t_{Nj}	total accumulated relevant time to Nth failure of jth item
$t(i-1), t(i)$	endpoints of ith interval of time for grouped failures
$z(t)$	failure intensity at time t
$\hat{z}(t)$	estimated failure intensity at time t
z_{LB}, z_{UB}	lower, upper confidence limits for failure intensity

5 Power law model

The statistical procedures for the power law model use the relevant failure and time data from the test or field studies. The basic equations for the power law model are given in this clause. Background information on the model is given in Annex A and examples of its application are given in Annex B.

The expected accumulated number of failures up to test time t is given by:

$$E[N(t)] = \lambda t^{\beta} \text{ with } \lambda > 0, \beta > 0, t > 0$$

where

λ is the scale parameter;

β is the shape parameter ($0 < \beta < 1$ corresponds to a decreasing failure intensity; $\beta = 1$ corresponds to a constant failure intensity; $\beta > 1$ corresponds to an increasing failure intensity).

The failure intensity at time t is given by:

$$z(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda \beta t^{\beta - 1} \text{ with } t > 0$$

Thus the parameters λ and β both affect the failure intensity in a given time.

Methods are given in 7.2 for maximum likelihood estimation of the parameters of λ and β. Subclause 7.3 gives goodness-of-fit tests for the model and 7.4 and 7.5 give confidence interval procedures. Subclause 7.6 gives prediction interval procedures and 7.7 gives tests for the equality of the shape parameters. The model is simple to evaluate. However when $\beta < 1$, theoretically $z(0) = \infty$ (i.e. $z(t)$ tends to infinity as t tends to zero) and $z(\infty) = 0$ (i.e. $z(t)$ tends to zero as t tends to infinity); but this theoretical limitation does not generally affect its practical use.

6 Data requirements

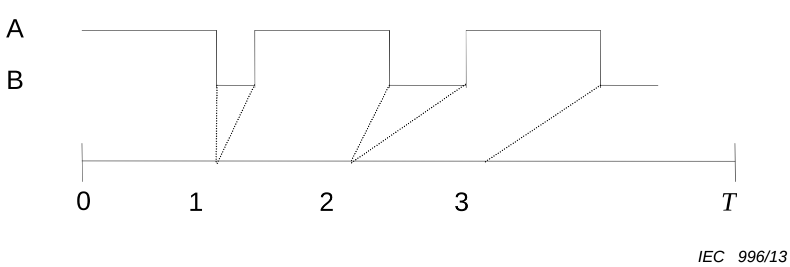
6.1 General

6.1.1 Case 1 – Time data for every relevant failure for one or more copies from the same population

The normal evaluation methods assume the observed times to be exact times of failure of a single repairable item or a set of copies of the same repairable item. The figures below illustrate how the failure times are calculated for three general cases.

6.1.2 Case 1a) – One repairable item

For one repairable item observed from time 0 to time T, the relevant failure time, t_i, is the elapsed operating time (that is, excluding repair and other down times) until the occurrence of the i-th failure as shown in Figure 1.



Key

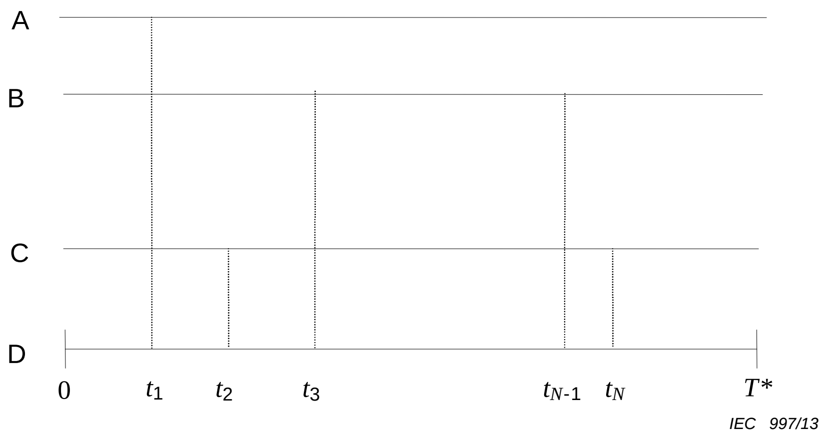
A operating time, B down time

Figure 1 – One repairable item

Time terminated data are observed to T^*, which is not a failure time, and failure terminated data are observed to t_N, which is the time of the Nth failure. Time terminated and failure terminated data use slightly different formulae.

6.1.3 Case 1b) – Multiple items of the same kind of repairable item observed for the same length of time

It is assumed there are k items, which all represent the same population. That is, they are nominally identical items operating under the same conditions (e.g. environment and load). When all items are observed to time T^*, which is not a failure time (i.e. time terminated data), then the failure time data are combined by superimposing failure times $(t_i, i = 1, 2 ..., N)$ for all k items on the same time line as shown in Figure 2.



Key

A item 1

B item 2

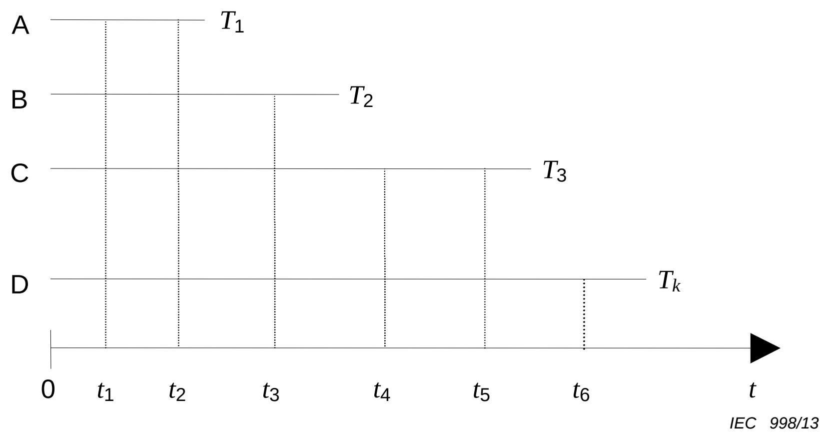
C item k

D superimposed process

Figure 2 – Multiple items of the same kind of repairable item observed for same length of time

6.1.4 Case 1c) – Multiple repairable items of the same kind observed for different lengths of time

When all items do not operate for the same period of time, then the time at which observation of the jth item is terminated $T_j\left(j = 1, 2, ..., k\right)$, where $T_1 < T_2 < ... < T_k$, is noted. The failure data are combined by superimposing all the failure times for all k items on the same time line as shown in Figure 3. The times to failure are $t_i, i = 1, 2, ..., N$, where N = the total number of failures observed accumulated over the k items.



Key

A item 1

B item 2

C item 3

D item *k*

t time

Figure 3 – Multiple repairable items of the same kind observed for different lengths of time

If each item is a software system then the repair action should be done to the other systems which did not fail at that time.

6.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures for one or more repairable items from the same population

This alternative method is used when there is at least one copy of an item and the data consist of known time intervals, each containing a known number of failures.

The observation period is over the interval $(0, T)$ and is partitioned into d intervals at times $0 < t(1) < t(2) < ... < t(d)$. The ith interval is the time period between $t(i-1)$ and $t(i)$, where $i = 1, 2, ..., d,\ t(0) = 0$ and $t(d) = T$. It is important to note that the interval lengths and the number of failures per interval need not be the same.

6.3 Case 3 – Time data for every relevant failure for more than one repairable item from different populations

It is assumed there are k items which do not represent the same population and are to be compared. It should be noted that if each item is to be considered individually then it is appropriate to use case 1a) in 6.1.2.

If direct comparisons of the items are to be made then as an extension of 6.1 the following notation is used:

t_{ij} denotes the ith failure time for the process corresponding to the jth item;

N_j denotes the number of failures observed for the jth item;

t_{N_j} is the time of the Nth failure for the jth item;

where i = 0, 1, 2, … N_j and j = 1, 2, …k.

7 Statistical estimation and test procedures

7.1 Overview

In case 1 – time data for every relevant failure – the formulae given for failure terminated data assume one repairable item, that is $k=1$. All output results correspond to that item. The formulae given for time terminated data assume k copies of the item observed for the same length of time. If there is only one repairable item then $k=1$. The point estimation procedures for all the aforementioned cases are given in 7.2.1. The appropriate procedures for the case when all copies are observed for different lengths of time are given in 7.2.2. Procedures for the case of time data for groups of relevant failures are given in 7.2.3.

An appropriate goodness-of-fit test, as described in 7.3 shall be performed after the parameter estimation procedures of 7.2. Note that these tests, and the procedures given in 7.4 to 7.7 for constructing interval estimates and carrying out statistical tests, distinguish only between the cases of time data for every relevant failure (i.e. all instances of case 1 data – 1a), 1b) and 1c)) and time data for groups of relevant failures (i.e. case 2)).

The inference procedures that follow provide approximate estimates in some circumstances and so caution is required if they are to be applied if the number of observed failures is less than 10.

7.2 Point estimation

7.2.1 Case 1a) and 1b) – Time data for every relevant failure

This method applies only when the time of failure has been logged for every failure as described in 6.1.2 and 6.1.3.

Step 1: Calculate the summation:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{T^*}{t_j}\right) \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{t_N}{t_j}\right) \qquad \textit{(failure terminated)}$$

Step 2: Calculate the (unbiased) estimate of the shape parameter β from the formula:

$$\hat{\beta} = \frac{N-1}{S_1} \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$\hat{\beta} = \frac{N-2}{S_2} \qquad \textit{(failure terminated)}$$

Step 3: Calculate the estimate of the scale parameter λ from the formula:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k\left(T^*\right)^{\hat{\beta}}} \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k\left(t_N\right)^{\hat{\beta}}} \qquad \textit{(failure terminated)}$$

Step 4: Calculate the estimate of the failure intensity $z(t)$, for any time $t > 0$, from the formula:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}$$

$\hat{z}(t)$ estimates the current failure intensity for t over the range represented by the data. "Extrapolated" estimates for a future t may be obtained similarly, but should be used with the usual caution associated with extrapolation.

Step 5: Given N observed failures the last of which occurred at t_N, the median time to the $(N+1)$th failure can be estimated from the formula:

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp\left[\frac{0{,}5^{\frac{-1}{N+1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-1)}\right] \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp\left[\frac{0{,}5^{\frac{-1}{N+1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-2)}\right] \qquad \textit{(failure terminated)}$$

7.2.2 Case 1c) – Time data for every relevant failure

This method applies only when the time of failure has been logged for every failure as described in 6.1.4.

Step 1: Assemble the data into the times to failure, t_i, $i=1,2,..,N$, where N is the total number of failures over the k copies and T_j, $j=1,2,...,k$, is the end of the observation period for the jth copy.

Step 2: The maximum likelihood estimate of the shape parameter β is the value of $\hat{\beta}$ which satisfies the formula:

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{N} \ln t_i - \frac{N\sum_{j=1}^{k} T_j^{\hat{\beta}} \ln T_j}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\hat{\beta}}} = 0$$

An iterative method shall be used to solve the formula for $\hat{\beta}$.

Step 3: Calculate the estimate of the scale parameter λ from the formula:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\hat{\beta}}}$$

Step 4: Calculate the estimate of the failure intensity $z(t)$, for any time $t > 0$, from the formula:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}$$

$\hat{z}(t)$ estimates the current failure intensity for t over the range represented by the data. "Extrapolated" estimates for a future t may be obtained similarly, but should be used with the usual caution associated with extrapolation.

7.2.3 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

This method applies when the data set consists of known time intervals, each containing a known number of failures as described in 6.2.

Step 1: Assemble into a data set the number of relevant failures N_i recorded in the ith interval $[t(i-1), t(i)], i = 1, 2, ..., d$. The total number of relevant failures is

$$N = \sum_{i=1}^{d} N_i$$

Step 2: The maximum likelihood estimate of the shape parameter β is the value of $\hat{\beta}$ which satisfies the formula:

$$\sum_{i=1}^{d} N_i \left[\frac{[t(i)]^{\hat{\beta}} \ln t(i) - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln t(i-1)}{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}} - \ln t(d) \right] = 0$$

Note that $[t(0)]^{\hat{\beta}} = 0$ and $[t(0)]^{\hat{\beta}} \ln t(0) = 0$. All $t(.)$ terms may be normalized with respect to $t(d)$ and then the final term $\ln\left[t(d)\right]$ disappears. An iterative method shall be used to solve the formula for $\hat{\beta}$.

Step 3: Calculate the estimate of the scale parameter λ from the formula:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{t(d)^{\hat{\beta}}}$$

Step 4: Calculate the estimate of the failure intensity $z(t)$, for any test time $t > 0$, from the formula:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}$$

$\hat{z}(t)$ estimates the current failure intensity for t over the range represented by the data. "Extrapolated" estimates for a future t may be obtained similarly, but should be used with the usual caution associated with extrapolation.

7.3 Goodness-of-fit tests

7.3.1 Case 1 – Time data for every relevant failure

7.3.1.1 Cramer-von-Mises test

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate the Cramer-von-Mises goodness-of-fit test statistic given by the formula:

$$C^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{j=1}^{M}\left[\left(\frac{t_j}{T}\right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{2j-1}{2M}\right)\right]^2$$

where

$M = N$ and $T = T^*$ (*time terminated*)

$M = N - 1$ and $T = t_N$ (*failure terminated*)

Step 3: Select the critical value $C^2_{0,90}(M)$ for the Cramer-von-Mises test corresponding to M from Table 1, which gives critical values at a 10 % significance level.

Step 4: If:

$$C^2 > C^2_{0,90}(M)$$

then the hypothesis that the power law model fits the data cannot be accepted. Otherwise, on the basis of the data analysed, the power law model can be used as a working hypothesis.

7.3.1.2 Graphical procedure

When the failure times are known, the graphical procedure described below may be used to obtain additional information about the correspondence between the model and the data. This involves plotting the expected time to the jth failure, $E(t_j)$, against the observed time to the jth failure. Further details about the approach are given in Annexes A and B.

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 and $\hat{\lambda}$ from step 3 in 7.2.1.

Step 2: Calculate the estimate of the expected time to the jth failure, $j=1,2,..,N$, from the formula:

$$\hat{E}(t_j) = \left(\frac{j}{\hat{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

Step 3: Plot $\hat{E}(t_j)$ against t_j on identical linear scales. The visual agreement of these points with a line of 45 ° through the origin is a subjective measure of the applicability of the model.

7.3.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

7.3.2.1 Chi-square test

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.3 and $\hat{\lambda}$ from step 3 in 7.2.3.

Step 2: Calculate the expected number of failures in the time interval $[t(i-1), t(i)]$ which is approximated by:

$$e_i = \hat{\lambda}\left\{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}\right\}$$

Step 3: For each interval, e_i shall not be less than 5, and if necessary, adjacent intervals should be combined before the test. For d intervals (after combination if necessary) and with N_i the same as in 7.2.3, calculate the statistic:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{d} \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i}$$

Step 4: Select the critical value from a χ^2 distribution with $(d-2)$ degrees of freedom and a 10 % significance level from Table 2, i.e. $\chi^2_{0,90}(d-2)$.

Step 5: If the test statistic χ^2 exceeds the critical value $\chi^2_{0,90}(d-2)$ then the hypothesis that the power law model fits the data cannot be accepted. Otherwise, on the basis of the data analysed, the power law model can be used as a working hypothesis.

The Chi-square test is a large sample test and so will need large data sets to detect deviations from the power law model that are practically important.

7.3.2.2 Graphical procedure

When the data set consists of known time intervals, each containing a known number of failures, the graphical procedure described below may be used to obtain additional information about the correspondence between the model and the data. This involves plotting the expected number of failures against those observed at each endpoint. Further details of the approach are given in B.5.

Step 1: For each endpoint $t(i)$, calculate the observed number of failures from 0 to $t(i)$ from the formula:

$$N[t(i)] = \sum_{j=1}^{i} N_j$$

Step 2: Calculate the estimate of the corresponding expected number of failures $E[N[t(i)]]$ from the formula:

$$\hat{E}[N[t(i)]] = \hat{\lambda} t(i)^{\hat{\beta}}$$

Step 3: Plot $\hat{E}[N[t(i)]]$ against $N[t(i)]$ on identical linear scales. The visual agreement of these points with a line of 45 ° through the origin is a subjective measure of the applicability of the model.

7.4 Confidence intervals for the shape parameter

7.4.1 Case 1 – Time data for every relevant failure

The shape parameter β in the power law model determines if the failure intensity changes with time. If $0 < \beta < 1$, there is decreasing failure intensity; if $\beta = 1$, there is a constant failure intensity; if $\beta > 1$, there is an increasing failure intensity.

For a two-sided confidence interval for β when individual failure times are available, follow the steps below as appropriate for time and failure terminated data.

Two-sided 90 % confidence interval for β – Time terminated data

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or from step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate:

$$D_L = \frac{\chi^2_{0,05}(2N)}{2(N-1)}$$

$$D_U = \frac{\chi^2_{0,95}(2N)}{2(N-1)}$$

where the fractiles of the χ^2 distribution are given in Table 2.

Step 3: Calculate the lower confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

and the upper confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Step 4: The two-sided 90 % confidence interval for β is given by (β_{LB}, β_{UB}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for β are β_{LB} and β_{UB}, respectively.

Two-sided 90 % confidence interval for β – Failure terminated data

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1.

Step 2: Calculate:

$$D_L = \frac{\chi^2_{0,05}(2(N-1))}{2(N-2)}$$

$$D_U = \frac{\chi^2_{0,95}(2(N-1))}{2(N-2)}$$

where the fractiles of the χ^2 distribution are given in Table 2.

Step 3: Calculate the lower confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

and the upper confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Step 4: The two-sided 90 % confidence interval for β is given by (β_{LB}, β_{UB}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for β are β_{LB} and β_{UB}, respectively.

7.4.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.3.

Step 2: Calculate:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \qquad \text{with} \qquad i = 1, 2, \ldots, d$$

Step 3: Calculate the expression:

$$A = \sum_{i=1}^{d} \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]}$$

Step 4: Calculate:

$$C = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Step 5: For an approximate two-sided 90 % confidence interval for β, calculate:

$$S = \frac{1{,}64C}{\sqrt{N}}$$

where N is the total number of failures.

Step 6: Calculate the lower confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{LB} = \hat{\beta}(1 - S)$$

and the upper confidence limit for β from the formula:

$$\beta_{UB} = \hat{\beta}(1 + S)$$

Step 7: The two-sided 90 % confidence interval for β is given by (β_{LB}, β_{UB}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for β are β_{LB} and β_{UB}, respectively.

7.5 Confidence intervals for the failure intensity

7.5.1 Case 1 – Time data for every relevant failure

Step 1: Calculate $\hat{z}(t)$ from step 4 in 7.2.1 or step 4 in 7.2.2.

Step 2: For a two-sided 90 % confidence interval refer to Table 3 (*time terminated*) and Table 4 (*failure terminated*) and locate values of L and U for the appropriate sample size N.

Step 3: Calculate the lower confidence limit for $z(t)$ from the formula:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{U}$$

and the upper confidence limit for $z(t)$ from the formula:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{L}$$

Step 4: The two-sided 90 % confidence interval for $z(t)$ is given by (z_{LB}, z_{UB}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for $z(t)$ are z_{LB} and z_{UB}, respectively.

7.5.2 Case 2 – Time data for groups of relevant failures

Step 1: Calculate $\hat{z}(t)$ from step 4 in 7.2.3.

Step 2: Calculate:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \qquad \text{with} \qquad i = 1, 2, ..., d$$

Step 3: Calculate:

$$A=\sum_{i=1}^{d}\frac{\left[\left[P(i)\right]^{\hat{\beta}}\ln\left[P(i)\right]^{\hat{\beta}}-\left[P(i-1)\right]^{\hat{\beta}}\ln\left[P(i-1)\right]^{\hat{\beta}}\right]^{2}}{\left[\left[P(i)\right]^{\hat{\beta}}-\left[P(i-1)\right]^{\hat{\beta}}\right]}$$

Step 4: Calculate:

$$D=\sqrt{\frac{1}{A}+1}$$

Step 5: For an approximate two-sided 90 % confidence interval for $z(t)$ calculate:

$$S=\frac{1{,}64D}{\sqrt{N}}$$

where N is the cumulative number of relevant failures.

Step 6: The lower confidence limit on $z(t)$ is given by:

$$z_{LB}=\frac{\hat{z}(t)}{1+S}$$

and the upper confidence limit on $z(t)$ is given by:

$$z_{UB}=\frac{\hat{z}(t)}{1-S}$$

Step 7: The two-sided 90 % confidence interval for $z(t)$ is given by (z_{LB}, z_{UB}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for $z(t)$ are z_{LB} and z_{UB}, respectively.

7.6 Prediction intervals for the length of time to future failures of a single item

7.6.1 Prediction interval for length of time to next failure for case 1 – Time data for every relevant failure

For a two-sided 90 % prediction interval for the time to the $(N+1)$th failure T_{N+1}, that is, the next future failure given that N failures have occurred at times $t_1, t_2, ..., t_N$, follow the steps below as appropriate for time and failure terminated data.

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or from step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate the lower prediction limit for T_{N+1} from the formula:

$$T_{1L} = t_N \exp\left[\frac{0{,}95^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-1)}\right] \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$T_{1L} = t_N \exp\left[\frac{0{,}95^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-2)}\right] \qquad \textit{(failure terminated)}$$

and the upper prediction limit for T_{N+1} from the formula:

$$T_{1U} = t_N \exp\left[\frac{0{,}05^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-1)}\right] \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$T_{1U} = t_N \exp\left[\frac{0{,}05^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-2)}\right] \qquad \textit{(failure terminated)}$$

Step 3: The two-sided 90 % prediction interval for T_{N+1} is given by (T_{1L}, T_{1U}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for T_{N+1} are T_{1L} and T_{1U}, respectively.

7.6.2 Prediction interval for length of time to *R*th future failure for case 1 – Time data for every relevant failure

For an approximate two-sided 90 % prediction interval for the time to the $(N+R)$th failure T_{N+R}, that is, the Rth future failure given that N failures have occurred at times $t_1, t_2, \ldots, t_N$, follow the steps below as appropriate for failure and time terminated data.

Step 1: Calculate $\hat{\beta}$ from step 2 in 7.2.1 or from step 2 in 7.2.2.

Step 2: Calculate:

$$G = \left[\frac{(N-0{,}5)(N+R-0{,}5)}{NR}\right] \ln\left[\frac{N+R-0{,}5}{N-0{,}5}\right]$$

Step 3: Calculate:

$$V = 2NG \ln\left[\frac{N+R-0{,}5}{N-0{,}5}\right]$$

Step 4: Calculate the lower prediction limit for T_{N+R} from the formula:

$$T_{RL} = t_N \exp\left[\frac{V}{2NG\hat{\beta}F_{0,95}(2(N-1),V')}\right] \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$T_{RL} = t_N \exp\left[\frac{V(N-2)}{2N(N-1)G\hat{\beta}F_{0,95}(2(N-1),V')}\right] \qquad \textit{(failure terminated)}$$

and the upper prediction limit for T_{N+R} from the formula:

$$T_{RU} = t_N \exp\left[\frac{VF_{0,95}(V',2(N-1))}{2NG\hat{\beta}}\right] \qquad \textit{(time terminated)}$$

$$T_{RU} = t_N \exp\left[\frac{V(N-2)F_{0,95}(V',2(N-1))}{2N(N-1)G\hat{\beta}}\right] \qquad \textit{(failure terminated)}$$

where the fractiles of the F distribution are given in Table 5 and V' is the rounded integer value of V.

Step 5: The two-sided 90 % prediction interval for T_{N+R} is given by (T_{RL}, T_{RU}).

NOTE One-sided 95 % lower and upper limits for T_{N+R} are T_{RL} and T_{RU}, respectively.

7.7 Test for the equality of the shape parameters $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$

7.7.1 Case 3 – Time data for every relevant failure for two items from different populations

Step 1: Calculate $\hat{\beta}_1$ for item 1 and $\hat{\beta}_2$ for item 2 from step 2 in 7.2.1.

Step 2: Calculate:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \ln\left[\frac{t_{N_1}}{t_{i1}}\right]$$

and

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N_2-1} \ln\left[\frac{t_{N_2}}{t_{i2}}\right]$$

Step 3: Calculate:

$$F = \frac{S_1(N_2-1)}{S_2(N_1-1)}$$

Step 4: If

$$\frac{1}{F_{0,95}\left(2\left(N_2-1\right),2\left(N_1-1\right)\right)} < F < F_{0,95}\left(2\left(N_1-1\right),2\left(N_2-1\right)\right)$$

where the fractiles of the F distribution are given in Table 5, then the null hypothesis that the β values are the same cannot be rejected at the 10 % significance level. Otherwise, conclude that the shape parameters of the models fitted to the data for the two items are statistically different.

7.7.2 Case 3 – Time data for every relevant failure for three or more items from different populations

Step 1: Calculate $\hat{\beta}_j$ for item j, $j = 1,2,...,k$ from step 2 in 7.2.1.

Step 2: Calculate:

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_j-1} \ln\left[\frac{t_{N_j}}{t_{ij}}\right]$$

Step 3: Calculate:

$N = \sum_{j=1}^{k} N_j$ where k denotes the number of items of the same type

Step 4: Calculate:

$$W = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2\left(N_j-1\right)} - \frac{1}{2(N-k)}\right]$$

Step 5: Calculate:

$$Y = 2(N-k)\ln\left[\left(\frac{1}{N-k}\right)\sum_{j=1}^{k} S_j\right] - \sum_{j=1}^{k} 2\left(N_j-1\right)\ln\left[\frac{S_j}{N_j-1}\right]$$

Step 6: If

$$\frac{Y}{W} < \chi^2_{0,90}(k-1)$$

where the fractiles of the χ^2 distribution are given in Table 2, then the null hypothesis that the β values are the same cannot be rejected at a 10 % significance level. Otherwise, conclude that the shape parameter of the models fitted to the different items is statistically different.

Table 1 – Critical values for Cramer-von-Mises goodness-of-fit test at 10 % level of significance

M	Critical value of statistic $C^2_{0,90}(M)$
3	0,154
4	0,155
5	0,160
6	0,162
7	0,165
8	0,165
9	0,167
10	0,167
11	0,169
12	0,169
13	0,169
14	0,169
15	0,169
16	0,171
17	0,171
18	0,171
19	0,171
20	0,172
30	0,172
≥60	0,173

NOTE 1 For time terminated tests, $M = N$.

NOTE 2 For failure terminated tests, $M = N–1$.

Table 2 – Fractiles of the Chi-square distribution

Degrees of freedom υ	$\chi^2_{0,05}(\upsilon)$	$\chi^2_{0,90}(\upsilon)$	$\chi^2_{0,95}(\upsilon)$
2	0,10	4,61	5,99
4	0,71	7,78	9,49
6	1,64	10,65	12,59
8	2,73	13,36	15,51
10	3,94	15,98	18,31
12	5,23	18,55	21,03
14	6,57	21,06	23,69
16	7,96	23,54	26,30
18	9,39	25,99	28,87
20	10,85	28,41	31,41
22	12,34	30,81	33,92
24	13,85	33,20	36,42
26	15,38	35,56	38,89
28	16,92	37,92	41,34
30	18,49	40,26	43,77
32	20,09	42,57	46,17
34	21,70	44,88	48,57
36	23,30	47,19	50,96
38	24,91	49,50	53,36
40	26,51	51,81	55,76
42	28,16	54,08	58,11
50	34,76	63,17	67,51
52	36,45	65,42	69,82
60	43,19	74,40	79,08
62	44,90	76,63	81,37
70	51,74	85,53	90,53
72	53,47	87,74	92,80
80	60,39	96,58	101,88
82	62,14	98,78	104,13
90	69,13	107,57	113,15
92	70,89	109,76	115,39
100	77,93	118,50	124,34
102	79,70	120,68	126,57
110	86,79	129,38	135,48
112	88,57	131,56	137,70
120	95,71	140,23	146,57
122	97,49	142,40	148,78
200	168,28	226,02	233,99
z_p	–1,64	+1,28	+1,64

NOTE 1 Linear interpolation of intermediate values is sufficiently accurate.

NOTE 2 For higher values of υ use $\chi^2_p = \left[\left(z_p + \sqrt{2\upsilon - 1}\right)^2\right]/2$ where z_p is the corresponding fractile of the standard normal distribution.

Table 3 – Multipliers for two-sided 90 % confidence intervals for intensity function for time terminated data

N	*L*	*U*		*N*	*L*	*U*
3	0,175	6,490		21	0,570	1,738
4	0,234	4,460		22	0,578	1,714
5	0,281	3,613		23	0,586	1,692
6	0,320	3,136		24	0,593	1,672
7	0,353	2,826		25	0,600	1,653
8	0,381	2,608		26	0,606	1,635
9	0,406	2,444		27	0,612	1,619
10	0,428	2,317		28	0,618	1,604
11	0,447	2,214		29	0,623	1,590
12	0,464	2,130		30	0,629	1,576
13	0,480	2,060		35	0,652	1,520
14	0,494	1,999		40	0,672	1,477
15	0,508	1,947		45	0,689	1,443
16	0,521	1,902		50	0,703	1,414
17	0,531	1,861		60	0,726	1,369
18	0,543	1,825		70	0,745	1,336
19	0,552	1,793		80	0,759	1,311
20	0,561	1,765		100	0,783	1,273

NOTE 1 For $N > 100$

$$L \cong \frac{N-1}{N}\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)^{-2}$$

$$U \cong \frac{N-1}{N}\left(1-1{,}64\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)^{-2}$$

NOTE 2 Linear interpolation of intermediate values is sufficiently accurate.

Table 4 – Multipliers for two-sided 90 % confidence intervals for intensity function for failure terminated data

N	*L*	*U*		*N*	*L*	*U*
3	0,1712	4,746		21	0,6018	1,701
4	0,2587	3,825		22	0,6091	1,680
5	0,3174	3,254		23	0,6160	1,659
6	0,3614	2,892		24	0,6225	1,641
7	0,3962	2,644		25	0,6286	1,623
8	0,4251	2,463		26	0,6344	1,608
9	0,4495	2,324		27	0,6400	1,592
10	0,4706	2,216		28	0,6452	1,578
11	0,4891	2,127		29	0,6503	1,566
12	0,5055	2,053		30	0,6551	1,553
13	0,5203	1,991		35	0,6763	1,501
14	0,5337	1,937		40	0,6937	1,461
15	0,5459	1,891		45	0,7085	1,428
16	0,5571	1,876		50	0,7212	1,401
17	0,5674	1,814		60	0,7422	1,360
18	0,5769	1,781		70	0,7587	1,327
19	0,5857	1,752		80	0,7723	1,303
20	0,5940	1,726		100	0,7938	1,267

NOTE 1 For $N > 100$

$$L \cong \frac{N-2}{N}\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^{-1}$$

$$U \cong \frac{N-2}{N}\left(1-1{,}64\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^{-1}$$

NOTE 2 Linear interpolation of intermediate values is sufficiently accurate.

Table 5 – 0,95 fractiles of the *F* distribution

$F_{0,95}(\nu_1\ \nu_2)$	ν_1										
ν_2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
2	19,00	19,20	19,30	19,40	19,40	19,40	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
4	6,94	6,39	6,16	6,04	5,96	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
6	5,14	4,53	4,28	4,15	4,06	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
8	4,46	3,84	3,58	3,44	3,35	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
10	4,10	3,48	3,22	3,07	2,98	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
12	3,89	3,26	3,00	2,85	2,75	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
14	3,74	3,11	2,85	2,70	2,60	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
16	3,63	3,01	2,74	2,59	2,49	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
18	3,55	2,93	2,66	2,51	2,41	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
20	3,49	2,87	2,60	2,45	2,35	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
30	3,32	2,69	2,42	2,27	2,16	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	3,23	2,61	2,34	2,18	2,08	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	3,15	2,53	2,25	2,10	1,99	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,07	2,45	2,18	2,02	1,91	1,66	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25
∞	3,00	2,37	2,10	1,94	1,83	1,57	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00
NOTE Linear interpolation for intermediate values is sufficiently accurate.											

Annex A
(informative)

The power law model – Background information

The power law model is widely used to analyse the reliability of repairable items. It is particularly useful for those items classified as 'bad-as-old' when repair is minimal and so reliability of the item remains essentially unchanged after failure and repair. It is also appropriate for those items whose reliability is likely to improve. Indeed the power law model was first considered by L.H. Crow [2][1] in 1974 to describe the power law growth pattern first reported by J.T. Duane in 1964 [5]. Methods for reliability growth analysis based on the power law model are given in IEC 61164 [6].

Crow [2] formulated the underlying probabilistic model for failures as a non-homogeneous Poisson process (NHPP), $\{N(t), t > 0\}$, with an expected value of:

$$E[N(t)] = \lambda t^{\beta}$$

and the failure intensity is given by

$$z(t) = \lambda \beta t^{\beta - 1}$$

The NHPP model gives the Poisson probability that $N(t)$ will assume a particular value, that is:

$$\Pr[N(t) = n] = \frac{\left(\lambda t^{\beta}\right)^{n} e^{-\lambda t^{\beta}}}{n!} \qquad \text{with } n = 0,1,2,...$$

Also, under this model

$$E\left[\lambda t_j^{\beta}\right] = j \qquad \text{with } j = 1,2,...$$

where t_j is the accumulated time to the jth failure. This gives the useful first-order approximation

$$E\left[t_j\right] = \left(\frac{j}{\lambda}\right)^{1/\beta} \quad \text{with } j = 1,2,...$$

for the expected time to the jth failure.

When $\beta = 1$, then $z(t) = \lambda$ and the times between successive failures follow an exponential distribution with mean $1/\lambda$ (homogeneous Poisson process), indicating a constant failure intensity. The intensity function $z(t)$ is decreasing for $\beta < 1$ (reliability growth), and increasing for $\beta > 1$ (reliability deterioration).

1 Figures in square brackets refer to the bibliography.

Annex B
(informative)

Numerical examples

B.1 Background information

The following numerical examples show the use of the procedures discussed in Clause 7. Example 1 considers time data for every relevant failure for a single repairable item when observation is failure terminated. Example 2 considers time data for every relevant failure for multiple repairable items of the same kind when observation is time terminated. Example 3 considers time data for every relevant failure of two repairable items from different populations. Example 4 considers groups of relevant failures for a single repairable item. All examples illustrate the use of appropriate estimation methods. Goodness-of-fit tests are applied when appropriate. These examples may be used to validate computer programs designed to implement the methods given in Clause 7.

Note that all the calculations in the examples were carried out using a spreadsheet software package. Although the final figures are presented to two or three decimal places, the intermediate calculations were carried out in double precision. If intermediate calculations are computed with less precision, then the final figures might differ slightly from those presented due to rounding errors.

It should also be pointed out that all the confidence intervals presented are at a 90 % confidence level and similarly all the statistical tests are conducted at a 10 % significance level. These correspond to the values given in Tables 1 to 5. However, if the appropriate values are taken from corresponding tables reported elsewhere or are generated from software, then alternative values for the confidence and significance levels can be chosen according to users' requirements.

B.2 Example 1

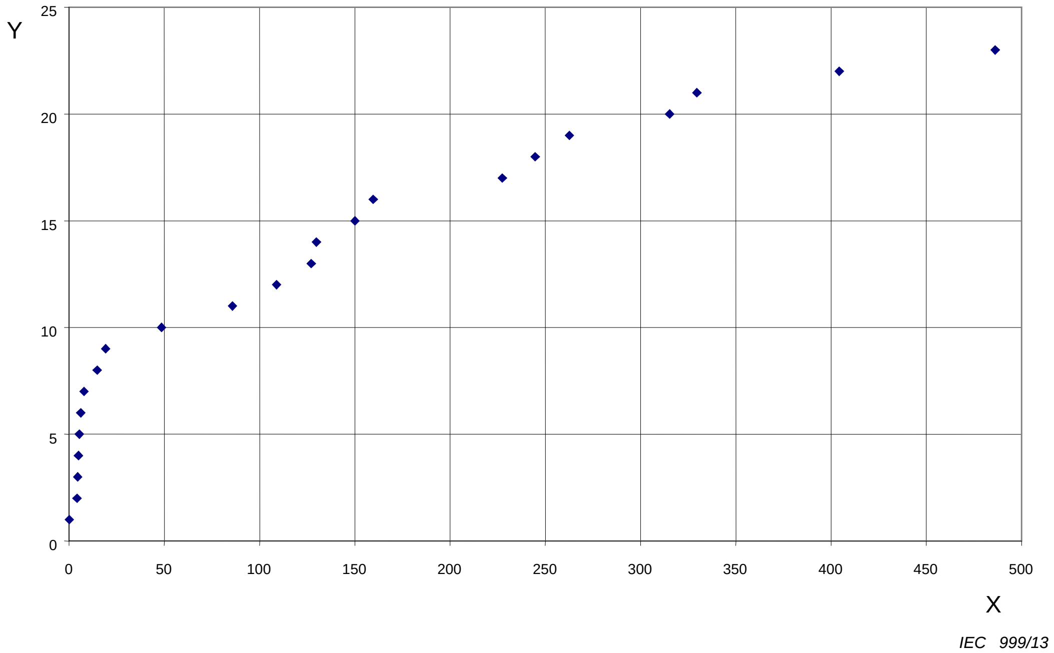
The successive failure times (in hours) of a piece of software developed as part of a large system are given in Table B.1.

Table B.1 – All relevant failures and accumulated times for software system

0,2 4,2 4,5 5 5,4 6,1 7,9 14,8 19,2 48,6 85,8 108,9 127,2 129,8 150,1 159,7 227,4 244,7 262,7 315,3 329,6 404,3, 486,2
NOTE $t_N = 486{,}2\,\text{h}$ $N = 23$.

Plot of accumulated failures against time

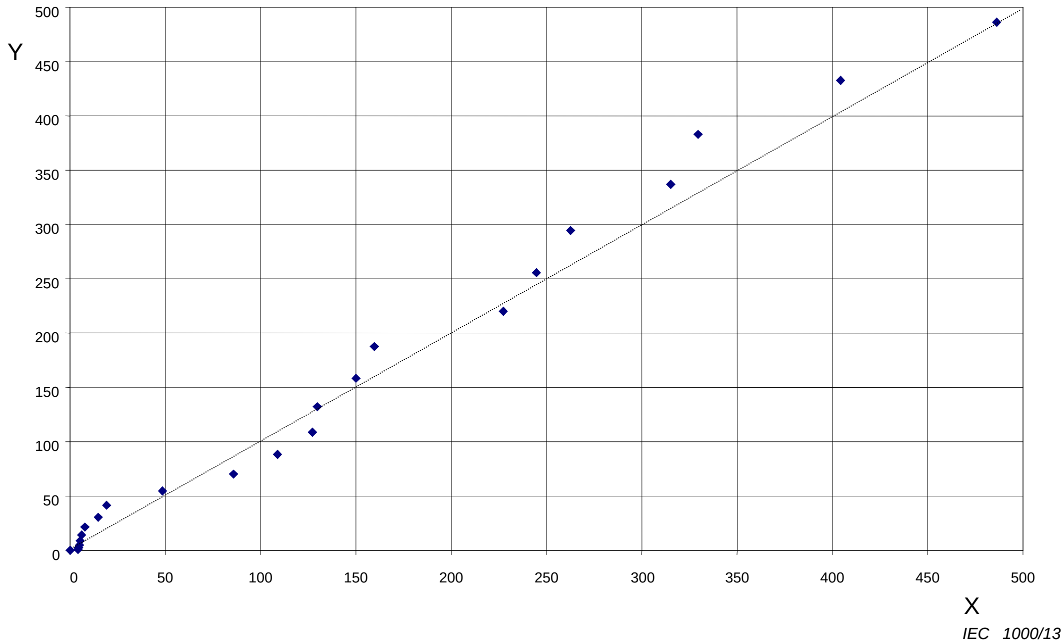
The concave down pattern in Figure B.1 indicates a decreasing failure intensity.



X axis accumulated time (h)

Y axis accumulated number of failures

Figure B.1 – Accumulated number of failures against accumulated time for software system



X axis observed accumulated failure times

Y axis expected accumulated failure times

Figure B.2 – Expected against observed accumulated times to failure for software system

Parameter estimation

From 7.2.1, the estimated parameters of the power law model are as follows:

$$\hat{\lambda} = 2{,}17$$

$$\hat{\beta} = 0{,}38$$

Goodness-of-fit

From 7.3.1.2, the plot of expected against observed failure times in Figure B.2 displays a random scatter around the 45° line indicating a good fit of the power law model to the data. Table B.2 shows the workings for the expected and observed failure times plotted in Figure B.2 where the expected failure times are computed from Step 2 in 7.3.1.2.

From 7.3.1.1, C^2 = 0,063 with M = 22. At a 10 % significance level, the critical value from Table 1 is 0,172. Since 0,063 $<$0,172, it can be concluded that the hypothesis that the power law model is a good fit to the data cannot be rejected.

Table B.2 – Calculation of expected accumulated times to failure for Figure B.2

Failure	**Observed failure time** (h)	**Expected failure time** (h)
1	0,2	0,130
2	4,2	0,803
3	4,5	2,326
4	5,0	4,946
5	5,4	8,881
6	6,1	14,326
7	7,9	21,465
8	14,8	30,468
9	19,2	41,496
10	48,6	54,705
11	85,8	70,242
12	108,9	88,250
13	127,2	108,866
14	129,8	132,224
15	150,1	158,454
16	159,7	187,681
17	227,4	220,028
18	244,7	255,617
19	262,7	294,564
20	315,3	336,983
21	329,6	382,989
22	404,3	432,692
23	486,2	486,200

Confidence interval for β

From 7.4.1, a two-sided 90 % confidence interval for β is (0,27; 0,55). Since all values in this interval are less than one, it indicates a decreasing failure intensity.

Confidence interval for failure intensity

From 7.5.1, a two-sided 90 % confidence interval for the failure intensity at t = 450 h is (0,011; 0,031) failures/h.

Prediction interval for the time to future failures

From 7.6.1, a two-sided 90 % prediction interval for the failure time of the 24th failure is (488,93; 690,30) h. From 7.6.2, a two-sided 90 % prediction interval for the time to the 25th failure is (504,68; 845,30) h.

B.3 Example 2

Five copies of a system were put into operation at the same time under identical conditions. When a system failed it was repaired immediately and returned to operation. The repair time is insignificant compared with the time in operation. Each copy of the system was observed for 1 850 h of operation. The accumulated times to failure are given in Table B.3.

Table B.3 – Accumulated times for all relevant failures for five copies of a system (labelled A, B, C, D, E)

A	B	C	D	E
96	552	1 056	1 560	
1 224	1 225			
1 392	1 570			

The data to be analysed consist of the superimposition of the failure times, which are presented in Table B.4, i.e. the accumulated times for all systems are combined into one data set and presented in their order of occurrence from smallest to largest.

Table B.4 – Combined accumulated times for multiple items of the same kind of a system

Failure	Accumulated time (h)
1	96
2	552
3	1 056
4	1 224
5	1 225
6	1 392
7	1 560
8	1 570

Plot of accumulated failures against time

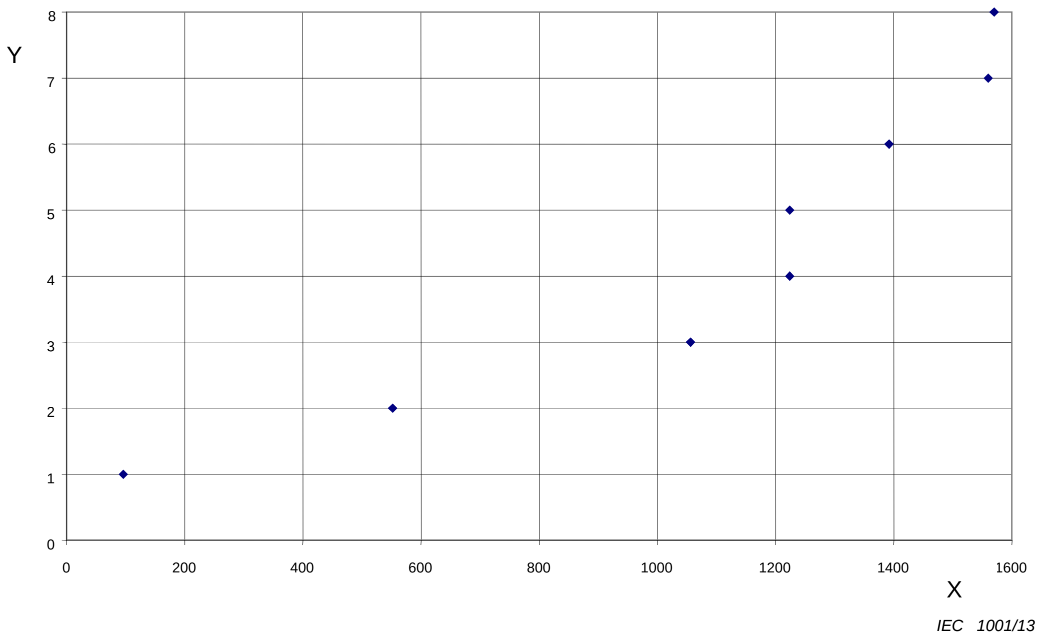
The concave up pattern in Figure B.3 indicates a possible increasing failure intensity.

Parameter estimation

From 7.2.1, the estimated parameters of the power law model are as follows:

$$\hat{\lambda} = 3{,}16 \times 10^{-4}$$

$$\hat{\beta} = 1{,}13$$



X axis accumulated time to failure (h)

Y axis accumulated number of failures

Figure B.3 – Accumulated number of failures against accumulated time for five copies of a system

Goodness-of-fit

From 7.3.1.1, C^2 = 0,115 with M = 8. At a 10 % significance level, the critical value from Table 1 is 0,165. Since 0,115 < 0,165 it can be concluded that the hypothesis that the power law model is a good fit to the data cannot be rejected. This result contradicts the subjective impression stated above. It implies that with only eight failures there is insufficient evidence to discount the power law model. In addition, the confidence intervals given below that are calculated based on this model should be interpreted with the usual caution for such a small data set.

Confidence interval for β

From 7.4.1, a two-sided 90 % confidence interval for β is (0,64; 2,13). Since this interval contains the value 1, it can be concluded that there is no statistical evidence to suggest that the failure intensity is not constant.

Confidence interval for failure intensity

From 7.5.1, a two-sided 90 % confidence interval for the failure intensity at t = 1 000 h is ($3{,}46 \times 10^{-4}$; $23{,}70 \times 10^{-4}$) failures/h.

B.4 Example 3

A manufacturer has tested an OEM (original equipment manufacturer) product from two potential vendors, labelled A and B. After each failure, the units were immediately repaired and returned to test. The accumulated times to failure are given in Table B.5.

Table B.5 – Accumulated operating hours to failure for OEM product from vendors A and B

Accumulated operating hours to failure (Vendor A)	Accumulated operating hours to failure (Vendor B)
600	400
1 100	650
1 500	900
1 750	1 100
2 000	1 500
2 500	2 100
3 100	2 700
3 500	
3 800	
4 500	
NOTE $t_N = 4\,500\text{ h},\ N = 10$.	NOTE $t_N = 2\ 700\text{ h},\ N = 7$.

Plot of accumulated failures against time

The patterns displayed in Figure B.4 indicate that the failure intensity of both products appears constant, although B has a slightly higher intensity of failure than A.

Parameter estimation

From 7.2.1, the estimated parameters of the power law model are for A

$$\hat{\lambda} = 1{,}53 \times 10^{-3}$$

$$\hat{\beta} = 1{,}04$$

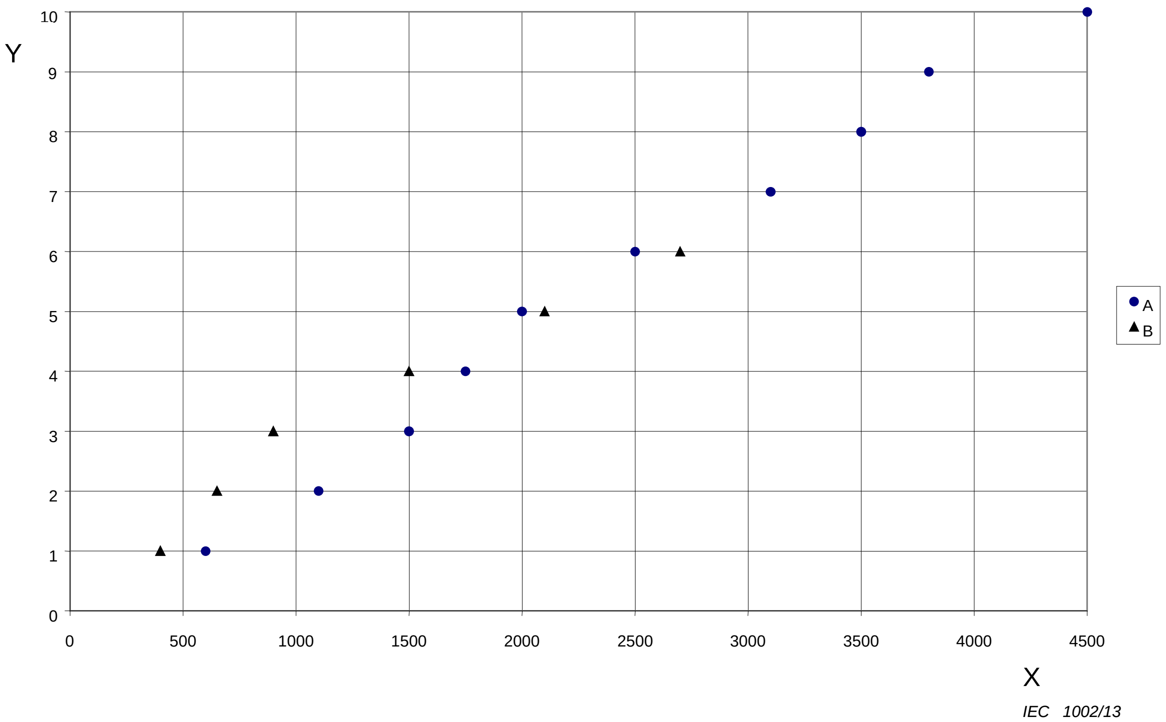
and the estimated parameters of the power law model are for B

$$\hat{\lambda} = 11{,}59 \times 10^{-3}$$

$$\hat{\beta} = 0{,}81$$

Goodness-of-fit

From 7.3.1.1, for A, C^2 = 0,047 with M = 9. At a 10 % significance level, the critical value from Table 1 is 0,167. Since 0,047 $<$ 0,167, one can conclude that the power law model is a good fit to the data. For B, C^2 = 0,072 with M = 6. At a 10 % significance level, the critical value from Table 1 is 0,162. Since 0,072 $<$ 0,162, one can conclude that the hypothesis that the power law model is a good fit to the data cannot be rejected.



X axis accumulated time (h)

Y axis accumulated number of failures

Figure B.4 – Accumulated number of failures against accumulated time for an OEM product from vendors A and B

Confidence interval for β

From 7.4.1, for A, a two-sided 90 % confidence interval for β is (0,61; 1,88) and for B, a two-sided 90 % confidence interval for β is (0,42; 1,70). Since both intervals contain the value 1, conclude that there is no statistical evidence to suggest that both failure intensities are not constant. Since these intervals overlap, there is no evidence to suggest any difference between the constant failure intensities of the two vendors.

Confidence interval for failure intensity

From 7.5.1, for A, a two-sided 90 % confidence interval for the failure intensity at t = 2 500 h is (1,02 × 10^{-3}; 4,80 × 10^{-3}) failures/h. For B, a two-sided 90 % confidence interval for the failure intensity at t = 2 500 h is (0,81 × 10^{-3}; 5,38 × 10^{-3}) failures/h. Since these intervals overlap, there is no evidence to suggest any difference between the failure intensities of the two vendors.

Test of the equivalence of the shape parameters

From 7.7.1 F = 0,83 and from Table 5 $1/F_{0,95}(12,18) = 0,43$ and $F_{0,95}(18,12) = 2,58$. Since 0,43 < 0,83 < 2,58, one can conclude that there is no statistical difference between the shape parameters for the two vendors at a 10 % significance level.

B.5 Example 4

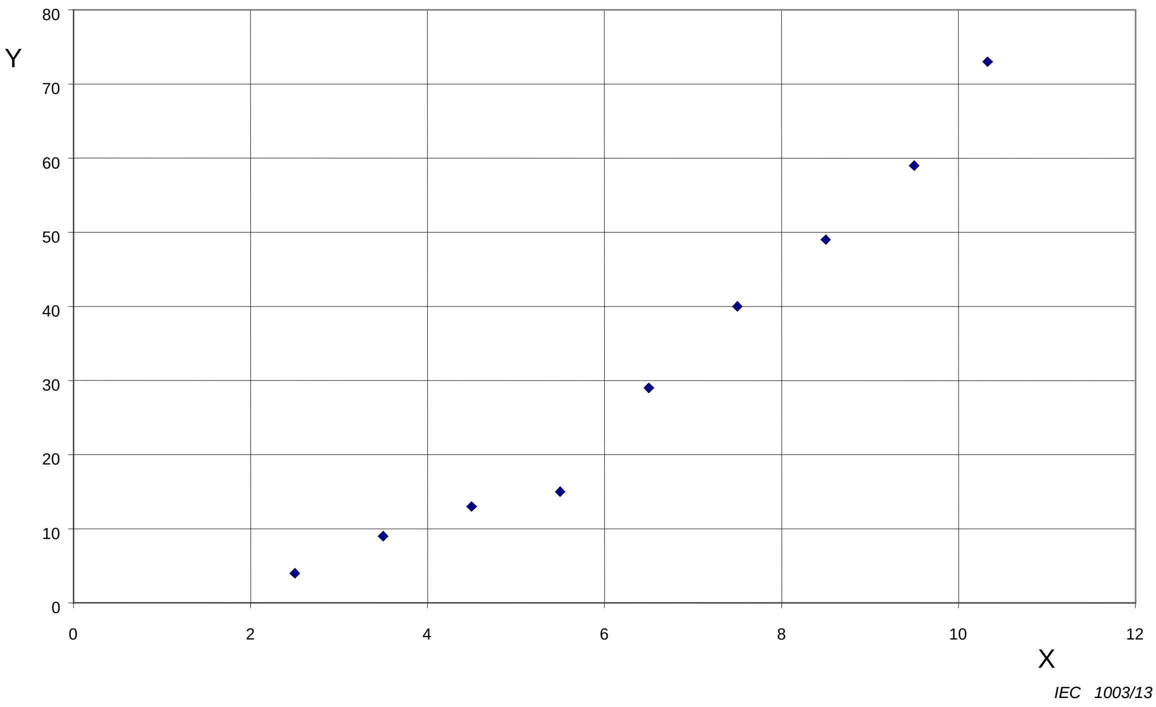
The numbers of failures for generators on a marine vessel are given in Table B.6. The data failures have been recorded in 9 intervals, so set d = 9-1=8.

Table B.6 – Grouped failure data for generators

Accumulated relevant operating time at end of group interval (years)	**Number of failures**	**Accumulated number of failures**
0,0	0	0
2,5	4	4
3,5	5	9
4,5	4	13
5,5	2	15
6,5	14	29
7,5	11	40
8,5	9	49
9,5	10	59
10,33	14	73

Plot of accumulated failures against time

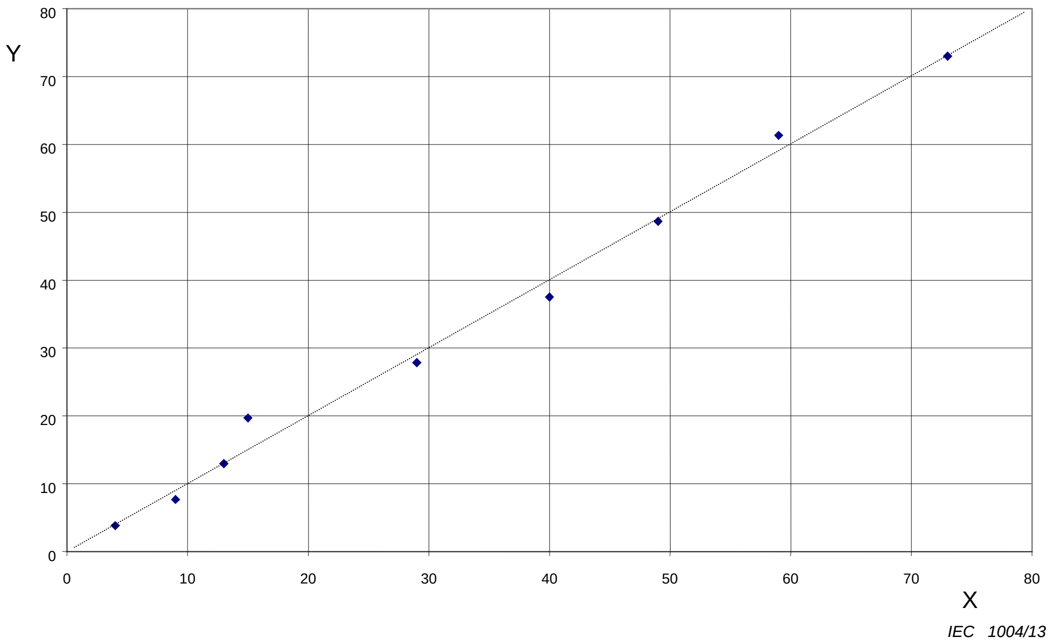
The concave up pattern in Figure B.5 indicates an increasing failure intensity.



X axis accumulated time (years)

Y axis accumulated number of failures

Figure B.5 – Accumulated number of failures against time for generators



X axis observed accumulated number of failures

Y axis expected accumulated number of failures

Figure B.6 – Expected against observed accumulated number of failures for generators

Parameter estimation

From 7.2.3, the estimated parameters of the power law model are as follows:

$$\hat{\lambda} = 0{,}57$$

$$\hat{\beta} = 2{,}08$$

Goodness-of-fit

From 7.3.2.2, the plot of expected against observed accumulated number of failures in Figure B.6 displays a random scatter around the 45° line indicating a good fit of the power law model to the data. Table B.7 shows the workings for the expected and observed accumulated numbers of failures plotted in Figure B.6. The expected number of failures are computed from Step 2 in 7.3.2.2.

Table B.7 – Calculation of expected numbers of failures for Figure B.6

Accumulated relevant operating time at end of group interval (years)	**Observed accumulated number of failures**	**Expected accumulated number of failures**
2,5	4	4,52
3,5	9	7,04
4,5	13	12,12
5,5	15	18,7
6,5	29	26,83
7,5	40	36,55
8,5	49	47,91
9,5	59	60,92
10,33	73	73,00

From 7.3.2.1 the test statistic is $\chi^2 = 9{,}62$. The critical value from Table 2 is $\chi^2_{0{,}90}(6) = 10{,}65$. Since the test statistic is less than the critical value, one can conclude that the power law model is a good fit to the data at a 10 % significance level.

Confidence interval for β

From 7.4.2, a two-sided 90 % confidence interval for β is (1,67; 2,49). Since all values in this interval are bigger than 1, it indicates an increasing failure intensity.

Estimate of failure intensity

From 7.5.2, at t = 11 years, the failure intensity is estimated to be 15,74 failures/year and a 90 % confidence interval is (12,34; 21,74) failures/year.

Annex C
(informative)

Bayesian estimation for the power law model

C.1 Background information

The methods reported in the main body of this standard are based upon a classical approach to statistical estimation. This means that the parameters of the power law model, λ and β, are assumed to be fixed, but unknown, and a classical method, such as 'maximum likelihood', is used to estimate the values of the two parameters using observed data for the accumulated times to failure of a repairable item.

An alternative approach is Bayesian estimation. A Bayesian approach treats the parameters of the power law model, λ and β, as unobserved random variables. This has implications for stages in the estimation process. A Bayesian approach to estimation for the power law process can be summarized in the following stages:

a) choose a probability distribution to reflect the state of knowledge in each of the parameters, λ and β, before collecting any data. This is called the prior distribution;
b) collect observed data for the accumulated times to failure for the repairable item of interest;
c) estimate the parameters of the power law model from the posterior distribution which is computed using Bayes Theorem and reflects what is known about the parameters after observing the data.

The posterior distribution will be proportional to the product of the prior beliefs about the parameters and the so-called likelihood function, which represents the chance of the observed time to failure data being generated from the assumed power law model. In general the posterior can be expressed as follows:

$$posterior \propto likelihood \times prior$$

Table C.1 summarizes the acknowledged strengths and weaknesses of Bayesian estimation compared with classical estimation. The main practical concern of Bayesian estimation relates to the choice of prior. Since the prior will influence the values of estimates obtained, there is a need to clearly state the justification for the form of the prior and to ensure that it is specified before observing data, hence preserving the integrity of the analysis. Otherwise there is a serious risk that the prior may be manipulated to provide estimates that are desired, even if they are not consistent with the observed data. It is recommended that an independent analyst designs and implements an appropriate process to capture and specify the prior distribution from relevant engineering experts with the same rigour as would be applied to collecting observed failure data from the test or field.

The mathematical form of the posterior is related to the distribution function selected for the prior, and in turn this has implications for the complexity of the computations required to obtain the estimates. For classical estimation, there will only be one maximum likelihood estimator and so there is only a need for a single calculation procedure to estimate a parameter, as shown in the main body of this standard. Under Bayesian estimation there will be different formulae and calculation procedures depending upon the form of the prior and posterior distributions. An analyst will be able to give guidance concerning the choice of the type of prior distribution to support both a credible elicitation of engineering judgement and the computation required to obtain the parameters. It is possible that computational software will be required to support Bayesian estimation.

Table C.1 – Strengths and weakness of classical and Bayesian estimation

	Classical	Bayesian
Strengths	Well known and accepted by industry Regarded as respecting the objectivity of the data	Existing knowledge can be included Justification for source of relevant information to construct prior for parameters is available
Weaknesses	Assumptions can be hidden To obtain better estimates we require larger sample sizes	Prior is subjective hence there is a risk of selecting a distribution that will influence the results inappropriately Computation can be complex and usually cannot be solved analytically

C.2 Bayesian estimation for the power law model

Consider a power law model with failure intensity given by:

$$z(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$$

Let $\Pr(\lambda,\beta)$ represent the prior probability for the parameters λ and β. As within the main body of this standard, let t_i represent the accumulated relevant time to the ith failure of a repairable item, where $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Note that the t_i, i = 1,…N, should be observed only after the prior $\Pr(\lambda,\beta)$ has been specified. The posterior distribution will represent the information about the parameters of the model conditional on the observed time to failure data. The posterior distributions is denoted by $\Pr(\lambda,\beta \mid t)$ where $\lambda,\beta \mid t$ denotes the conditional relationship (i.e. denoted by the symbol $\mid$) of the parameters, λ and β, on the times to failure, t_i, i = 1,…N. The posterior distribution will be given by:

$$\Pr(\lambda,\beta \mid t) = \frac{\Pr(\lambda,\beta)\, f(t \mid \lambda,\beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \Pr(\lambda,\beta)\, f(t \mid \lambda,\beta)\, d\lambda\, d\beta}$$

where $f(t \mid \lambda,\beta)$ is the likelihood function which is given by the joint probability density function of the random variables t_i, i = 1,…N, conditional on the parameters λ and β.

Let T represent the accumulated relevant time of a repairable item. Then the likelihood function of the power law process is given by:

$$f(t \mid \lambda,\beta) = \lambda^N \beta^N \left(\prod_{i=1}^{N} t_i \right)^{\beta-1} e^{-\lambda T^\beta} \qquad \text{(C.1)}$$

NOTE 1 For the case of failure terminated data T is equal to t_N.

The form of the prior distribution should be specified to represent the pattern of uncertainty in the value of the relevant parameter. The functional form of the prior distribution will usually be made by the analyst based upon the problem structure and the information available from relevant engineering experts who may draw upon data for similar systems, test results and other relevant data to inform their subjective judgement.

Many different functional forms for the prior distribution of the power law model exist; Rigdon and Basu [9] provide a review. It is not appropriate to examine all possible prior distributions in this annex. This annex presents two practical examples to illustrate two possible approaches with different forms of the prior distribution and Bayesian estimation calculations for the power law model. By providing details of each step in the modelling of each example problem, it is intended to make the stages of the Bayesian estimation process transparent.

NOTE 2 The two examples given should not be regarded as the only forms of the prior distribution that can be appropriate in practice. Many forms of the prior for the power law model lead to complex calculations that require specialist software or freeware. Advice should be sought from a suitable technical analyst as required.

The prior distribution should be fully specified before observing any data although this time discontinuity in the implementation of the different stages of the Bayesian analysis can be masked within the examples.

C.3 Numerical examples

C.3.1 General

The following numerical examples show how Bayesian estimation for the power law process can be implemented. The code for the calculations was written in computational software. The calculations are shown to four decimal digits. Both examples follow a common format which begins with a description of the background to the problem and then implements the three stages in Bayesian estimation described in Clause C.1.

NOTE The stages of analysis are shown in the sequence that they would be implemented, although it would be good practice for the analyst to fully specify the mathematical model to obtain the posterior distribution and the estimation procedure on selecting the form of the prior.

C.3.2 Bayesian estimation of growth in reliability for a new system in early operation

Background to the problem

A new system has entered service and will be in continuous operation. During early life all hardware faults identified will be addressed through the implementation of appropriate corrective action. Estimates of any changes in the failure intensity are required to assess reliability growth. The power law model provides a credible model for this problem as it can capture changes in the failure intensity as operating experience is accumulated. The engineer responsible for the system has prior knowledge based upon experience of testing and operating similar systems from the same product family.

Stage 1 – Choosing the prior distribution

The analyst prepares a process to capture the engineer’s beliefs about the true values of the parameters of the power law model at the point of entry into service of the system. The analyst will consider possible mathematical forms of the prior distribution before implementing an elicitation process to specify the subjective judgement about the engineer's beliefs about the uncertainty in the parameters.

In this case, the analyst decides to re-parameterize the power law model in terms of $\eta = \lambda T^{\beta}$ for the following reasons. First, the new parameter, η, represents the expected number of failures by time T which should be be more meaningful to interpret and support elicitation of engineering judgement. Second, this re-parameterization allows the likelihood function to be expressed as two independent functions which supports elicitation of structured engineering judgement and facilitates computation. The likelihood, previously given in formula (C.1) can be written as:

$$f(t|\eta,\beta) = \prod_{i=1}^{N} t_i^{-1} \left[\beta^N e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i}} \right] \left[\eta^N e^{-\eta} \right] \qquad \text{(C.2)}$$

where $\Pr(\beta) \sim Gamma\left(N+1, \sum_{i-1}^{N} ln\frac{T}{ti}\right)$ and $\Pr(\eta) \sim Gamma\ (N = 1{,}1)$

NOTE 1 $Gamma(a,b)$ denotes a Gamma distribution with parameters a and b, $\Pr(\beta)$ denotes the probability distribution of β, and $\Pr(\eta)$ is the probability distribution of η.

The analyst requires to select a distribution to represent the prior knowledge about the two parameters β and η. In both cases a Gamma distribution is selected for two reasons. First, it provides a flexible function that should capture the anticipated patterns in the uncertainty in the a priori values of the parameters. Second, the Gamma distribution provides a so-called conjugate prior meaning that the computations to obtain the posterior estimates are more straightforward.

Assume that the parameters β and η are statistically independent and the uncertainty in their true values can be represented by the Gamma prior distributions given by, respectively:

$$\pi(\beta) \sim Gamma\ (a_{\beta}, b_{\beta}) \text{ and } \pi(\eta) \sim Gamma\ (a_{\eta}, b_{\eta}) \tag{C.3}$$

We can obtain the values of the so-called hyperparameters, $(a_{\beta}, b_{\beta}, a_{\eta}, b_{\eta})$ and check the appropriateness of the Gamma distribution as a representation of the pattern in the uncertainty about β and η through a structured elicitation of engineering judgement. Then we can re-express our prior distributions in terms of our original parameters of the power law model, λ and β as a result of the following relationship:

$$\pi(\eta,\beta) = \pi(\eta)\pi(\beta) = \pi(\lambda \mid \beta)\pi(\beta) = \pi(\lambda,\beta) \tag{C.4}$$

where $\pi(\lambda) \sim Gamma\ (a_{\eta}, b_{\eta}T^{\beta})$ and the joint prior distribution $\pi(\lambda,\beta)$ is conjugate.

One approach to capturing the uncertainty in β is to prepare a grid as shown in Table C.2a. The engineering expert is asked to allocate 20 tokens, each worth 5 %, into the different classes within the grid to reflect the chance of the value of the rate of growth β being within a particular class. Table C.2b shows a completed grid where the engineer has indicated that the uncertainty in the true value of β lies between 0 and 0,6 with the modal class being 0,3 – 0,4.

NOTE 2 The engineer is briefed that there is no correct answer to the elicitation question and so an honest opinion about the uncertainty in the possible values of the parameters should be provided.

NOTE 3 The number of tokens, and hence their worth, are chosen to reflect the partitioning of the prior distribution. For example, the total distribution is worth 100 %, hence if it is split into 5 % tokens then 20 are required. If the percentage allocation is reduced (increased) then the number of tokens will increase (decrease) respectively.

NOTE 4 In this example, possible values of the shape parameter are pre-specified on the grid. These can be left blank if it is believed this may cause some anchoring on the classes specified by the analyst.

A similar process can be used to elicit the possible values of the expected number of failures by a specified time T. Table C.3a shows a blank grid for the parameter, η. First, the engineering expert requires to determine meaningful classes for the range of values of η for the case when the system has been in service for 2 years when it is expected to have accumulated 20 000 hours of operational experience, i.e. $T = 20\ 000\ \mathrm{h}$. Tokens can be allocated to classes in accordance with the expert's belief that the true value may fall within each of the classes on the grid. Table C.3b shows a completed grid. The expert believes the true value of the expected number of failures by 20 000 operating hours may lie between 10 000 and 100 000, with the modal class being 30 000 failures.

The analyst shall convert the subjective frequency distributions represented in the grids in Tables C.2 and C.3 into a parametric prior probability distribution. To obtain the prior distributions in Formula (C.1), the analyst shall fit appropriate Gamma distributions to the subjective distributions elicited from the engineering expert. Standard distribution fitting algorithms can be used to find a suitable Gamma distribution for each of the subjective distributions for β and η. A Gamma distribution with parameters $a_\beta = 6,7956$ and $b_\beta = 1/0,0448 = 22,3214$ is found to represent the subjective distribution for the shape parameter β. The best fit for the subjective distribution for the parameter representing the expected number of failures by time $T = 20\ 000\ \mathrm{h}$, η, is a Gamma distribution with parameters $a_\eta = 17,7566$ and $b_\eta = 1/1447,408 = 0,000691$.

Checks on the credibility and the statistical fit of these Gamma distributions should be undertaken. Figures C.1 and C.2 show the plots of the two Gamma distributions and these should be shown to the engineering expert to ensure that the characteristics of the function used to summarize the expressed uncertainties are acceptable. If not, then the analyst should revisit the fitting process to ensure that the probability distribution selected does capture the subjective beliefs of the engineer.

NOTE 5 This can be done by simulating different outcomes of the test (e.g. zero failures, few failures or many failures) and presenting these results to the engineering expert.

Tables C.4 and C.5 show the comparison between the values of the fitted Gamma and the elicited subjective probabilities. The match is not perfect because the fitted Gamma distributions both underestimate the modal class of the subjective distribution by ensuring a better fit in the distribution tails. To better capture the engineer's uncertainties in the distribution tail rather than match the mode of the distribution is a conservative strategy when selecting a parametric prior. Summary statistics, such as the mean of the absolute error of the fitted relative to the subjective probabilities and the standard deviation of the error, can be computed. The analyst will be able to use such summaries to compare fits between competing probability distributions and to assess whether the error is acceptable. In this example, the mean absolute error is of the order of 0,05 which is considered tolerable.

Table C.2 – Grid for eliciting subjective distribution for shape parameter β

Table C.2a – Blank grid pre-elicitation

Possible values of β	(0 – 0,2)	(0,2 – 0,3)	(0,3 – 0,4)	(0,4 – 0,6)	>0,6

Table C.2b – Completed grid post elicitation

			●		
			●		
		●	●		
		●	●		
		●	●		
	●	●	●	●	
	●	●	●	●	
	●	●	●	●	
Possible values of β	(0 – 0,2)	(0,2 – 0,3)	(0,3 – 0,4)	(0,4 – 0,6)	>0,6

Table C.3 – Grid for eliciting subjective distribution for expected number of failures parameter η

Table C.3a – Blank grid pre-elicitation

Possible values of $\eta(\times 10^4)$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	5	8	$2\frac{1}{2}$

Table C.3b – Completed grid post elicitation

					●			
					●			
				●	●			
			●	●	●	●		
		●	●	●	●	●		
		●	●	●	●	●	●	●
Possible values of $\eta(\times 10^4)$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	5	8	10

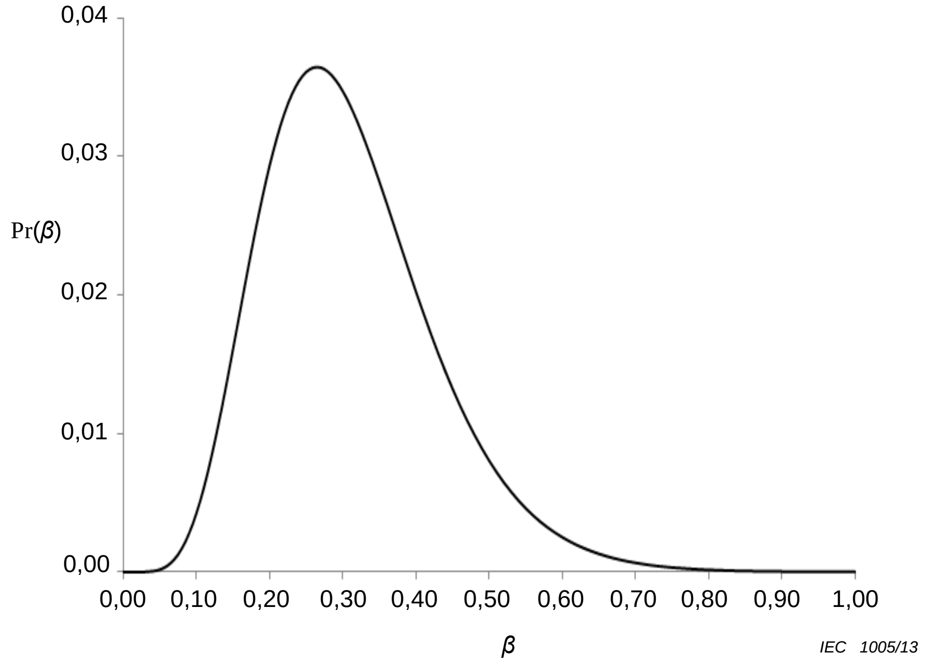


Figure C.1 – Plot of fitted Gamma prior (6,7956, 0,0448) for the shape parameter of the power law model

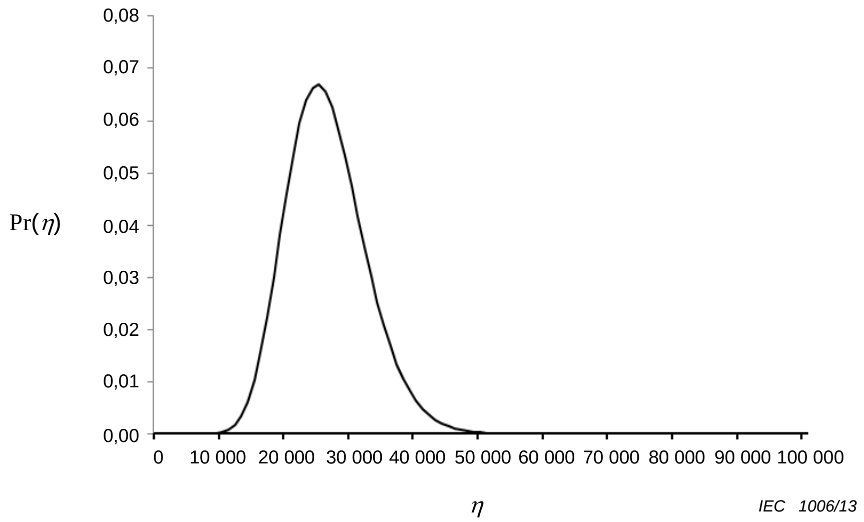


Figure C.2 – Plot of fitted Gamma prior (17,756 6, 1447,408) for the expected number of failures parameter of the power law model

Table C.4 – Comparison of fitted Gamma and subjective distribution for shape parameter β

Interval for possible value of β	Subjective frequency distribution	Subjective probability distribution	Fitted Gamma (6,7956, 0,0448) probability distribution	Error between fitted Gamma relative to subjective probability
0 – 0,2	3	0,15	0,1853	-0,0353
0,2 – 0,3	6	0,30	0,3488	-0,0488
0,3 – 0,4	8	0,40	0,2726	0,1274
0,4 – 0,6	3	0,15	0,1758	-0,0258
$>$0,6	0	0	0,0175	-0,0175
			Mean absolute error	-0,0501
			SD of error	0,0722

Table C.5 – Comparison of fitted Gamma and subjective distribution for expected number of failures by time $T = 20\ 000\ \mathrm{h}$ parameter η

Interval for possible values of η	Subjective frequency distribution	Subjective probability distribution	Fitted Gamma (17,7566 , 1447,408) probability distribution	Error between fitted Gamma relative to subjective probability
0 – 10000	2	0,10	0,0004	0,0996
10000 – 20000	3	0,15	0,1748	-0,0248
20000 – 25000	4	0,20	0,3103	-0,1102
25000 – 30000	6	0,30	0,2871	0,0129
30000 – 50000	3	0,15	0,2269	-0,0769
50000 – 80000	1	0,05	0,0006	0,0494
80000 – 100000	1	0,05	0	0,0500
			Mean absolute error	0,06065
			SD of error	0,0749

Table C.6 – Times to failure data collected on system test

Component description	Failures	Accumulated operating time to failure h
A	4	34h 187 6h 111 43h 12 429h
B	2	10 910h 12 241h
C	1	1 719h
D	3	798h 163 4h 2 692h
E	1	156h
F	2	384h 1 078h
G	1	415h
H	2	11 785h 20 200h
I	5	1h 32h 2 878h 15 973h 18 840h
J	1	1h
K	1	1 235h
L	1	8 286h
M	2	862h 2 074h
N	5	158, 546h 2 828h 2 971h 12 961h
O	3	4 102h 6 523h 13 576h
P	1	15h 178h
Q	4	700h 1 647h 4 121h 12 464h
R	5	18h 45h 575h 611h 13 994h
S	8	5h 11h 226h 1 991h 3 089h 3 989h 5 589h 16 850h

Stage 2 – Observed data for the accumulated times to failure

Table C.6 shows the accumulated operating hours to relevant failures for each system hardware component for which a corrective action was implemented for the system during the first two years of operation. During operation the system accumulated $T = 20\ 000$ h.

Stage 3 – Bayesian estimates of the parameters from the posterior distribution

The observed data can be combined with the prior distribution to generate the posterior distribution from which Bayesian estimates of the power law parameters can be obtained. For the power law model with likelihood function given by formula (C.1) and form of the prior distribution given in formula (C.4), the posterior distribution is given by:

$$\Pr\left(\lambda,\beta|t\right) = Gamma\left(a_\beta + N, b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln\frac{T}{t_i}\right) \times Gamma\left(a_\eta + N, b_\eta + 1\right) \qquad \text{(C.5)}$$

From the observed data in Table C.6, then $N = 52$ failures. Matching the estimated parameters of the fitted Gamma distributions to formula (C.5) gives the following values for the parameters of the posterior distributions:

$$a_\beta + N = 6{,}7956 + 52 = 58{,}7956$$

$$b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i} = 22,2816 + 146,4683 = 168,7499$$

$$a_\eta + N = 17,7566 + 52 = 69,7566$$

$$b_\eta + 1 = 0,000691 + 1 = 1,000691$$

The Bayes estimate of the shape parameter β is given by:

$$\hat{\beta} = \frac{a_\beta + N}{b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i}} = \frac{58.7956}{168,7499} = 0,3484 \tag{C.6}$$

The Bayes estimate of parameter η is given by:

$$\hat{\eta} = \frac{a_\eta + N}{b_\eta + 1} = \frac{69,7566}{1,000691} = 69,7085$$

which yields:

$$\hat{\lambda} = \frac{\eta}{T^\beta} = \frac{69,7085}{20\ 000^{0,3484}} = 2,2117 \tag{C.7}$$

Concluding remarks

Table C.7 summarizes the Bayesian and the classical estimates for this example. The workings to obtain the classical estimates are not shown, but use the same steps given within the main body of this standard. Both estimates indicate that the failure intensity of the system is decreasing as operational experience is accumulated and is consistent with reliability growth. The Bayesian estimate of growth is higher than the classical estimate because the Gamma prior distribution for the shape parameter influences the estimated value together with the observations.

The choice of the functional form for the prior, the methods used to elicit and verify the subjective probabilities and the approach used to fit a parametric distribution to the subjective probabilities are important because they impact upon the estimates obtained. In this example, the information in prior distribution influences the Bayesian estimate of the shape parameter. The practical credibility of all assumptions made in the analysis shall be justifiable.

Table C.7 – Summary of estimates of power law model parameters

Parameter	Bayes Estimate	Classical estimate
β	0,3484	0,3467
λ	2,2117	1,6715

C.3.3 Bayesian estimate of future number of failures for an operational system

Background to the problem

An estimate of the number of failures expected during the next 6 000 h once a system has been in operation for 10 000 h is required. A power law model is selected to describe the underlying pattern in the failure intensity as it is believed that this may change through calendar time. Engineering knowledge about the operational demands and planned maintenance will be used to inform the analyst's choice of the prior distribution about the likely number of failures and the associated uncertainty.

Stage 1 – Choosing the prior distribution

The analyst asks the engineering expert to provide judgements about the typical number of failures that he would expect by T = 10 000 h of operation together with an estimate of the spread.

The engineer believes that there may be, on average, 30 failures. However the engineer states that he would be surprised if there were less than 5 or more than 85 failures. Sketching the shape of the distribution of the number of failures, the engineer produces the function shown in Figure C.3.

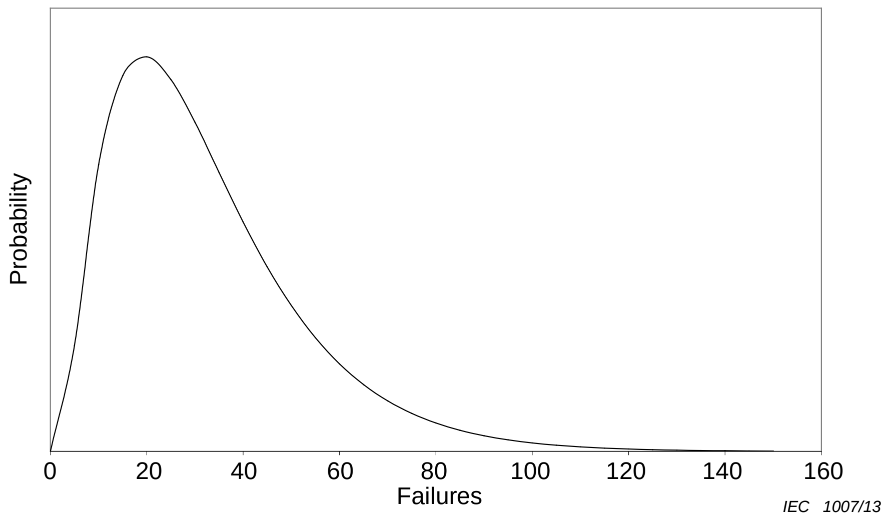


Figure C.3 – Subjective distribution of number of failures

The analyst requires to convert the information about the subjective distribution into a mathematical prior distribution. The analyst aims to select a function that both matches the subjective beliefs of the engineer and facilitates computations for the estimation. The approach adopted is to re-parameterize the power law model to have the intensity function:

$$z(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \quad \text{(C.8)}$$

where $\theta = \lambda^{-\beta}$ and uses a joint probability for β and θ of the form:

$$\Pr(\theta, \beta; a, b, T) = g(\beta)\frac{\beta}{\theta}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\beta a}\exp\left[-b\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\beta}\right] \quad \text{(C.9)}$$

where $g(\beta)$ is the prior for β and $\Gamma(.)$ is a gamma function. This form of the prior has been proposed by several authors, including Beiser and Rigdon [10] and analysts believe that the

Gamma probability distribution provides a class of models that is sufficiently flexible to capture the pattern in the uncertainty in the number of failures expressed by the engineer.

The hyperparameters of the prior distribution given in formula (C.9), a, b at time T, can be obtained by matching the information provided by the engineer. The analyst can directly equate the expected 30 failures to the mean of the Gamma distribution. The standard deviation gives a measure of spread and for skewed distributions, such as the one shown in Figure C.3, the standard deviation is approximately equal to a quarter of the range. Since the range of failures given by the engineer is 85 – 5 = 80, then the standard deviation can be estimated as 20.

Since the mean and standard deviation of the Gamma distribution can be related to its parameters, the values of a and b can be obtained as follows:

$$a = \frac{\text{mean}^2}{\text{variance}} = \frac{30^2}{20^2} = 2{,}25, \quad b = \frac{\text{mean}}{\text{variance}} = \frac{30}{20^2} = 0{,}075$$

The analyst can generate a plot of the function of a Gamma with parameters (2,25, 0,075) and allow the engineer to verify that this distribution is consistent with the subjective beliefs. If it is not, then the analyst shall revisit the selection of the prior.

In order to fully specify the joint prior distribution given in formula (C.9), the engineer is asked to specify a distribution for the shape parameter β by reasoning through the pattern in the failure intensity. The engineer is confident that the failure intensity will not increase as operational experience is accumulated but has no view as to whether it is more or less likely to decrease or stay constant. The analyst translates this information to a Uniform distribution over the range $0{,}5 < \beta < 1$, giving:

$$g(\beta) = \frac{1}{0{,}5} \quad 0{,}5 < \beta < 1$$

because this function captures the indifference to values of the shape parameter over a range consistent with a non-increasing failure intensity.

Stage 2 – Observed data for the accumulated times to failure

Failure data have been collected from the field. During 10 000 h of operation, N = 30 relevant failures have occurred. The times at which the failures occurred are given in Table C.8.

Stage 3 – Bayesian estimates of the parameters from the posterior distribution

Under the power law with the selected prior distribution, the distribution of the number of failures M in a future time interval $(t_N, t_N + s)$ can be derived and is given by:

$$\Pr(M \mid t) = \frac{cb^a \Gamma(N+M+a)}{M!\Gamma(a)} \int_0^\infty g(\beta) \beta^N T^{\beta a} u^\beta \left\{ \frac{\left[(t_N + s)^\beta - t_n^\beta\right]^M}{\left[bT^\beta + (t_N + s)^\beta\right]^{N+M+a}} \right\} d\beta \quad \text{(C.10)}$$

where N is the number of observed failures at the time of estimation, $u = \prod_{i=1}^{N} t_i$ and c is a normalising constant, given by:

$$c = \left[\int_0^\infty g(\beta) \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\beta^N u^\beta T^{a\beta} \Gamma(N+a)}{(t_N^\beta + T^\beta)^{N+\beta}} d\beta \right]^{-1}$$

Substituting the relevant data for the prior and the observed failure data for the system into formula (C.10) gives the posterior distribution for the number of failures M in the future time interval since the last observed failure at 8 690 h, $\left(t_{30} = 8690,\ t_{30} + s = 8690 + 6000\right)$:

$$\Pr\left(M \mid t\right) =$$

$$\frac{c0,075^{2,25}\Gamma\left(30 + M + 2,25\right)}{M!\Gamma\left(2,25\right)} \int_0^\infty \frac{1}{2,5} \beta^{30} 10000^{2,25\beta} u^\beta \left\{ \frac{\left[\left(8690+6000\right)^\beta - 8690^\beta\right]^M}{\left[0,075(10000)^\beta + \left(8690+6000\right)^\beta\right]^{30+2,25+M}} \right\} d\beta$$

where $u = \prod_{i=1}^{N} t_i = 3.7463\text{x}10^{107}$ and $c = \left[3.5887\text{x}10^{-20}\right]^{-1}$.

Table C.8 – Time to failure data for operational system

Failure number	Accumulated time to failure h
1	860
2	1 258
3	1 317
4	1 422
5	1 897
6	2 011
7	2 122
8	2 439
9	3 203
10	3 298
11	3 902
12	3 910
13	4 000
14	4 247
15	4 411
16	4 456
17	4 517
18	4 899
19	4 910
20	5 676
21	5 755
22	6 137

Failure number	Accumulated time to failure h
23	6 211
24	6 311
25	6 613
26	6 975
27	7 335
28	8 158
29	8 498
30	8 690

Figure C.4 shows the posterior probabilities for the number of failures, M, in the next 6 000 h of operation and Figure C.5 shows the cumulative posterior probability distribution for the number of failures in the next 6 000 h of operation. The mean of the posterior distribution is 18,24 which implies that there will most likely be 19 failures in the next 6 000 h of operation. It is also possible to obtain 95 % limits on the number of failures from the posterior distribution. For example, an upper 95 % limit corresponds to the 95 % percentile of the posterior distribution, which has a value of 28. This means that there is a 5 % chance that there will be more than 28 failures in the next 6 000 h of operation.

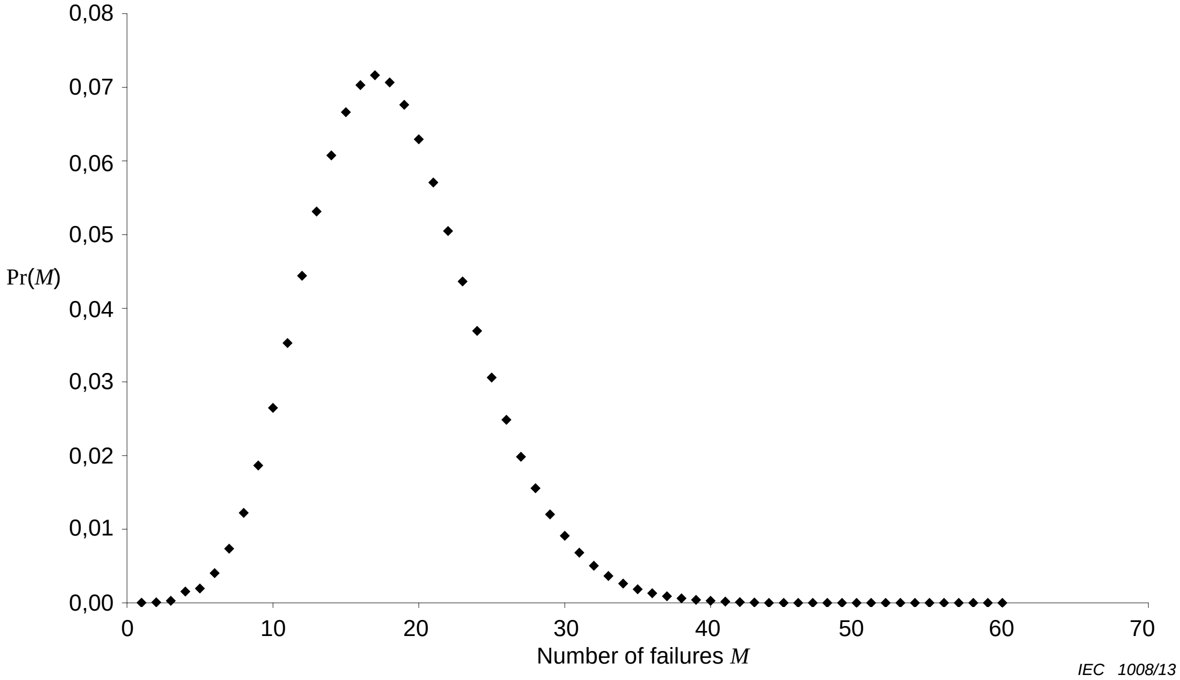


Figure C.4 – Plot of the posterior probability distribution for the number of future failures, M

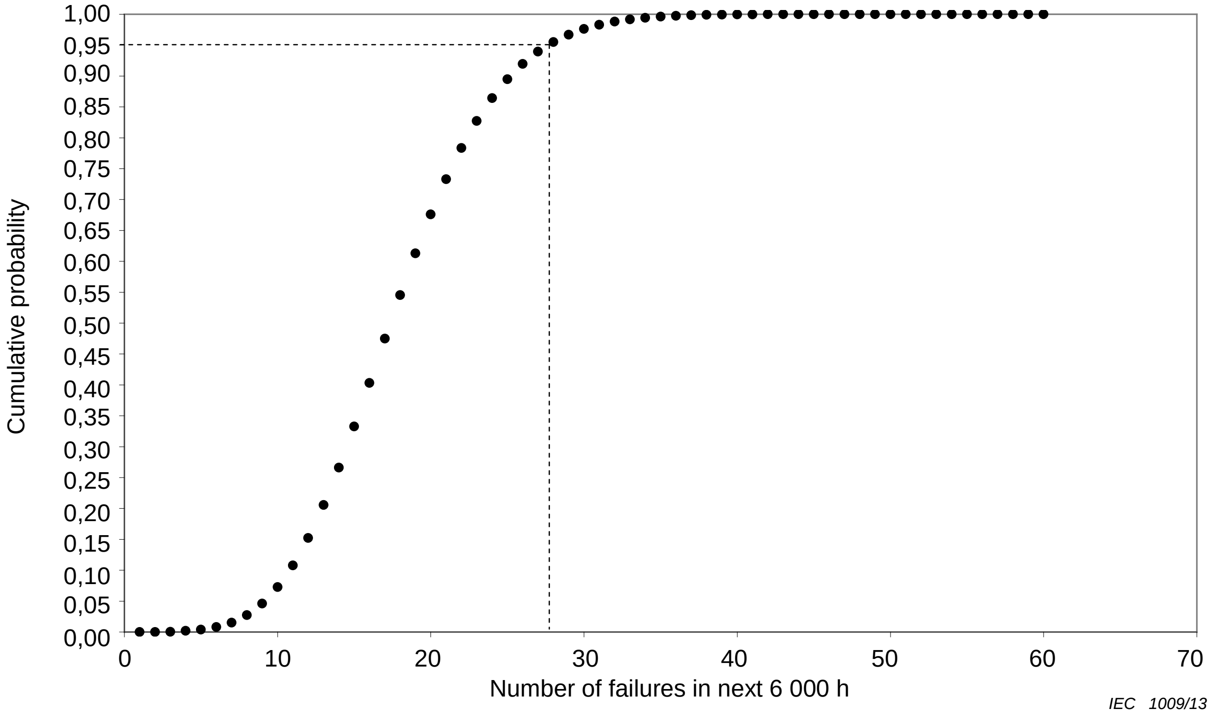


Figure C.5 – Plot of the posterior cumulative distribution for the number of future failures, M

C.4 Summary

The information in this annex aims to explain the rationale of a Bayesian approach to estimation for the power law model. Bayesian estimation allows the analyst to include prior information into the model and to combine this with observed time to failure data. The classical methods, which are explained in the main body of this standard, only use the observed accumulated time to failure data to obtain estimates.

The examples given in this annex show insight into the process of Bayesian analysis for two specific approaches. An analyst who has a sound knowledge of Bayes should be involved in the estimation because Bayesian analysis involves more complex modelling than is usually the case for classical estimation.

Bayesian methods can be very powerful, but consequently should be used with care. In particular, the relevant information used to specify the prior distribution should be fully justified and open to scrutiny to maintain the integrity of the analysis.

Bibliography

[1] IEC 61703, *Mathematical expressions for reliability, availability, maintainability and maintenance support terms*

[2] CROW, L.H., 1974, *Reliability Analysis for Complex Repairable Systems*. Reliability and Biometry, ed. F. Proschan and R.J. Serfling, pp. 379-410, Philadelphia, PA:SIAM

[3] CROW, L.H., 1982, *Confidence Intervals Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth*. Technometrics, 24, 1, pp.67-72

[4] CROW, L.H., 1983, *Confidence Intervals on the Reliability of Repairable Systems*. Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium

[5] DUANE, J.T., *Learning curve approach to reliability monitoring,* IEEE Transactions on Aerospace, Vol. 2, N° 2, 1974

[6] IEC 61164:2004, *Reliability growth – Statistical test and estimation methods*

[7] ASCHER, H. and FEINGOLD, H.,1984, *Repairable Systems Reliability*. Marcel Dekker

[8] BAIN, R.E. and Engelhardt, M. 1995, *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models*. Marcel Dekker

[9] RIGDON, S.E. and BASU, A.P., 2000 *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. John Wiley

[10] BEISER J.A. and RIGDON, S.E., 1997 *Bayes Prediction for the Number of Failures of a Repairable System*. IEEE Transactions on Reliability, Vol 46, No. 2, pp 291-295

____

SOMMAIRE

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

MODÈLE DE LOI EN PUISSANCE – ESSAIS D'ADÉQUATION ET MÉTHODES D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

AVANT-PROPOS

1) La Commission Electrotechnique Internationale (CEI) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). La CEI a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI – entre autres activités – publie des Normes internationales, des Spécifications techniques, des Rapports techniques, des Spécifications accessibles au public (PAS) et des Guides (ci-après dénommés "Publication(s) de la CEI"). Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec la CEI, participent également aux travaux. La CEI collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
2) Les décisions ou accords officiels de la CEI concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux de la CEI intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
3) Les Publications de la CEI se présentent sous la forme de recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux de la CEI. Tous les efforts raisonnables sont entrepris afin que la CEI s'assure de l'exactitude du contenu technique de ses publications; la CEI ne peut pas être tenue responsable de l'éventuelle mauvaise utilisation ou interprétation qui en est faite par un quelconque utilisateur final.
4) Dans le but d'encourager l'uniformité internationale, les Comités nationaux de la CEI s'engagent, dans toute la mesure possible, à appliquer de façon transparente les Publications de la CEI dans leurs publications nationales et régionales. Toutes divergences entre toutes Publications de la CEI et toutes publications nationales ou régionales correspondantes doivent être indiquées en termes clairs dans ces dernières.
5) La CEI elle-même ne fournit aucune attestation de conformité. Des organismes de certification indépendants fournissent des services d'évaluation de conformité et, dans certains secteurs, accèdent aux marques de conformité de la CEI. La CEI n'est responsable d'aucun des services effectués par les organismes de certification indépendants.
6) Tous les utilisateurs doivent s'assurer qu'ils sont en possession de la dernière édition de cette publication.
7) Aucune responsabilité ne doit être imputée à la CEI, à ses administrateurs, employés, auxiliaires ou mandataires, y compris ses experts particuliers et les membres de ses comités d'études et des Comités nationaux de la CEI, pour tout préjudice causé en cas de dommages corporels et matériels, ou de tout autre dommage de quelque nature que ce soit, directe ou indirecte, ou pour supporter les coûts (y compris les frais de justice) et les dépenses découlant de la publication ou de l'utilisation de cette Publication de la CEI ou de toute autre Publication de la CEI, ou au crédit qui lui est accordé.
8) L'attention est attirée sur les références normatives citées dans cette publication. L'utilisation de publications référencées est obligatoire pour une application correcte de la présente publication.
9) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Publication de la CEI peuvent faire l'objet de droits de brevet. La CEI ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de brevets et de ne pas avoir signalé leur existence.

La Norme internationale CEI 61710 a été établie par le comité d'études 56 de la CEI: Sûreté de fonctionnement.

Cette deuxième édition annule et remplace la première édition parue en 2000. Cette édition constitue une révision technique.

Les modifications principales par rapport à l'édition précédente sont les suivantes:

– Introduction d'une Annexe supplémentaire C traitant de l'estimation bayésienne pour le modèle de loi en puissance.

Le texte de cette norme est issu des documents suivants:

FDIS	Rapport de vote
56/1500/FDIS	56/1508/RVD

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette norme.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/CEI, Partie 2.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant la date de stabilité indiquée sur le site web de la CEI sous "http://webstore.iec.ch" dans les données relatives à la publication recherchée. A cette date, la publication sera

- reconduite,
- supprimée,
- remplacée par une édition révisée, ou
- amendée.

IMPORTANT – Le logo *"colour inside"* qui se trouve sur la page de couverture de cette publication indique qu'elle contient des couleurs qui sont considérées comme utiles à une bonne compréhension de son contenu. Les utilisateurs devraient, par conséquent, imprimer cette publication en utilisant une imprimante couleur.

INTRODUCTION

La présente Norme internationale décrit le modèle de loi en puissance et donne des indications étape par étape pour son utilisation. Il existe différents modèles pour décrire la fiabilité des entités réparables, le modèle de loi en puissance étant l'un des plus largement utilisés. La présente norme fournit des procédures pour l'estimation des paramètres du modèle en puissance, pour vérifier l'adéquation du modèle de loi en puissance avec les données, pour déterminer les intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance et les intervalles de prédiction pour les durées jusqu'aux défaillances futures. Comme donnée de départ, il est exigé de fournir les temps d'essai auxquels les défaillances à prendre en compte se sont produites ou ont été observées pour une entité réparable ou plusieurs exemplaires de la même entité ainsi que le temps de fin de l'observation de l'entité s'il est différent de celui de la dernière défaillance. Tous les résultats obtenus correspondent au type d'entité considéré.

Quelques-unes de ces procédures peuvent nécessiter des programmes informatiques mais elles ne sont pas excessivement complexes. Cette norme présente des algorithmes à partir desquels des programmes informatiques pourront facilement être conçus.

MODÈLE DE LOI EN PUISSANCE – ESSAIS D'ADÉQUATION ET MÉTHODES D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES

1 Domaine d'application

La présente Norme internationale spécifie les procédures pour l'estimation des paramètres du modèle de loi en puissance en fournissant les intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance, les intervalles de prédiction pour les défaillances futures et pour déterminer l'adéquation du modèle de loi en puissance avec les données relatives aux entités réparables. L’hypothèse prise est que les données de durées avant défaillance ont été collectées à partir d’une ou de plusieurs entités identiques fonctionnant dans les mêmes conditions (par exemple d’environnement et de charge).

2 Références normatives

Les documents suivants sont cités en référence de manière normative, en intégralité ou en partie, dans le présent document et sont indispensables pour son application. Pour les références datées, seule l’édition citée s’applique. Pour les références non datées, la dernière édition du document de référence s’applique (y compris les éventuels amendements).

CEI 60050-191:1990, *Vocabulaire Electrotechnique International (VEI) – Chapitre 191: Sûreté de fonctionnement et qualité de service*

3 Termes et définitions

Pour les besoins du présent document, les termes et définitions de la CEI 60050-191 s'appliquent.

4 Symboles et abréviations

Les symboles et abréviations suivants s'appliquent.

β	paramètre de forme du modèle de loi en puissance
$\hat{\beta}$	paramètre de forme estimé du modèle de loi en puissance
β_{LB}, β_{UB}	limites de confiance inférieure, supérieure pour β
C^2	statistique de l’essai d'adéquation de Cramer-von-Mises
$C^2_{1-\gamma}(M)$	valeur critique pour la statistique de l’essai d'adéquation de Cramer-von-Mises au niveau γ de signification
χ^2	statistique de l’essai d'adéquation de khi-deux
$\chi^2_\gamma(\upsilon)$	fractile γ de la distribution du χ^2 avec υ degrés de liberté
d	nombre d'intervalles pour les groupes de défaillances
$E[N(t)]$	espérance mathématique du nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps t

$E[t_j]$	espérance mathématique du temps cumulé jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance
$\hat{E}[N[t(i)]]$	espérance mathématique estimée du nombre cumulé de défaillances jusqu'à l'instant $t(i)$
$\hat{E}[t_j]$	espérance mathématique estimée du temps cumulé jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance
$F_\gamma(\nu_1,\nu_2)$	fractile γ pour la distribution F avec (ν_1,ν_2) degrés de liberté
i	indice à usage général
j	indice à usage général
k	nombre d'entités
L, U	multiplicateurs utilisés dans le calcul des intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance
λ	paramètre d'échelle du modèle de loi en puissance
$\hat{\lambda}$	paramètre d'échelle estimé du modèle de loi en puissance
M	paramètre de l'essai statistique de Cramer-von-Mises
N	nombre de défaillances à prendre en compte
N_j	nombre de défaillances pour la $j^{\text{ième}}$ entité
$N(t)$	nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps t
$N[t(i)]$	nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps $t(i)$
R	différence entre le rang de la défaillance future (prévue) et le rang de la dernière défaillance (observée)
T	temps cumulé à prendre en compte
T^*	temps total cumulé à prendre en compte pour un essai censuré par le temps
T_j	temps total cumulé à prendre en compte pour la $j^{\text{ième}}$ entité
T_{RL}, T_{RU}	limites inférieure, supérieure pour le temps jusqu'à la $R^{\text{ième}}$ défaillance future
$\hat{T}_{N+1}$	temps médian estimé jusqu'à la $(N+1)^{\text{ième}}$ défaillance
t_i	temps cumulé à prendre en compte pour la $i^{\text{ième}}$ défaillance
t_{ij}	temps de défaillance $i^{\text{ième}}$ pour la $j^{\text{ième}}$ entité
t_N	temps total cumulé à prendre en compte pour un essai censuré par une défaillance
t_{Nj}	temps total cumulé à prendre en compte jusqu'à la $N^{\text{ième}}$ défaillance de la $j^{\text{ième}}$ entité
$t(i-1), t(i)$	points extrêmes du $i^{\text{ième}}$ intervalle de temps pour les défaillances groupées
$z(t)$	intensité de défaillance à l'instant t
$\hat{z}(t)$	intensité de défaillance estimée à l'instant t
z_{LB}, z_{UB}	limites de confiance inférieure, supérieure pour l'intensité de défaillance

5 Modèle de loi en puissance

Les procédures statistiques pour le modèle de loi en puissance utilisent les données de défaillance et les données temporelles à prendre en compte issues des essais ou du retour d'expérience. Les équations de base pour le modèle de loi en puissance sont données dans cet article. Des informations complémentaires sur ce modèle sont données à l'Annexe A et des exemples de leur application à l'Annexe B.

L'espérance mathématique du nombre cumulé de défaillances jusqu'au temps d'essai t est donnée par:

$$E[N(t)] = \lambda t^{\beta} \text{ avec } \lambda > 0, \beta > 0, t > 0$$

où

λ est le paramètre d'échelle;

β est le paramètre de forme ($0 < \beta < 1$ correspond à une intensité de défaillance décroissante; $\beta = 1$ correspond à une intensité de défaillance constante; $\beta > 1$ correspond à une intensité de défaillance croissante).

L'intensité de défaillance à l'instant t est donnée par:

$$z(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda \beta t^{\beta - 1} \text{ avec } t > 0$$

Ainsi les paramètres λ et β ont tous les deux une influence sur l'intensité de défaillance à un moment donné.

Des méthodes sont données en 7.2 pour obtenir les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres λ et β. Le paragraphe 7.3 donne les essais d'adéquation pour le modèle, 7.4 et 7.5 donnent les procédures pour les intervalles de confiance. Le paragraphe 7.6 donne les procédures pour les intervalles de prédiction et 7.7 les essais pour l'égalité des paramètres de forme. Le modèle est simple à évaluer. Cependant, lorsque $\beta < 1$, théoriquement $z(0) = \infty$ (c'est-à-dire que $z(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers zéro) et $z(\infty) = 0$ (c'est-à-dire $z(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini); mais cette limitation théorique n'affecte généralement pas son utilisation pratique.

6 Exigences relatives aux données

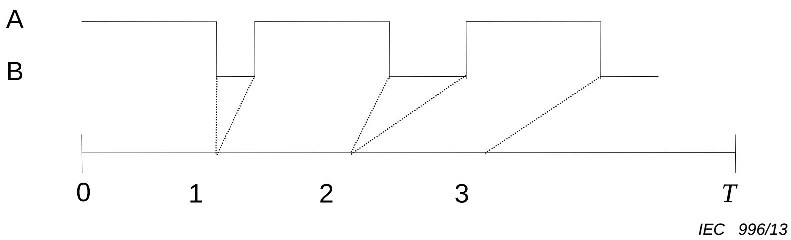
6.1 Généralités

6.1.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour un ou plusieurs exemplaires de la même population

Les méthodes normales d'évaluation supposent que les temps observés correspondent exactement aux temps de défaillance d'une entité unique réparable ou d'un ensemble d'exemplaires d'une même entité réparable. Les figures ci-dessous illustrent comment les temps de défaillance sont calculés pour trois cas généraux.

6.1.2 Cas 1a) – Une entité réparable

Pour une entité réparable observée du temps 0 au temps T, le temps de défaillance à prendre en compte, t_i, est le temps de fonctionnement qui s'est écoulé (c'est-à-dire sans les temps de réparation et autres temps à l'arrêt) jusqu'à l'apparition de la $i^{\text{ième}}$ défaillance (voir Figure 1).



Légende

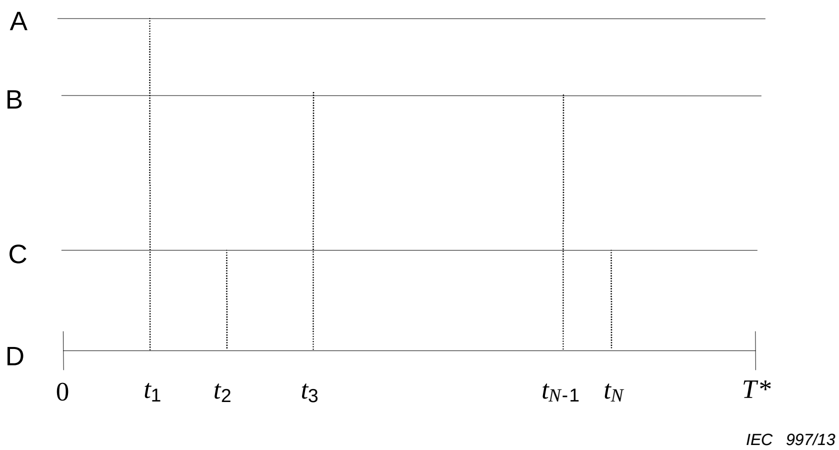
A temps de fonctionnement, B temps d'arrêt

Figure 1 – Une entité réparable

Les données censurées par le temps sont observées jusqu'à T^*, qui n'est pas un instant de défaillance et les données censurées par une défaillance sont observées jusqu'à t_N, qui est l'instant de la $N^{\text{ième}}$ défaillance. Les données censurées par le temps et celles censurées par une défaillance utilisent des formules légèrement différentes.

6.1.3 Cas 1b) – Entités multiples du même type d'entité réparable observées pendant la même durée

On suppose qu'il y a k entités qui représentent toutes la même population. Cela signifie qu'elles sont nominalement des entités identiques fonctionnant dans les mêmes conditions (par exemple, environnement et charge). Lorsque toutes les entités sont observées jusqu'à l'instant T^*, qui n'est pas un instant de défaillance (c'est-à-dire des données censurées par le temps), alors les données de temps de défaillance sont combinées en superposant les temps de défaillance $(t_i, i = 1, 2..., N)$ pour toutes les entités k sur la même ligne temporelle (voir Figure 2).



Légende

A entité 1

B entité 2

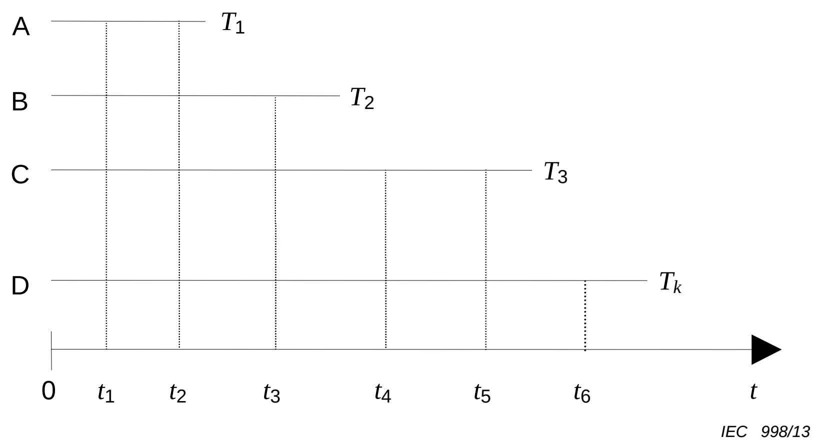
C entité k

D processus superposé

Figure 2 – Entités multiples du même type d'entité réparable observées pendant la même durée

6.1.4 Cas 1c) – Entités réparables multiples du même type observées pendant des durées différentes

Lorsque toutes les entités ne fonctionnent pas pendant la même durée, on note le moment auquel l'observation de la $j^{\text{ième}}$ entité s'est terminée $T_j\left(j = 1, 2, ..., k\right)$, où $T_1 < T_2 < ... < T_k$ est noté. Les données relatives aux défaillances sont combinées en superposant tous les moments de défaillance pour tous les k entités sur la même ligne temporelle (voir Figure 3). Les temps jusqu'à la défaillance sont $t_i, i = 1, 2, ..., N$, où N est égal au nombre total de défaillances observé en cumulé sur les k entités .



Légende

A entité 1

B entité 2

C entité 3

D entité *k*

t temps

Figure 3 – Entités réparables multiples du même type observées pendant des durées différentes

Lorsque chaque entité est un système informatique, il convient que la réparation soit effectuée sur les autres systèmes qui ne sont pas défaillants à cet instant.

6.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte pour une ou plusieurs entités réparables de la même population

Cette méthode alternative est utilisée lorsqu'il y a au moins un exemplaire d'une entité et que les données sont constituées par des intervalles de temps connus, chacun contenant un nombre connu de défaillances.

La période d'observation s'étend sur l'intervalle $(0, T)$ et elle est partagée en d intervalles aux moments $0 < t(1) < t(2) < ... < t(d)$. Le $i^{\text{ème}}$ intervalle est la période qui s'étend entre $t(i-1)$ et $t(i)$, où $i = 1, 2, ..., d,\ t(0) = 0 \ \ et \ \ t(d) = T$. Il est important de noter que les longueurs des intervalles et le nombre de défaillances par intervalle peuvent ne pas être les mêmes.

6.3 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour plus d'une entité réparable de populations différentes

On suppose qu'il existe k entités qui ne représentent pas la même population et qu’il est nécessaire de comparer. Il convient de noter que si chaque entité est considérée de manière individuelle alors il est approprié d'utiliser le cas 1a) décrit en 6.1.2.

Lorsqu’il est nécessaire que des comparaisons directes des entités soient effectuées, la notation suivante est utilisée en plus de celle de 6.1:

t_{ij} indique le $i^{\text{ème}}$ instant de défaillance pour le processus correspondant à la $j^{\text{ème}}$ entité;

N_j indique le nombre de défaillances observées pour la $j^{\text{ième}}$ entité;

t_{N_j} est l'instant de la $N^{\text{ième}}$ défaillance pour la $j^{\text{ième}}$ entité;

où i = 0, 1, 2, … N_j et j = 1, 2, …k.

7 Estimation statistique et procédures d'essai

7.1 Généralités

Dans le cas 1 – données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte – les formules indiquées pour les données censurées par une défaillance partent de l'hypothèse qu'il y a une entité réparable, c'est-à-dire $k=1$. Tous les résultats obtenus correspondent à cette entité. Les formules précisées pour les données censurées par le temps partent de l'hypothèse qu'on observe k copies de l'entité sur la même durée. S'il n'existe qu'une entité réparable, alors $k=1$. Les procédures d'estimation par point pour tous les cas mentionnés ci-dessus sont données en 7.2.1. Les procédures appropriées dans le cas où tous les exemplaires sont observés pour différentes durées sont données en 7.2.2. Les procédures pour le cas de données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte sont données en 7.2.3.

Un essai d'adéquation approprié, comme décrit en 7.3, doit être effectué après les procédures d'estimation des paramètres de 7.2. Noter que ces essais et les procédures données de 7.4 à 7.7 pour la détermination des estimations d'intervalle et pour la réalisation des essais statistiques, font une distinction seulement entre les cas des données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte (c'est-à-dire toutes les instances des données du cas 1 – 1a), 1b) et 1c)) et les données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte (c'est-à-dire le cas 2).

Les procédures d'inférence qui suivent fournissent des estimations approchées dans certaines circonstances et il est nécessaire de prendre des précautions si elles doivent être appliquées et que le nombre de défaillances observées est inférieur à 10.

7.2 Estimation ponctuelle

7.2.1 Cas 1a) et 1b) – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Cette méthode s'applique seulement lorsque les instants de défaillance ont été consignés pour chaque défaillance comme cela est décrit en 6.1.2 et 6.1.3.

Étape 1: Calculer les sommes:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{T^*}{t_j}\right) \qquad \textit{(essai censuré par le temps)}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{N} \ln\left(\frac{t_N}{t_j}\right) \qquad \textit{(essai censuré par une défaillance)}$$

Étape 2: Calculer l'estimation (non biaisée) du paramètre de forme β à partir de la formule:

$$\hat{\beta} = \frac{N-1}{S_1} \qquad \textit{(essai censuré par le temps)}$$

$$\hat{\beta} = \frac{N-2}{S_2} \qquad \textit{(essai censuré par une défaillance)}$$

Étape 3: Calculer l'estimation du paramètre d'échelle λ à partir de la formule:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k\left(T^*\right)^{\hat{\beta}}} \qquad \textit{(essai censuré par le temps)}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k\left(t_N\right)^{\hat{\beta}}} \qquad \textit{(essai censuré par une défaillance)}$$

Étape 4: Calculer l'estimation de l'intensité de défaillance $z(t)$, pour tout instant $t > 0$, à partir de la formule:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}$$

$\hat{z}(t)$ estime l'intensité de défaillance à l'instant t pris dans la plage représentée par les données. Des estimations "extrapolées" pour un temps futur t peuvent être obtenues de manière similaire, mais il convient d'utiliser cette méthode avec les précautions habituelles associées à l'extrapolation.

Étape 5: Soit N défaillances observées dont la dernière est intervenue à t_N, le temps médian jusqu'à la $(N+1)^{\text{ième}}$ défaillance peut être estimé par la formule:

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp\left[\frac{0{,}5^{\frac{-1}{N+1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-1)}\right] \qquad \textit{(essai censuré par le temps)}$$

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp\left[\frac{0{,}5^{\frac{-1}{N+1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-2)}\right] \qquad \textit{(essai censuré par une défaillance)}$$

7.2.2 Cas 1c) – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Cette méthode s'applique seulement lorsque le temps de défaillance a été consigné pour chaque défaillance comme cela est décrit en 6.1.4.

Étape 1: Rassembler les données en temps jusqu'à la défaillance, t_i, $i=1,2,..,N$, où N est le nombre total de défaillances sur k copies et T_j, $j=1,2,...,k$, est la fin de la période d'observation pour la $j^{\text{ième}}$ copie.

Étape 2: L'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de forme β est la valeur de $\hat{\beta}$ qui satisfait à la formule:

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{N} \ln t_i - \frac{N \sum_{j=1}^{k} T_j^{\hat{\beta}} \ln T_j}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\hat{\beta}}} = 0$$

Une méthode itérative doit être utilisée pour résoudre la formule pour $\hat{\beta}$.

Étape 3: Calculer l'estimation du paramètre d'échelle λ à partir de la formule:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{j=1}^{k} T_j^{\hat{\beta}}}$$

Étape 4: Calculer l'estimation de l'intensité de défaillance $z(t)$, pour tout temps $t > 0$, à partir de la formule:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\,t^{\hat{\beta}-1}$$

$\hat{z}(t)$ donne une estimation de l'intensité de défaillance à l'instant t pris dans la plage représentée par les données. Des estimations "extrapolées" pour un temps futur t peuvent être obtenues de manière similaire, mais il convient de les utiliser avec les précautions habituelles associées à l'extrapolation.

7.2.3 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes de défaillances à prendre en compte

Cette méthode s'applique lorsque l'ensemble des données se compose d'intervalles de temps connus, chacun contenant un nombre connu de défaillances, comme cela est décrit en 6.2.

Étape 1: Rassembler dans un fichier de données le nombre de défaillances N_i à prendre en compte enregistrées dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle $[t(i-1), t(i)],\ i = 1, 2, ..., d$. Le nombre total de défaillances à prendre en compte est :

$$N = \sum_{i=1}^{d} N_i$$

Étape 2: L'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de forme β est la valeur de $\hat{\beta}$ qui satisfait à la formule:

$$\sum_{i=1}^{d} N_i \left[\frac{[t(i)]^{\hat{\beta}} \ln t(i) - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln t(i-1)}{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}} - \ln t(d) \right] = 0$$

Noter que $[t(0)]^{\hat{\beta}} = 0$ et $[t(0)]^{\hat{\beta}} \ln t(0) = 0$. Tous les termes *t(.)* peuvent être normalisés par rapport à $t(d)$ et alors le terme final $\ln\left[t(d)\right]$ disparaît. Une méthode itérative doit être utilisée pour résoudre la formule pour $\hat{\beta}$.

Étape 3: Calculer l'estimation du paramètre d'échelle λ à partir de la formule:

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{t(d)^{\hat{\beta}}}$$

Étape 4: Calculer l'estimation de l'intensité de défaillance $z(t)$, pour tout temps d'essai $t > 0$, à partir de la formule:

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda}\,\hat{\beta}\, t^{\hat{\beta}-1}$$

$\hat{z}(t)$ estime l'intensité de défaillance à l'instant t pris dans la plage représentée par les données. Des estimations "extrapolées" pour un temps futur t peuvent être obtenues de manière similaire, mais il convient d'utiliser cette méthode avec les précautions habituelles associées à l'extrapolation.

7.3 Essais d'adéquation

7.3.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

7.3.1.1 Essai de Cramer-von-Mises

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer la statistique d'adéquation de Cramer-von-Mises donnée par la formule:

$$C^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{j=1}^{M}\left[\left(\frac{t_j}{T}\right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{2j-1}{2M}\right)\right]^2$$

où

$M = N$ et $T = T^*$ (*essai censuré par le temps*)

$M = N - 1$ et $T = t_N$ (*essai censuré par une défaillance*)

Étape 3: Choisir la valeur critique $C^2_{0,90}(M)$ pour l'essai de Cramer-von-Mises correspondant à M dans le Tableau 1, qui donne les valeurs critiques avec un niveau de signification de 10 %.

Étape 4: si:

$$C^2 > C^2_{0,90}(M)$$

on ne peut alors pas accepter l'hypothèse selon laquelle le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate. Sinon, en fonction des données analysées, le modèle de loi en puissance peut être utilisé comme hypothèse de travail.

7.3.1.2 Procédure graphique

Lorsque les instants de défaillance sont connus, la procédure graphique décrite ci-dessous peut être utilisée pour obtenir des informations complémentaires concernant la correspondance entre le modèle et les données. Le procédé consiste à représenter l'espérance mathématique du temps jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance, $E(t_j)$, en fonction du temps observé jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance. D'autres détails concernant l'approche sont donnés dans les Annexes A et B.

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 et $\hat{\lambda}$ à partir de l'étape 3 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer un estimateur de l'espérance mathématique du temps jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance, $j=1,2,..,N$, à partir de la formule:

$$\hat{E}(t_j) = \left(\frac{j}{\hat{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

Étape 3: Représenter $\hat{E}(t_j)$ en fonction de t_j sur des échelles linéaires identiques. La vérification visuelle de la disposition de ces points sur une ligne à 45 ° passant par l'origine est une mesure subjective de l'applicabilité du modèle.

7.3.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes des défaillances à prendre en compte

7.3.2.1 Essai de Khi-deux

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.3 et $\hat{\lambda}$ à partir de l'étape 3 de 7.2.3.

Étape 2: Calculer l'espérance mathématique du nombre de défaillances dans l'intervalle de temps $[t(i-1), t(i)]$ qui est donnée, en valeur approchée par:

$$e_i = \hat{\lambda}\left\{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}\right\}$$

Étape 3: Pour chaque intervalle, e_i ne doit pas être inférieur à 5, et si nécessaire, il convient de combiner les intervalles adjacents avant l'essai. Pour d intervalles (après combinaison si nécessaire) et avec N_i identique à 7.2.3, calculer la statistique:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{d} \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i}$$

Étape 4: Choisir la valeur critique d'une distribution χ^2 à $(d-2)$ degrés de liberté et un niveau de signification de 10 % dans le Tableau 2, c'est-à-dire $\chi^2_{0,90}(d-2)$.

Étape 5: Si la statistique de l'essai χ^2 dépasse la valeur critique $\chi^2_{0,90}(d-2)$ alors on ne peut pas accepter l'hypothèse selon laquelle le modèle en puissance décrit les données de manière adéquate. Sinon, en fonction des données analysées, le modèle de loi en puissance peut être utilisé comme hypothèse de travail.

L'essai de Khi-deux est un essai par échantillonnage étendu et il est donc nécessaire de disposer d'ensembles de données importants pour détecter les déviations du modèle de loi en puissance qui ont une importance pratique.

7.3.2.2 Procédure graphique

Lorsque les données sont constituées d'intervalles de temps connus, chacun contenant un nombre connu de défaillances, la procédure graphique décrite ci-dessous peut être utilisée pour obtenir des informations complémentaires sur la correspondance entre le modèle et les données. Le procédé consiste à représenter l'espérance mathématique du nombre de défaillances en fonction du nombre de défaillances observé à chaque point final. D'autres détails de cette approche sont donnés à B.5.

Étape 1: Pour chaque point final $t(i)$, calculer le nombre de défaillances observé de 0 à $t(i)$ à partir de la formule:

$$N[t(i)] = \sum_{j=1}^{i} N_j$$

Étape 2: Calculer un estimateur de l'espérance mathématique $E[N[t(i)]]$ du nombre de défaillances correspondant à partir de la formule:

$$\hat{E}[N[t(i)]] = \hat{\lambda} t(i)^{\hat{\beta}}$$

Étape 3: Représenter $\hat{E}[N[t(i)]]$ en fonction de $N[t(i)]$ sur des échelles linéaires identiques. La vérification visuelle de la disposition de ces points sur une ligne à 45 ° passant par l'origine est une mesure subjective de l'applicabilité du modèle.

7.4 Intervalles de confiance pour le paramètre de forme

7.4.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Dans le modèle de loi en puissance, le paramètre de forme β détermine si l'intensité de défaillance change dans le temps. Si $0<\beta<1$, il y a une intensité de défaillance décroissante; si $\beta=1$, il y a une intensité de défaillance constante; si $\beta>1$, il y a une intensité de défaillance croissante.

Afin de déterminer un intervalle de confiance bilatéral pour β lorsque les temps de défaillance individuels sont disponibles, suivre l'une des étapes ci-dessous, selon celle qui est appropriée pour les données censurées par le temps ou par une défaillance.

Intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β – Données censurées par le temps

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer:

$$D_L = \frac{\chi^2_{0,05}(2N)}{2(N-1)}$$

$$D_U = \frac{\chi^2_{0,95}(2N)}{2(N-1)}$$

où les fractiles de la distribution χ^2 sont donnés au Tableau 2.

Étape 3: Calculer la limite inférieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

et la limite supérieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Étape 4: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est donné par (β_{LB}, β_{UB}).

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour β sont β_{LB} et β_{UB}, respectivement.

Intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β – Données censurées par une défaillance

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer:

$$D_L = \frac{\chi^2_{0,05}(2(N-1))}{2(N-2)}$$

$$D_U = \frac{\chi^2_{0,95}(2(N-1))}{2(N-2)}$$

où les fractiles de la distribution χ^2 sont donnés au Tableau 2.

Étape 3: Calculer la limite inférieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

et la limite supérieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}$$

Étape 4: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est donné par (β_{LB}, β_{UB}).

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour β sont β_{LB} et β_{UB}, respectivement.

7.4.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes des défaillances à prendre en compte

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.3.

Étape 2: Calculer:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2, \ldots, d$$

Étape 3: Calculer l'expression:

$$A = \sum_{i=1}^{d} \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]}$$

Étape 4: Calculer:

$$C = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Étape 5: Pour un intervalle de confiance bilatéral approximatif de 90 % pour β, calculer:

$$S = \frac{1{,}64C}{\sqrt{N}}$$

où N est le nombre total de défaillances.

Étape 6: Calculer la limite inférieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{LB} = \hat{\beta}(1 - S)$$

et la limite supérieure de confiance pour β à partir de la formule:

$$\beta_{UB} = \hat{\beta}(1 + S)$$

Étape 7: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est donné par (β_{LB}, β_{UB}).

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour β sont β_{LB} et β_{UB}, respectivement.

7.5 Intervalles de confiance pour l'intensité de défaillance

7.5.1 Cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Étape 1: Calculer $\hat{z}(t)$ à partir de l'étape 4 de 7.2.1 ou de l'étape 4 de 7.2.2.

Étape 2: Pour un intervalle de confiance bilatéral à 90 %, se référer au Tableau 3 (*essai censuré par le temps*) et au Tableau 4 (*essai censuré par une défaillance*) et repérer les valeurs de L et U pour la taille d'échantillon appropriée N.

Étape 3: Calculer la limite inférieure de confiance pour $z(t)$ à partir de la formule:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{U}$$

et la limite supérieure de confiance pour $z(t)$ à partir de la formule:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{L}$$

Étape 4: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour $z(t)$ est donné par (z_{LB}, z_{UB}).

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour $z(t)$ sont z_{LB} et z_{UB}, respectivement.

7.5.2 Cas 2 – Données temporelles pour les groupes des défaillances à prendre en compte

Étape 1: Calculer $\hat{z}(t)$ à partir de l'étape 4 de 7.2.3.

Étape 2: Calculer:

$$P(i) = \frac{t(i)}{t(d)} \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2, \ldots, d$$

Étape 3: Calculer:

$$A = \sum_{i=1}^{d} \frac{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln[P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]^2}{\left[[P(i)]^{\hat{\beta}} - [P(i-1)]^{\hat{\beta}} \right]}$$

Étape 4: Calculer:

$$D = \sqrt{\frac{1}{A} + 1}$$

Étape 5: Pour un intervalle de confiance bilatéral approximatif de 90 % pour $z(t)$ calculer:

$$S = \frac{1{,}64D}{\sqrt{N}}$$

où N est le nombre cumulé de défaillances à prendre en compte.

Étape 6: La limite inférieure de confiance pour $z(t)$ est donnée par:

$$z_{LB} = \frac{\hat{z}(t)}{1+S}$$

et la limite supérieure de confiance pour $z(t)$ est donnée par:

$$z_{UB} = \frac{\hat{z}(t)}{1-S}$$

Étape 7: L'intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour $z(t)$ est donné par (z_{LB}, z_{UB}).

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour $z(t)$ sont z_{LB} et z_{UB}, respectivement.

7.6 Intervalles de prédiction pour les durées jusqu'aux défaillances futures d'une entité unique

7.6.1 Intervalle de prédiction pour les durées jusqu'à la prochaine défaillance pour le cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Pour un intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour le temps jusqu'à la $(N+1)^{\text{ième}}$ défaillance T_{N+1}, c'est-à-dire la prochaine défaillance, si N défaillances sont intervenues aux temps $t_1, t_2, \ldots, t_N$, suivre les étapes ci-dessous pour les données censurées par le temps et les données censurées par une défaillance.

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer la limite inférieure de prédiction pour T_{N+1} à partir de la formule:

$$T_{1L} = t_N \exp\left[\frac{0{,}95^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-1)}\right]$$ *(données censurées par le temps)*

$$T_{1L} = t_N \exp\left[\frac{0{,}95^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-2)}\right]$$ *(données censurées par une défaillance)*

et la limite supérieure de prédiction pour T_{N+1} à partir de la formule:

$$T_{1U} = t_N \exp\left[\frac{0{,}05^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-1)}\right]$$ *(données censurées par le temps)*

$$T_{1U} = t_N \exp\left[\frac{0{,}05^{\frac{-1}{N-1}} - 1}{N\hat{\beta}/(N-2)}\right]$$ *(données censurées par une défaillance)*

Étape 3: L'intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour T_{N+1} est donné par (T_{1L}, T_{1U}).

NOTE Les limites inférieure et supérieure unilatérales à 95 % pour T_{N+1} sont T_{1L} et T_{1U}, respectivement.

7.6.2 Intervalle de prédiction pour les durées jusqu'à la $R^{ième}$ défaillance future pour le cas 1 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte

Pour un intervalle de prédiction bilatéral approximatif à 90 % pour le temps jusqu'à la $(N+R)^{\text{ième}}$ défaillance T_{N+R}, c'est-à-dire la $R^{ième}$ défaillance future, si N défaillances sont intervenues aux moments $t_1, t_2, ..., t_N$, suivre les étapes ci-dessous pour les données censurées par une défaillance et les données censurées par le temps.

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}$ à partir de l'étape 2 de 7.2.1 ou de l'étape 2 de 7.2.2.

Étape 2: Calculer:

$$G = \left[\frac{(N-0{,}5)(N+R-0{,}5)}{NR}\right] \ln\left[\frac{N+R-0{,}5}{N-0{,}5}\right]$$

Étape 3: Calculer:

$$V = 2NG \ln\left[\frac{N+R-0{,}5}{N-0{,}5}\right]$$

Étape 4: Calculer la limite inférieure de prédiction pour T_{N+R} à partir de la formule:

$$T_{RL} = t_N \exp\left[\frac{V}{2NG\hat{\beta} F_{0{,}95}(2(N-1), V')}\right] \quad \textit{(données censurées par le temps)}$$

$$T_{RL} = t_N \exp\left[\frac{V(N-2)}{2N(N-1)G\hat{\beta} F_{0{,}95}(2(N-1), V')}\right] \quad \textit{(données censurées par une défaillance)}$$

et la limite supérieure de prédiction pour T_{N+R} à partir de la formule:

$$T_{RU} = t_N \exp\left[\frac{VF_{0{,}95}(V', 2(N-1))}{2NG\hat{\beta}}\right] \quad \textit{(données censurées par le temps)}$$

$$T_{RU} = t_N \exp\left[\frac{V(N-2)F_{0{,}95}(V', 2(N-1))}{2N(N-1)G\hat{\beta}}\right] \quad \textit{(données censurées par une défaillance)}$$

où les fractiles de la distribution F sont donnés dans le Tableau 5 et V' est la valeur entière arrondie de V.

Étape 5: L'intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour T_{N+R} est donné par (T_{RL}, T_{RU}).

NOTE Les limites unilatérales inférieure et supérieure à 95 % pour T_{N+R} sont T_{RL} et T_{RU}, respectivement.

7.7 Essai d'égalité des paramètres de forme $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$

7.7.1 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour deux entités de populations différentes

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}_1$ pour l'entité 1 et $\hat{\beta}_2$ pour l'entité 2 à partir de l'étape 2 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \ln\left[\frac{t_{N_1}}{t_{i1}}\right]$$

et

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N_2-1} \ln\left[\frac{t_{N_2}}{t_{i2}}\right]$$

Étape 3: Calculer:

$$F = \frac{S_1(N_2-1)}{S_2(N_1-1)}$$

Étape 4: Si

$$\frac{1}{F_{0,95}(2(N_2-1),2(N_1-1))} < F < F_{0,95}(2(N_1-1),2(N_2-1))$$

où les fractiles de la distribution F sont donnés au Tableau 5, alors l'hypothèse nulle selon laquelle les valeurs β sont les mêmes ne peut pas être rejetée au niveau de signification de 10 %. Sinon, conclure que les paramètres de forme des modèles adaptés aux données pour les deux entités sont statistiquement différents.

7.7.2 Cas 3 – Données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour plus de deux entités de populations différentes

Étape 1: Calculer $\hat{\beta}_j$ pour l'entité j, j = 1,2,...,k à partir de l'étape 2 de 7.2.1.

Étape 2: Calculer:

$$S_j = \sum_{i=1}^{N_j-1} \ln\left[\frac{t_{N_j}}{t_{ij}}\right]$$

Étape 3: Calculer:

$N = \sum_{j=1}^{k} N_j$ où k indique le nombre d'entités du même type

Étape 4: Calculer:

$$W = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2(N_j - 1)} - \frac{1}{2(N-k)}\right]$$

Étape 5: Calculer:

$$Y = 2(N-k)\ln\left[\left(\frac{1}{N-k}\right)\sum_{j=1}^{k} S_j\right] - \sum_{j=1}^{k} 2(N_j - 1)\ln\left[\frac{S_j}{N_j - 1}\right]$$

Étape 6: Si

$$\frac{Y}{W} < \chi^2_{0,90}(k-1)$$

où les fractiles de la distribution χ^2 sont donnés au Tableau 2, alors l'hypothèse nulle selon laquelle les valeurs β sont les mêmes ne peut pas être rejetée au niveau de signification de 10 %. Sinon, conclure que les paramètres de forme des modèles adaptés aux entités différentes sont statistiquement différents.

Tableau 1 – Valeurs critiques pour l'essai d'adéquation de Cramer-von-Mises avec un niveau de signification de 10 %

M	**Valeur critique de la statistique** $C^2_{0,90}(M)$
3	0,154
4	0,155
5	0,160
6	0,162
7	0,165
8	0,165
9	0,167
10	0,167
11	0,169
12	0,169
13	0,169
14	0,169
15	0,169
16	0,171
17	0,171
18	0,171
19	0,171
20	0,172
30	0,172
≥60	0,173

NOTE 1 Pour les essais censurés par le temps, $M = N$.

NOTE 2 Pour les essais censurés par une défaillance, $M = N - 1$.

Tableau 2 – Fractiles de la distribution de Khi-deux

Degrés de liberté υ	$\chi^2_{0,05}(\upsilon)$	$\chi^2_{0,90}(\upsilon)$	$\chi^2_{0,95}(\upsilon)$
2	0,10	4,61	5,99
4	0,71	7,78	9,49
6	1,64	10,65	12,59
8	2,73	13,36	15,51
10	3,94	15,98	18,31
12	5,23	18,55	21,03
14	6,57	21,06	23,69
16	7,96	23,54	26,30
18	9,39	25,99	28,87
20	10,85	28,41	31,41
22	12,34	30,81	33,92
24	13,85	33,20	36,42
26	15,38	35,56	38,89
28	16,92	37,92	41,34
30	18,49	40,26	43,77
32	20,09	42,57	46,17
34	21,70	44,88	48,57
36	23,30	47,19	50,96
38	24,91	49,50	53,36
40	26,51	51,81	55,76
42	28,16	54,08	58,11
50	34,76	63,17	67,51
52	36,45	65,42	69,82
60	43,19	74,40	79,08
62	44,90	76,63	81,37
70	51,74	85,53	90,53
72	53,47	87,74	92,80
80	60,39	96,58	101,88
82	62,14	98,78	104,13
90	69,13	107,57	113,15
92	70,89	109,76	115,39
100	77,93	118,50	124,34
102	79,70	120,68	126,57
110	86,79	129,38	135,48
112	88,57	131,56	137,70
120	95,71	140,23	146,57
122	97,49	142,40	148,78
200	168,28	226,02	233,99
z_p	–1,64	+1,28	+1,64

NOTE 1 L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

NOTE 2 Pour des valeurs supérieures de υ utiliser $\chi^2_p = \left[\left(z_p + \sqrt{2\upsilon - 1}\right)^2\right]/2$ où z_p est le fractile correspondant de la loi normale réduite.

Tableau 3 – Multiplicateurs pour les intervalles de confiance bilatéraux à 90 % pour la fonction d'intensité dans le cas de données censurées par le temps

N	*L*	*U*		*N*	*L*	*U*
3	0,175	6,490		21	0,570	1,738
4	0,234	4,460		22	0,578	1,714
5	0,281	3,613		23	0,586	1,692
6	0,320	3,136		24	0,593	1,672
7	0,353	2,826		25	0,600	1,653
8	0,381	2,608		26	0,606	1,635
9	0,406	2,444		27	0,612	1,619
10	0,428	2,317		28	0,618	1,604
11	0,447	2,214		29	0,623	1,590
12	0,464	2,130		30	0,629	1,576
13	0,480	2,060		35	0,652	1,520
14	0,494	1,999		40	0,672	1,477
15	0,508	1,947		45	0,689	1,443
16	0,521	1,902		50	0,703	1,414
17	0,531	1,861		60	0,726	1,369
18	0,543	1,825		70	0,745	1,336
19	0,552	1,793		80	0,759	1,311
20	0,561	1,765		100	0,783	1,273

NOTE 1 Pour $N > 100$

$$L \cong \frac{N-1}{N}\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)^{-2}$$

$$U \cong \frac{N-1}{N}\left(1-1{,}64\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)^{-2}$$

NOTE 2 L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

Tableau 4 – Multiplicateurs pour les intervalles de confiance bilatéraux à 90 % pour la fonction d'intensité dans le cas de données censurées par une défaillance

N	*L*	*U*	*N*	*L*	*U*
3	0,1712	4,746	21	0,6018	1,701
4	0,2587	3,825	22	0,6091	1,680
5	0,3174	3,254	23	0,6160	1,659
6	0,3614	2,892	24	0,6225	1,641
7	0,3962	2,644	25	0,6286	1,623
8	0,4251	2,463	26	0,6344	1,608
9	0,4495	2,324	27	0,6400	1,592
10	0,4706	2,216	28	0,6452	1,578
11	0,4891	2,127	29	0,6503	1,566
12	0,5055	2,053	30	0,6551	1,553
13	0,5203	1,991	35	0,6763	1,501
14	0,5337	1,937	40	0,6937	1,461
15	0,5459	1,891	45	0,7085	1,428
16	0,5571	1,876	50	0,7212	1,401
17	0,5674	1,814	60	0,7422	1,360
18	0,5769	1,781	70	0,7587	1,327
19	0,5857	1,752	80	0,7723	1,303
20	0,5940	1,726	100	0,7938	1,267

NOTE 1 Pour $N > 100$

$$L \cong \frac{N-2}{N}\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^{-1}$$

$$U \cong \frac{N-2}{N}\left(1-1{,}64\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^{-1}$$

NOTE 2 L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

Tableau 5 – Fractiles 0,95 de la distribution F

$F_{0,95}(\nu_1\ \nu_2)$	ν_1										
ν_2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
2	19,00	19,20	19,30	19,40	19,40	19,40	19,50	19,50	19,50	19,50	19,50
4	6,94	6,39	6,16	6,04	5,96	5,80	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
6	5,14	4,53	4,28	4,15	4,06	3,87	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
8	4,46	3,84	3,58	3,44	3,35	3,15	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
10	4,10	3,48	3,22	3,07	2,98	2,77	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
12	3,89	3,26	3,00	2,85	2,75	2,54	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
14	3,74	3,11	2,85	2,70	2,60	2,39	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
16	3,63	3,01	2,74	2,59	2,49	2,28	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
18	3,55	2,93	2,66	2,51	2,41	2,19	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
20	3,49	2,87	2,60	2,45	2,35	2,12	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
30	3,32	2,69	2,42	2,27	2,16	1,93	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	3,23	2,61	2,34	2,18	2,08	1,84	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	3,15	2,53	2,25	2,10	1,99	1,75	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,07	2,45	2,18	2,02	1,91	1,66	1,55	1,49	1,43	1,35	1,25
∞	3,00	2,37	2,10	1,94	1,83	1,57	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

NOTE L'interpolation linéaire est suffisamment précise pour les valeurs intermédiaires.

Annexe A
(informative)

Modèle de loi en puissance – Informations connexes

Le modèle de loi en puissance est largement utilisé pour analyser la fiabilité des entités réparables. Il est particulièrement utile pour les entités classées ‘bad-as-old’ lorsque la réparation est minime et que par conséquent la fiabilité de l'entité reste en grande partie inchangée après défaillance et réparation. Il est également approprié pour les entités dont la fiabilité est susceptible de s'améliorer. En fait, le modèle de loi en puissance a été étudié pour la première fois par L. H. Crow[2][1] en 1974 pour décrire la loi en puissance de croissance présentée pour la première fois par J. T. Duane en 1964[5]. Les méthodes d'analyse de la croissance de fiabilité, sur la base du modèle de loi en puissance, sont données par la CEI 61164 [6].

Crow [2], a formulé le modèle probabiliste sous-jacent pour les défaillances comme un processus de Poisson non homogène (NHPP), $\{N(t), t > 0\}$, avec une valeur attendue de:

$$E[N(t)] = \lambda t^{\beta}$$

et l'intensité de défaillance est donnée par

$$z(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$$

Le modèle NHPP donne la probabilité de Poisson pour que $N(t)$ prenne une valeur particulière, c'est-à-dire:

$$\Pr[N(t) = n] = \frac{\left(\lambda t^{\beta}\right)^{n} e^{-\lambda t^{\beta}}}{n!} \qquad \text{avec } n = 0,1,2,...$$

Aussi, avec ce modèle

$$E\left[\lambda t_j^{\beta}\right] = j \qquad \text{avec } j = 1,2,...$$

où t_j est le temps cumulé jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance. Cela donne l'utile approximation de premier ordre

$$E\left[t_j\right] = \left(\frac{j}{\lambda}\right)^{1/\beta} \quad \text{avec } j = 1,2,...$$

pour l'espérance mathématique du temps jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ défaillance.

Lorsque $\beta = 1$, alors $z(t) = \lambda$ et les temps entre défaillances successives suivent une distribution exponentielle de moyenne $1/\lambda$ (Processus de Poisson homogène), indiquant une intensité de défaillance constante. La fonction d'intensité $z(t)$ est décroissante pour $\beta < 1$ (croissance de fiabilité) et croissante pour $\beta > 1$ (détérioration de fiabilité).

---

[1] Les chiffres entre crochets se réfèrent à la bibliographie.

Annexe B
(informative)

Exemples numériques

B.1 Informations connexes

Les exemples numériques suivants montrent l'utilisation des procédures présentées à l'Article 7. L'exemple 1 étudie les données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour une entité réparable unique lorsque l'observation est censurée par une défaillance. L'exemple 2 étudie les données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte pour des unités réparables multiples de la même entité lorsque l'observation est censurée par le temps. L'exemple 3 étudie les données temporelles pour chaque défaillance à prendre en compte de deux entités réparables de populations différentes. L'exemple 4 étudie les groupes de défaillances à prendre en compte pour une seule entité réparable. Tous les exemples illustrent l'utilisation des méthodes d'estimation appropriées. Les essais d'adéquation sont appliqués lorsque cela est pertinent. Ces exemples peuvent être utilisés pour valider les programmes informatiques conçus pour mettre en œuvre les méthodes de l'Article 7.

Noter que tous les calculs des exemples ont été effectués en utilisant un tableur. Bien que les résultats soient donnés avec deux ou trois chiffres après la virgule, les calculs intermédiaires ont été effectués avec une précision double. Si des calculs intermédiaires sont effectués avec une précision inférieure, les résultats peuvent varier légèrement par rapport à ceux donnés, en raison des erreurs d'arrondi.

Il convient de noter également que tous les intervalles de confiance présentés sont à un niveau de confiance de 90 % et que de la même manière tous les essais statistiques sont conduits avec un niveau de signification de 10 %. Cela correspond aux valeurs données dans les Tableaux 1 à 5. Cependant si les valeurs appropriées sont prises dans des tableaux similaires provenant d'autres sources, ou sont obtenues de manière informatique, alors d'autres valeurs pour les niveaux de confiance et de signification peuvent être choisies en fonction des exigences des utilisateurs.

B.2 Exemple 1

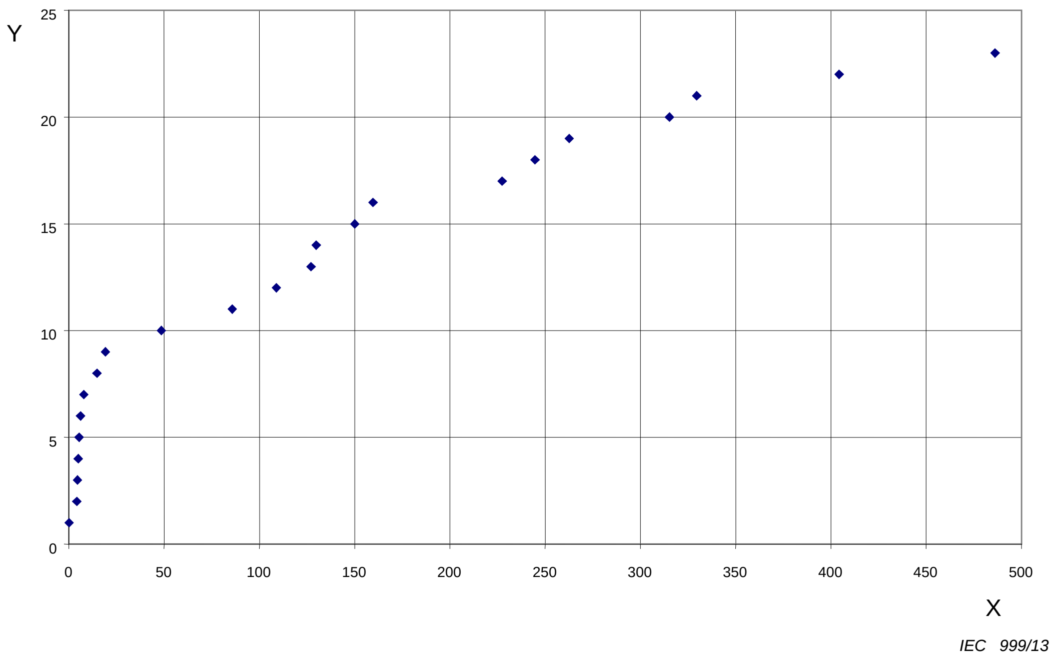
Les temps de défaillance successifs (en heures) d'un logiciel développé comme une partie d'un système important sont donnés dans le Tableau B.1.

Tableau B.1 – Temps de défaillances à prendre en compte cumulés pour les systèmes informatiques

0,2	4,2	4,5	5	5,4	6,1	7,9	14,8	19,2	48,6	85,8	108,9	127,2
129,8	150,1	159,7	227,4	244,7	262,7	315,3	329,6	404,3	486,2			
NOTE $t_N = 486{,}2\,\text{h}$ $N = 23$.												

Représentation du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps

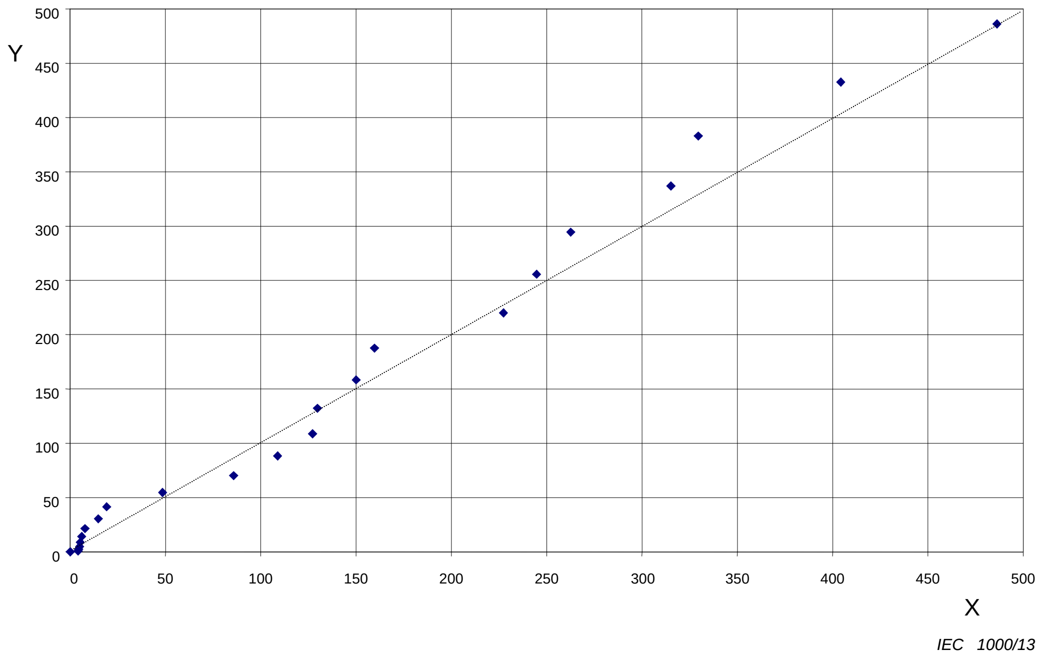
La forme concave de la Figure B.1 indique une intensité de défaillance décroissante.



Axe X temps cumulé (h)

Axe Y nombre cumulé de défaillances

Figure B.1 – Nombre cumulé de défaillances en fonction du temps cumulé pour les systèmes informatiques



Axe X temps cumulés observés jusqu'à défaillance

Axe Y temps cumulés attendu jusqu'à défaillance

Figure B.2 – Temps cumulés attendus en fonction des temps cumulés observés jusqu'à la défaillance pour les systèmes informatiques

Estimation des paramètres

D'après 7.2.1, les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont les suivants:

$$\hat{\lambda} = 2{,}17$$

$$\hat{\beta} = 0{,}38$$

Essai d'adéquation

D'après 7.3.1.2, la représentation des temps de fonctionnement cumulés attendus jusqu'à défaillance par rapport aux temps observés jusqu'à défaillance, à la Figure B.2, montre une répartition aléatoire autour de la ligne 45 ° indiquant une bonne adaptation du modèle de loi en puissance aux données. Le Tableau B.2 indique le mode d'obtention des temps de défaillance attendus et observés représentés à la Figure B.2 dans laquelle les temps de défaillance attendus sont calculés à partir de l'étape 2 de 7.3.1.2.

D'après 7.3.1.1, C^2 = 0,063 avec M = 22. A un niveau de signification de 10 %, la valeur critique du Tableau 1 est 0,172. Comme 0,063 $<$0,172, on peut en conclure que l'hypothèse que le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate ne peut pas être rejetée.

Tableau B.2 – Calcul des temps attendus et cumulés de défaillance pour la Figure B.2

Défaillances	**Temps de défaillance observé** (h)	**Temps de défaillance attendu** (h)
1	0,2	0,130
2	4,2	0,803
3	4,5	2,326
4	5,0	4,946
5	5,4	8,881
6	6,1	14,326
7	7,9	21,465
8	14,8	30,468
9	19,2	41,496
10	48,6	54,705
11	85,8	70,242
12	108,9	88,250
13	127,2	108,866
14	129,8	132,224
15	150,1	158,454
16	159,7	187,681
17	227,4	220,028
18	244,7	255,617
19	262,7	294,564
20	315,3	336,983
21	329,6	382,989
22	404,3	432,692
23	486,2	486,200

Intervalle de confiance pour β

D'après 7.4.1, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est (0,27; 0,55). Comme toutes les valeurs de cet intervalle sont inférieures à un, il indique une intensité de défaillance décroissante.

Intervalle de confiance pour l'intensité de défaillance

D'après 7.5.1, un intervalle bilatéral de confiance à 90 % pour l'intensité de défaillance à t = 450 h est: (0,011; 0,031) défaillances/h.

Intervalle de prédiction pour le temps jusqu'aux défaillances futures

D'après 7.6.1, un intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour la durée de fonctionnement jusqu'à la 24^{ième} défaillance est (488,93; 690,30) h. D'après 7.6.2, un intervalle de prédiction bilatéral à 90 % pour la durée de fonctionnement jusqu'à la 25^{ième} défaillance est: (504,68; 845,30) h.

B.3 Exemple 2

Cinq copies d'un système ont été mises en fonctionnement au même moment dans des conditions identiques. Lorsqu'un système a connu une défaillance, il a été réparé immédiatement et il a été remis en fonctionnement. Le temps de réparation est insignifiant par rapport au temps de fonctionnement. Chaque copie du système a été observée pendant 1 850 h de fonctionnement. Les temps cumulés jusqu'à la défaillance sont donnés dans le Tableau B.3.

Tableau B.3 – Temps cumulés pour toutes les défaillances à prendre en compte pour cinq copies d'un système (désignées par A, B, C, D, E)

A	B	C	D	E
96	552	1 056	1 560	
1 224	1 225			
1 392	1 570			

Les données à analyser sont composées par la superposition des temps de fonctionnement jusqu'à défaillance qui sont présentés au Tableau B.4, c'est-à-dire que les temps cumulés pour tous les systèmes sont combinés en un seul jeu de données et présentés dans leur ordre d'apparition du plus court au plus long.

Tableau B.4 – Temps cumulés combinés pour des entités multiples de même type d'un système

Défaillance	Temps cumulés h
1	96
2	552
3	1 056
4	1 224
5	1 225
6	1 392
7	1 560
8	1 570

Représentation du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps

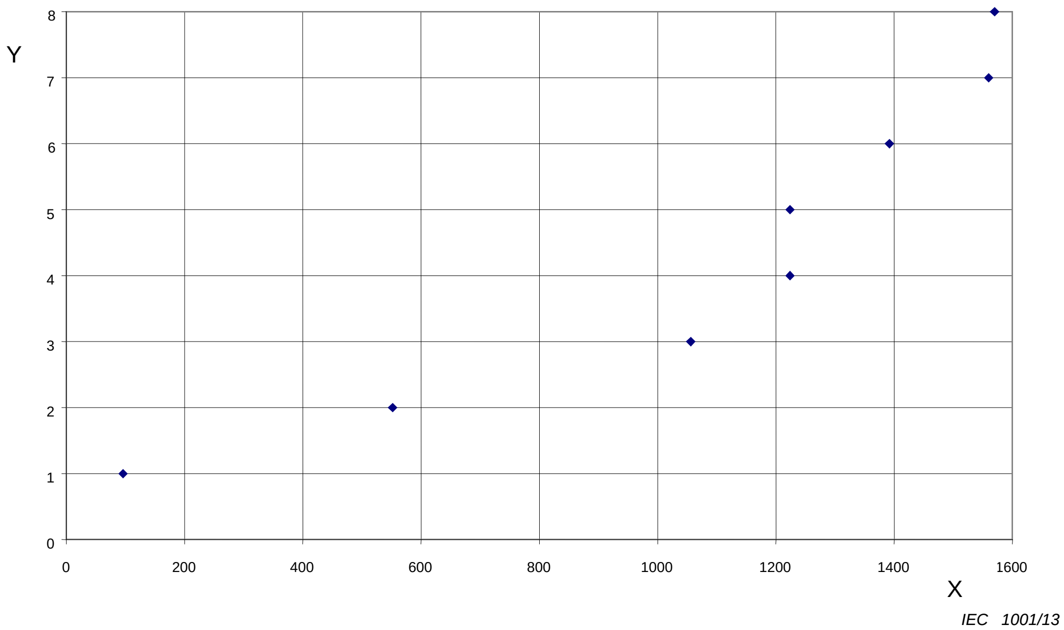
La forme concave de la Figure B.3 indique une possible intensité de défaillance croissante.

Estimation des paramètres

D'après 7.2.1, les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont les suivants:

$$\hat{\lambda} = 3{,}16 \times 10^{-4}$$

$$\hat{\beta} = 1{,}13$$



Axe X temps cumulés de défaillance (h)

Axe Y nombre cumulé de défaillances

Figure B.3 – Nombre cumulé de défaillances en fonction du temps cumulé pour cinq copies d'un système

Essai d'adéquation

D'après 7.3.1.1, C^2 = 0,115 avec M = 8. A un niveau de signification de 10 %, la valeur critique du Tableau 1 est 0,165. Etant donné que 0,115 < 0,165, on peut en conclure que l'hypothèse que le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate ne peut pas être rejetée. Ce résultat va à l'encontre de l'impression subjective indiquée ci-dessus. Cela implique que huit défaillances ne sont pas suffisantes pour éliminer l'hypothèse du modèle de loi en puissance. De plus, il convient que les intervalles de confiance indiqués ci-dessous, qui sont calculés sur la base du modèle soient interprétés avec les précautions habituelles pour un ensemble de données aussi réduit.

Intervalle de confiance pour β

D'après 7.4.1, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est (0,64; 2,13). Comme cet intervalle contient la valeur 1, on peut en conclure qu'il n'y a pas de preuve statistique pour suggérer que l'intensité de défaillance n'est pas constante.

Intervalle de confiance pour l'intensité de défaillance

D'après 7.5.1, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour l'intensité de défaillance à t = 1 000 h est ($3,46\times10^{-4}$; $23,70\times10^{-4}$) défaillances/h.

B.4 Exemple 3

Un fabricant a soumis à des essais un produit OEM (fabricant d'équipement d'origine) de deux vendeurs potentiels, désignés A et B. Après chaque défaillance, les unités ont été immédiatement réparées et renvoyées en essai. Les temps cumulés jusqu'à la défaillance sont donnés dans le Tableau B.5.

Tableau B.5 – Heures de fonctionnement cumulées jusqu'à la défaillance pour un produit OEM des vendeurs A et B

Heures de fonctionnement cumulées jusqu'à la défaillance (Vendeur A)	Heures de fonctionnement cumulées jusqu'à la défaillance (Vendeur B)
600	400
1 100	650
1 500	900
1 750	1 100
2 000	1 500
2 500	2 100
3 100	2 700
3 500	
3 800	
4 500	
NOTE $t_N = 4\,500\,\text{h},\ N = 10$.	NOTE $t_N = 2\,700\,\text{h},\ N = 7$.

Représentation du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps

Les tracés de la Figure B.4 indiquent que l'intensité de défaillance des deux produits apparaît constante bien que B ait une intensité de défaillance légèrement plus élevée que A.

Estimation des paramètres

D'après 7.2.1, les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont pour A

$$\hat{\lambda} = 1{,}53 \times 10^{-3}$$

$$\hat{\beta} = 1{,}04$$

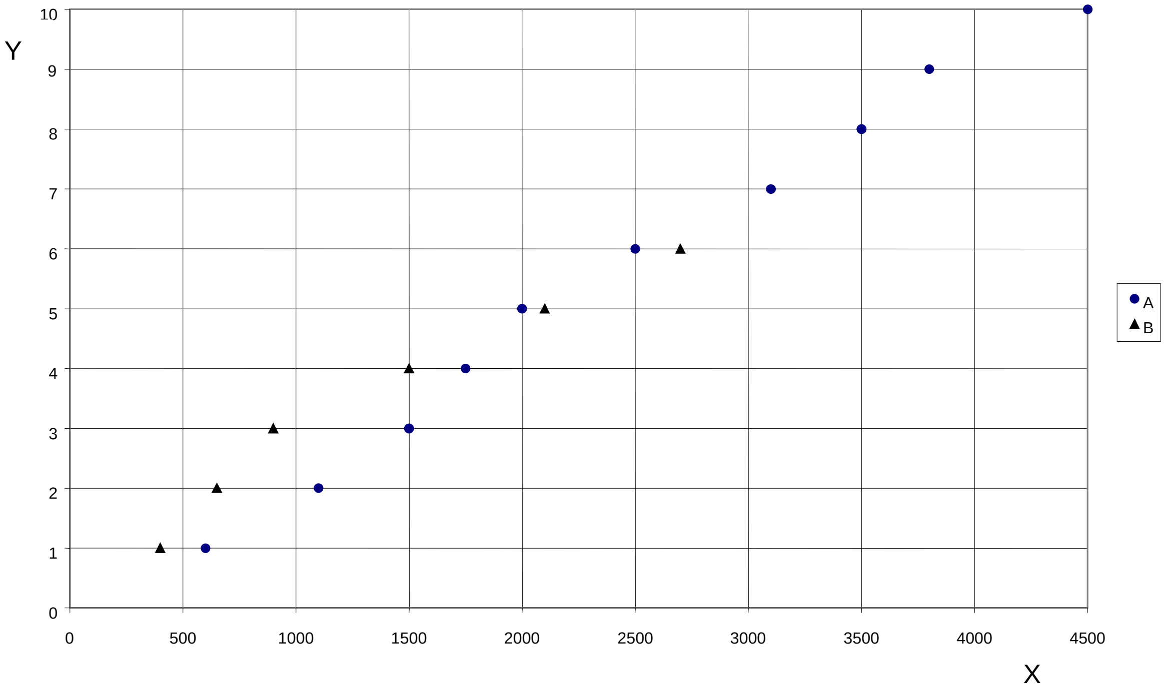
et les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont pour B

$$\hat{\lambda} = 11{,}59 \times 10^{-3}$$

$$\hat{\beta} = 0{,}81$$

Essai d'adéquation

D'après 7.3.1.1, pour A, C^2 = 0,047 avec M = 9. A un niveau de signification de 10 %, la valeur critique du Tableau 1 est de 0,167. Comme 0,047 $<$ 0,167, on peut en conclure que le modèle de loi en puissance présente une bonne adéquation aux données. Pour B, C^2 = 0,072 avec M = 6. A un niveau de signification de 10 %, la valeur critique du Tableau 1 est 0,162. Comme 0,072 $<$ 0,162, on peut en conclure que l'hypothèse que le modèle de loi en puissance décrit les données de manière adéquate ne peut pas être rejetée.



IEC 1002/13

Axe X temps cumulé (h)

Axe Y nombre cumulé de défaillances

Figure B.4 – Nombre cumulé de défaillances en fonction du temps cumulé pour un produit OEM des vendeurs A et B

Intervalle de confiance pour β

D'après 7.4.1, pour A, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est (0,61; 1,88) et pour B, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est (0,42; 1,70). Comme les deux intervalles contiennent la valeur 1, on en conclut qu'il n'y a pas de preuve statistique pour suggérer que les deux intensités de défaillance ne sont pas constantes. Comme ces intervalles se chevauchent, il n'y a pas de preuve pour suggérer une différence entre les intensités de défaillance constantes des deux vendeurs.

Intervalle de confiance pour l'intensité de défaillance

D'après 7.5.1, pour A, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour l'intensité de défaillance à t = 2 500 h est (1,02 × 10^{-3}; 4,80 × 10^{-3}) défaillances/h. Pour B, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour l'intensité de défaillance à t = 2 500 h est (0,81 × 10^{-3}; 5,38 × 10^{-3}) défaillances/h. Depuis les intervalles, il n'est pas aisé de suggérer une différence entre la constante de défaut de deux vendeurs.

Essai de l'équivalence des paramètres de forme

D'après 7.7.1 F = 0,83 et d'après le Tableau 5, $1/F_{0,95}(12{,}18) = 0{,}43$ et $F_{0,95}(18{,}12) = 2{,}58$. Comme 0,43 $<$ 0,83 $<$ 2,58, on peut en conclure qu'il n'y a pas de différence statistique entre les paramètres de forme pour les deux vendeurs à un niveau de signification de 10 %.

B.5 Exemple 4

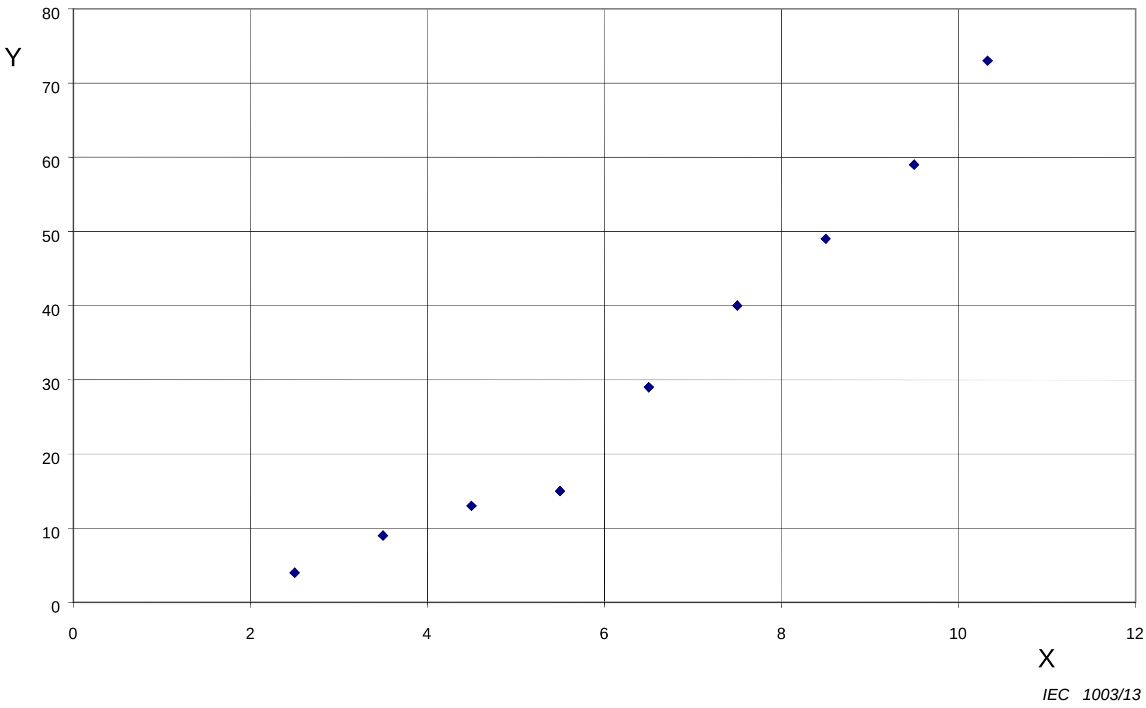
Les nombres de défaillances de générateurs sur un navire sont donnés dans le Tableau B.6. Les données de défaillance ont été enregistrées sur neuf intervalles, donc d = 9-1=8.

Tableau B.6 – Données de défaillances groupées pour les générateurs

Temps de fonctionnement cumulé à prendre en compte à la fin d'un intervalle de groupe (années)	**Nombre de défaillances**	**Nombre cumulé de défaillances**
0,0	0	0
2,5	4	4
3,5	5	9
4,5	4	13
5,5	2	15
6,5	14	29
7,5	11	40
8,5	9	49
9,5	10	59
10,33	14	73

Représentation du nombre cumulé de défaillances en fonction du temps

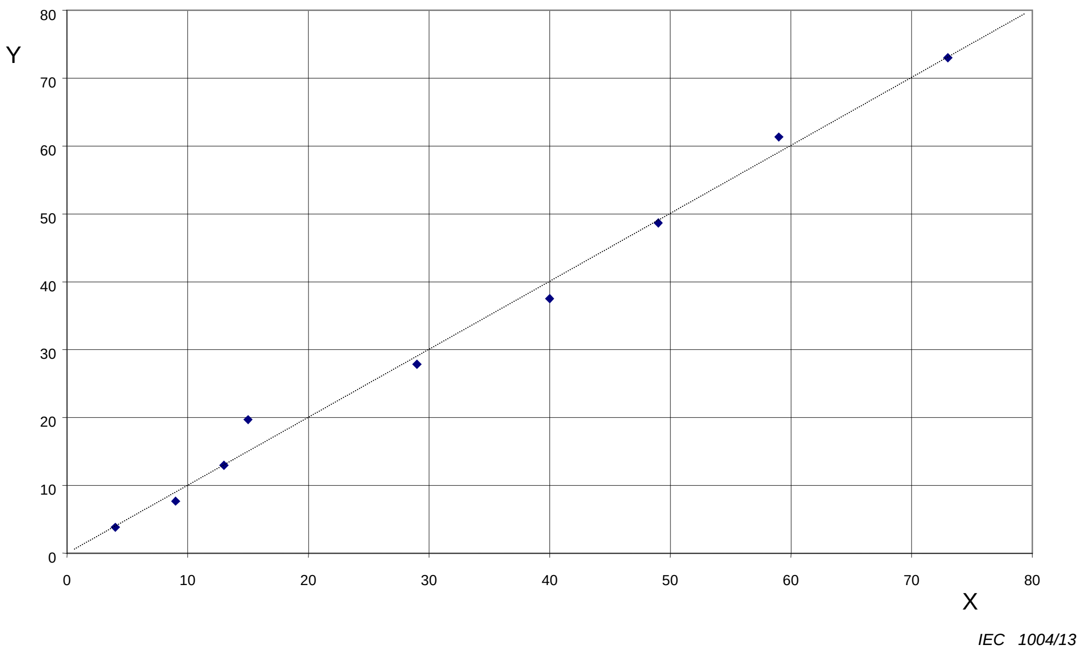
La forme concave de la Figure B.5 indique une intensité de défaillance croissante.



Axe X temps cumulé (années)

Axe Y nombre cumulé de défaillances

Figure B.5 – Nombre cumulé de défaillances en fonction du temps pour les générateurs



Axe X nombre cumulé observé de défaillances

Axe Y nombre cumulé attendu de défaillances

Figure B.6 – Nombre cumulé de défaillances en fonction du nombre de défaillances observées pour les générateurs

Estimation des paramètres

D'après 7.2.3, les paramètres estimés du modèle de loi en puissance sont les suivants:

$$\hat{\lambda} = 0{,}57$$

$$\hat{\beta} = 2{,}08$$

Essai d'adéquation

D'après 7.3.2.2, la représentation du nombre cumulé de défaillances attendues en fonction du nombre de défaillances observées à la Figure B.6 présente une dispersion aléatoire autour de la ligne à 45 ° indiquant une bonne adéquation du modèle de loi en puissance aux données. Le Tableau B.7 indique le mode d'obtention des nombres de défaillances attendus et observés représentés à la Figure B.6. Les nombres attendus de défaillances sont calculés à partir de l'étape 2 de 7.3.2.2

Tableau B.7 – Calcul des nombres attendus de défaillances pour la Figure B.6

Temps de fonctionnement cumulé correspondant à la fin de l'intervalle du groupe (ans)	**Nombre de défaillances cumulées observées**	**Nombre de défaillances cumulées attendues**
2,5	4	4,52
3,5	9	7,04
4,5	13	12,12
5,5	15	18,7
6,5	29	26,83
7,5	40	36,55
8,5	49	47,91
9,5	59	60,92
10,33	73	73,00

D'après 7.3.2.1, la statistique d'essai est $\chi^2 = 9{,}13$. La valeur critique du Tableau 2 est $\chi^2_{0{,}90}(6) = 10{,}65$. Comme la statistique de l'essai est inférieure à la valeur critique, on peut en conclure que le modèle de loi en puissance présente une bonne adéquation aux données à un niveau de signification de 10 %.

Intervalle de confiance pour β

D'après 7.4.2, un intervalle de confiance bilatéral à 90 % pour β est (1,67; 2,49). Comme toutes les valeurs de cet intervalle sont supérieures à 1, il indique une intensité de défaillance croissante.

Estimation de l'intensité de défaillance

D'après 7.5.2, à t = 11 années, l'intensité de défaillance est estimée à 15,74 défaillances/ an et un intervalle de confiance à 90 % est de (12,34; 21,74) défaillances/an.

Annexe C
(informative)

Estimation bayésienne pour le modèle de loi en puissance

C.1 Informations connexes

Les méthodes rapportées dans le corps principal de la présente norme sont fondées sur une approche classique de l'estimation statistique. Cela signifie que les paramètres du modèle de loi en puissance, λ et β, sont supposés être fixes mais inconnus, et qu'une méthode classique telle que la vraisemblance maximale est utilisée pour estimer les valeurs des deux paramètres, en utilisant les données observées pour les temps cumulés de défaillance d'une entité réparable.

L'estimation bayésienne représente une approche alternative. L'approche bayésienne traite les paramètres du modèle de loi en puissance, λ et β, comme des variables aléatoires non observées. Ceci influence les étapes du processus d'estimation. L'approche bayésienne d'estimation du processus de loi en puissance peut être résumée par les étapes suivantes:

a) choix d'une loi de probabilité afin de refléter l'état des connaissances de chacun des paramètres, λ et β, avant tout recueil de données. Ceci est appelé distribution antérieure;
b) recueil des données observées pour les temps cumulés de défaillance pour l'entité réparable concernée;
c) estimation des paramètres du modèle de loi en puissance d'après la distribution postérieure, qui est calculée à l'aide du théorème de Bayes et reflète ce que l'on sait des paramètres après l'observation des données.

La distribution postérieure est proportionnelle au produit des suppositions préalables à propos des paramètres et de ce que l'on appelle la fonction de vraisemblance, qui représente la probabilité que les données d'intervalle de défaillance observées soient générées à partir du modèle de loi en puissance supposé. Le postérieur peut être exprimé de manière générale comme suit:

$$\textit{postérieur} \propto \textit{vraisemblance} \times \textit{antérieur}$$

Le Tableau C.1 résume les forces et les faiblesses reconnues de l'estimation bayésienne par rapport à l'estimation classique. Le problème principal de l'estimation bayésienne concerne le choix de l'antérieur. Étant donné que l'antérieur influence les valeurs estimées obtenues, il faut que la justification de la formation de l'antérieur soit claire et il est nécessaire d'assurer qu'il est spécifié avant l'observation des données, afin de préserver l'intégrité de l'analyse. Dans le cas contraire, il existe un risque sérieux que l'antérieur puisse être manipulé dans le but de produire les estimations souhaitées, même si elles ne sont pas cohérentes avec les données observées. Il est recommandé qu'un analyste indépendant conçoive et mette en œuvre un processus approprié de saisie et de spécification de la distribution antérieure avec l'aide des ingénieurs experts concernés, avec la même rigueur appliquée au recueil des données de défaillance observées d'après les essais ou sur site.

La forme mathématique du postérieur est liée à la fonction de distribution choisie pour l'antérieur et elle influence à son tour la complexité des calculs nécessaires pour obtenir les estimations. Dans l'estimation classique, il n'y a qu'un seul estimateur de maximum de vraisemblance et une seule procédure de calcul est donc nécessaire pour estimer un paramètre, comme indiqué dans le corps principal de la présente norme. Dans l'estimation bayésienne, on trouve différentes formules et différentes procédures de calcul selon la forme des distributions antérieure et postérieure. Un analyste est capable de donner des directives sur le choix du type de distribution antérieure permettant de prendre en charge une représentation crédible du jugement des ingénieurs en même temps que les calculs requis pour obtenir les paramètres. Il est possible qu'un logiciel de calcul soit nécessaire pour prendre en charge l'estimation bayésienne.

Tableau C.1 – Forces et faiblesses comparées de l'estimation classique et de l'estimation bayésienne

	Classique	Bayésienne
Forces	Bien connue et acceptée par l'industrie Considérée comme respectant l'objectivité des données	On peut inclure les connaissances existantes Disponibilité de la justification de la source des informations à prendre en compte pour construire l'antérieur
Faiblesses	On peut masquer les hypothèses Des spécimens de grande taille sont nécessaires pour obtenir de meilleures estimations	L'antérieur est subjectif, il existe donc un risque de sélection d'une distribution qui affectera les résultats de manière inappropriée Le calcul peut être complexe et en général ne peut pas être résolu de manière analytique

C.2 Estimation bayésienne pour le modèle de loi en puissance

Considérons un modèle de loi en puissance avec une intensité de défaillance donnée par:

$$z(t) = \lambda\beta t^{\beta-1}$$

Disons que $\mathrm{Pr}(\lambda,\beta)$ représente la probabilité antérieure pour les paramètres λ et β. Comme dans le corps principal de la présente norme, t_i représente le temps cumulé à prendre en compte jusqu'à la $i^{\text{ème}}$ défaillance d'une entité réparable, où $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Noter qu'il convient que t_i, i = 1,…N, ne soit observé qu'après que l'antérieur $\mathrm{Pr}(\lambda,\beta)$ a été spécifié. La distribution postérieure représente les informations sur les paramètres du modèle dépendant des données observées d'intervalle de défaillance. La distribution postérieure est indiquée par $\mathrm{Pr}(\lambda,\beta \,|\, t)$ où $\lambda,\beta \,|\, t$ indique la relation conditionnelle (indiquée par le symbole $|$) des paramètres, λ et β, avec les temps de défaillance, t_i, i = 1,…N. La distribution postérieure est donnée par:

$$\mathrm{Pr}(\lambda,\beta \,|\, t) = \frac{\mathrm{Pr}(\lambda,\beta)\, f(t \,|\, \lambda,\beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{Pr}(\lambda,\beta)\, f(t \,|\, \lambda,\beta)\, d\lambda\, d\beta}$$

où $f(t \,|\, \lambda,\beta)$ est la fonction de vraisemblance qui est donnée par la distribution de probabilité à plusieurs dimensions des variables aléatoires t_i, i = 1,…N, dépendantes des paramètres λ et β.

Disons que T représente le temps cumulé à prendre en compte d'une entité réparable. La fonction de vraisemblance du processus de loi en puissance est donc donnée par:

$$f(t \,|\, \lambda,\beta) = \lambda^N \beta^N \left(\prod_{i=1}^{N} t_i \right)^{\beta-1} e^{-\lambda T^\beta} \quad \text{(C.1)}$$

NOTE 1 Dans le cas de données censurées par une défaillance, T est égal à t_N.

Il convient que la forme de la distribution antérieure soit spécifiée de manière à représenter le schéma d'incertitude dans la valeur du paramètre concerné. La forme fonctionnelle de la distribution antérieure est généralement réalisée par l'analyste en fonction de la structure du problème et des informations disponibles auprès des ingénieurs experts, qui peuvent utiliser des données de systèmes similaires, des résultats d'essais et d'autres données pertinentes pour étayer leur jugement subjectif.

Il existe de nombreuses formes fonctionnelles différentes de la distribution antérieure; Rigdon et Basu [9] en donnent une revue. Il n'est pas approprié d'examiner dans la présente annexe toutes les distributions antérieures possibles. La présente annexe présente deux exemples pratiques illustrant deux approches possibles avec deux formes différentes de la distribution antérieure et des calculs d'estimation bayésiens du modèle de loi en puissance. Les détails de chaque étape de modélisation de ces deux exemples sont donnés dans le but de rendre transparentes les étapes du processus d'estimation bayésienne.

NOTE 2 Il convient de ne pas considérer les deux exemples donnés comme les seules formes de distribution antérieure pouvant être appropriées dans la pratique. De nombreuses formes de l'antérieur du modèle de loi en puissance donnent lieu à des calculs complexes nécessitant des logiciels ou gratuiciels spécialisés. Il convient de demander conseil à un analyste technique si nécessaire.

Il convient de spécifier entièrement la distribution antérieure avant d'observer de quelconques données, même si cette discontinuité dans la mise en œuvre des différentes étapes de l'analyse bayésienne peut être peu visible dans les exemples donnés.

C.3 Exemples numériques

C.3.1 Généralités

Les exemples numériques qui suivent montrent comment l'estimation bayésienne pour le processus de loi en puissance peut être mise en œuvre. Le code pour les calculs est écrit dans un logiciel informatique. Les calculs sont représentés avec quatre chiffres décimaux. Les deux exemples suivent un format commun qui commence par une description de l'arrière-plan du problème puis met en œuvre les trois étapes de l'estimation bayésienne décrites à l'Article C.1.

NOTE Les étapes de l'analyse sont représentées dans l'ordre dans lequel elles seraient mises en œuvre, bien qu'une spécification complète du modèle mathématique de la part de l'analyste constituerait une bonne pratique pour l'obtention de la distribution postérieure et de la procédure d'estimation lors de la sélection de la forme de l'antérieur.

C.3.2 Estimation bayésienne de la croissance de fiabilité pour un nouveau système au début du fonctionnement

Contexte du problème

Un nouveau système est entré en service et fonctionnera en continu. Au début du service, toutes les défaillances matérielles sont traitées par la mise en œuvre d'actions correctives appropriées. Des estimations des changements de l'intensité de défaillance sont requises pour évaluer la croissance de fiabilité. Le modèle de loi en puissance donne un modèle crédible pour ce problème puisqu'il peut saisir les changements de l'intensité de défaillance à mesure que l'expérience de fonctionnement s'accumule. L'ingénieur responsable du système possède des connaissances préalables d'après son expérience d'essais et de fonctionnement de systèmes similaires de la même famille de produits.

Étape 1 – Choix de la distribution antérieure

L'analyste prépare un processus de saisie des connaissances de l'ingénieur à propos des valeurs vraies des paramètres du modèle de loi en puissance au point d'entrée en service du système. L'analyste tient compte des formes mathématiques possibles de la distribution antérieure avant de mettre en œuvre un processus de représentation afin de préciser le jugement subjectif de l'ingénieur sur ses connaissances et sur l'incertitude dans les paramètres.

Dans ce cas, l'analyste décide de re-paramétrer le modèle de loi en puissance en termes de $\eta = \lambda T^{\beta}$ pour les raisons suivantes. Premièrement, le nouveau paramètre, η, représente le nombre attendu de défaillances par temps T qui devrait être plus significatif pour interpréter et étayer le mode d'obtention du jugement technique. Deuxièmement, ce re-paramétrage permet d'exprimer la probabilité sous la forme de deux fonctions indépendantes ce qui étaye le mode d'obtention du jugement technique structuré et facilite le calcul. La probabilité, précédemment donnée à la formule (C.1) peut être écrite comme suit:

$$f(t|\eta,\beta) = \prod_{i=1}^{N} t_i^{-1} \left[\beta^N e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i}} \right] \left[\eta^N e^{-\eta} \right] \tag{C.2}$$

où $\Pr(\beta) \sim Gamma \left(N+1, \sum_{i-1}^{N} ln \frac{T}{ti} \right)$ et $\Pr(\eta) \sim Gamma\ (N = 1{,}1)$

NOTE 1 $Gamma(a,b)$ indique une distribution Gamma avec des paramètres a et b, $\Pr(\beta)$ indique la loi de probabilité de β, et $\Pr(\eta)$ est la loi de probabilité de η.

L'analyste doit choisir une distribution pour représenter les connaissances a priori concernant les deux paramètres β et η. Dans les deux cas une distribution Gamma est choisie pour deux raisons. Premièrement, elle assure une fonction souple qui devrait capturer les tracés prévus avec l'incertitude dans les valeurs a priori des paramètres. Deuxièmement, la distribution Gamma donne une signification a priori dite conjuguée indiquant que les calculs pour obtenir les estimations a posteriori sont plus directs.

L'hypothèse de départ est que les paramètres β et η sont statistiquement indépendants et que l'incertitude de leurs valeurs vraies peut être représentée par les lois de probabilité a priori Gamma données par, respectivement:

$$\pi(\beta) \sim Gamma\ (a_\beta, b_\beta) \text{ et } \pi(\eta) \sim Gamma\ (a_\eta, b_\eta) \tag{C.3}$$

Il est possible d'obtenir les valeurs de ce qu'on appelle les hyperparamètres, $(a_\beta, b_\beta, a_\eta, b_\eta)$ et de vérifier que la distribution Gamma est appropriée pour la représentation du tracé avec l'incertitude autour de β et η par une obtention structurée du jugement technique. Ensuite il est possible de re-exprimer les distributions a priori selon les termes des paramètres d'origine du modèle de loi en puissance, λ et β comme résultat de la relation suivante:

$$\pi(\eta,\beta) = \pi(\eta)\pi(\beta) = \pi(\lambda \mid \beta)\pi(\beta) = \pi(\lambda,\beta) \tag{C.4}$$

où $\pi(\lambda) \sim Gamma\ (a_\eta, b_\eta T^{\beta})$ et la distribution a priori conjointe $\pi(\lambda,\beta)$ est conjuguée.

Une approche pour saisir l'incertitude dans β consiste à préparer une grille comme représenté au Tableau C.2a. On demande à l'ingénieur d'allouer 20 jetons valant 5 % chacun, aux différentes classes dans la grille, pour refléter la chance que la valeur du taux de croissance β se trouve dans une classe particulière. Le Tableau C.2b montre une grille complétée dans laquelle l'ingénieur a indiqué que l'incertitude de la vraie valeur de β se trouve comprise entre 0 et 0,6, la classe modale étant égale à 0,3 – 0,4.

NOTE 2 L'ingénieur est informé qu'il n'existe pas de réponse correcte à la question de la représentation et qu'il convient donc de donner une opinion honnête sur l'incertitude dans les valeurs possibles des paramètres.

NOTE 3 Le nombre de jetons et donc leur valeur, sont choisis afin de refléter le cloisonnement de la distribution antérieure. Par exemple, la distribution totale vaut 100 %, donc si elle est divisée en jetons de 5 %, 20 jetons sont requis. Si le pourcentage alloué est réduit (augmenté), le nombre de jetons augmente (diminue) respectivement.

NOTE 4 Dans cet exemple, les valeurs possibles du paramètre de forme sont pré-spécifiées sur la grille. Elles peuvent être laissées vierges si l'on pense qu'elles peuvent entraîner un accrochage avec les classes spécifiées par l'analyste.

Un processus similaire peut être utilisé pour représenter les valeurs possibles du nombre attendu de défaillances pour un temps spécifié T. Le Tableau C.3a représente une grille vierge pour le paramètre η. Tout d'abord, il est nécessaire que l'ingénieur expert détermine les classes significatives pour la plage de valeurs de η pour le cas où le système est en service depuis 2 ans et qu'il a dû cumuler 20 000 heures d'expérience opérationnelle, c'est-à-dire $T = 20\ 000\ \mathrm{h}$. Les jetons peuvent être alloués aux classes en fonction de l'opinion de l'expert que la vraie valeur puisse tomber dans chacune des classes de la grille. Le Tableau C.3b représente une grille complétée. L'expert pense que la vraie valeur du nombre attendu de défaillances pour 20 000 heures de fonctionnement peut se situer entre 10 000 et 100 000, la classe modale étant de 30 000 défaillances.

L'analyste doit convertir les distributions de fréquence subjectives représentées dans les grilles des Tableaux C.2 et C.3 en une distribution antérieure de probabilité paramétrique. Pour obtenir les distributions antérieures à plusieurs variables dans l'Equation (C.1), il est nécessaire que l'analyste adapte les distributions Gamma appropriées aux distributions subjectives obtenues de l'ingénieur expert. Des algorithmes adaptés à la distribution normalisée peuvent être utilisés pour trouver une distribution Gamma adaptée pour chacune des distributions subjectives pour β et λ. Une distribution Gamma avec les paramètres $a_\beta = 6,7956$ et $b_\beta = 1/0,0448 = 22,3214$ se trouve représenter la distribution subjective pour le paramètre de forme β. La meilleure adaptation pour la distribution subjective pour le paramètre représentant le nombre attendu de défaillances par rapport au temps $T = 20\ 000\ \mathrm{h}, \eta$, est une distribution Gamma avec les paramètres $a_\eta = 17,7566$ et $b_\eta = 1/1447,408 = 0,000691$.

Il convient d'entreprendre des vérifications de la crédibilité et de l'adaptation statistique de ces distributions Gamma. Les Figures C.1 et C.2 représentent les tracés des deux distributions Gamma et il convient de les montrer à l'ingénieur expert pour assurer que les caractéristiques de la fonction utilisée pour résumer les incertitudes exprimées sont acceptables. Lorsqu'elles ne le sont pas, il convient que l'analyste réexamine le processus d'ajustement pour assurer que la loi de probabilité choisie saisit bien les opinions subjectives de l'ingénieur.

NOTE 5 Ceci peut être réalisé en simulant différents résultats de l'essai (par exemple, aucune défaillance, peu de défaillances ou de nombreuses défaillances) et en présentant ces résultats à l'ingénieur expert.

Les Tableaux C.4 et C.5 représentent la comparaison entre les valeurs des probabilités Gamma ajustées et des probabilités subjectives obtenues. La correspondance est imparfaite car les distributions Gamma ajustées sous-estiment la classe modale de la distribution subjective en assurant une meilleure adaptation dans les queues de distribution. Mieux capturer les incertitudes de l'ingénieur dans les queues de distribution plutôt que faire correspondre le mode de distribution est une stratégie prudente de sélection d'un paramètre antérieur. L'on peut calculer des statistiques résumées, comme la moyenne de l'erreur absolue des probabilités ajustées par rapport aux probabilités subjectives ou l'écart-type de l'erreur. L'analyste est apte à utiliser ces résumés pour comparer les différentes distributions de probabilités et évaluer si l'erreur est acceptable. Dans le présent exemple, l'erreur absolue moyenne est de l'ordre de 0,05, ce qui est considéré comme tolérable.

Tableau C.2 – Grille de représentation de la distribution subjective pour le paramètre de forme β

Tableau C.2a – Grille vierge avant la représentation

Valeurs possibles de β	(0 – 0,2)	(0,2 – 0,3)	(0,3 – 0,4)	(0,4 – 0,6)	>0,6

Tableau C.2b – Grille complétée après la représentation

			●		
			●		
		●	●		
		●	●		
		●	●		
	●	●	●	●	
	●	●	●	●	
	●	●	●	●	
Valeurs possibles de β	(0 – 0,2)	(0,2 – 0,3)	(0,3 – 0,4)	(0,4 – 0,6)	>0,6

Tableau C.3 – Grille de représentation de la distribution subjective pour le nombre attendu de paramètres de défaillance η

Tableau C.3a – Grille vierge avant la représentation

Valeurs possibles de $\eta (\times 10^4)$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	5	8	$2\frac{1}{2}$

Tableau C.3b – Grille complétée après la représentation

					●			
					●			
				●	●			
			●	●	●	●		
		●	●	●	●	●		
		●	●	●	●	●	●	●
Valeurs possibles de $\eta (\times 10^4)$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	5	8	10

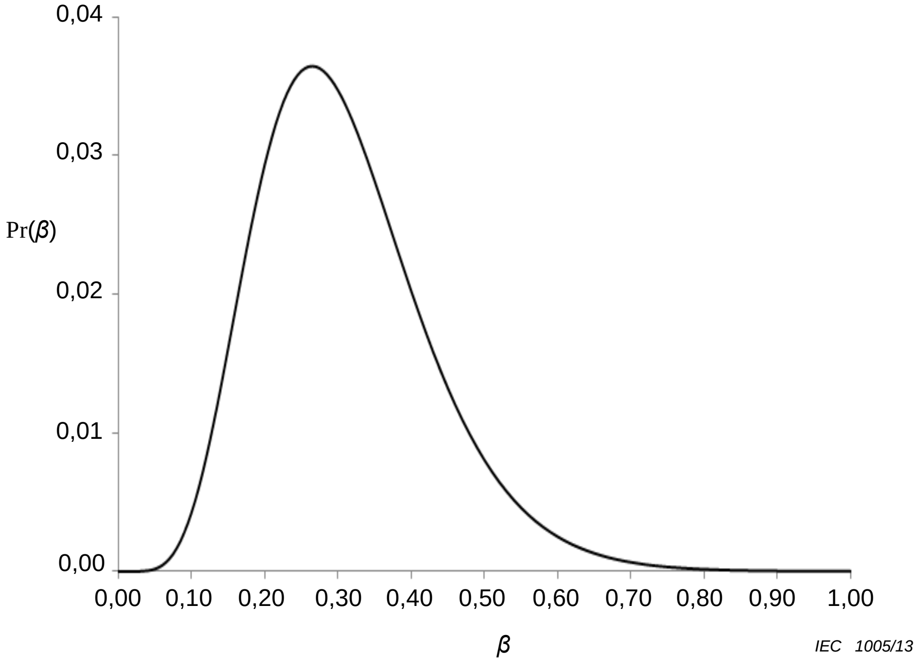


Figure C.1 – Tracé de la distribution Gamma antérieure ajustée (6,7956, 0,0448) pour le paramètre de forme du modèle de loi en puissance

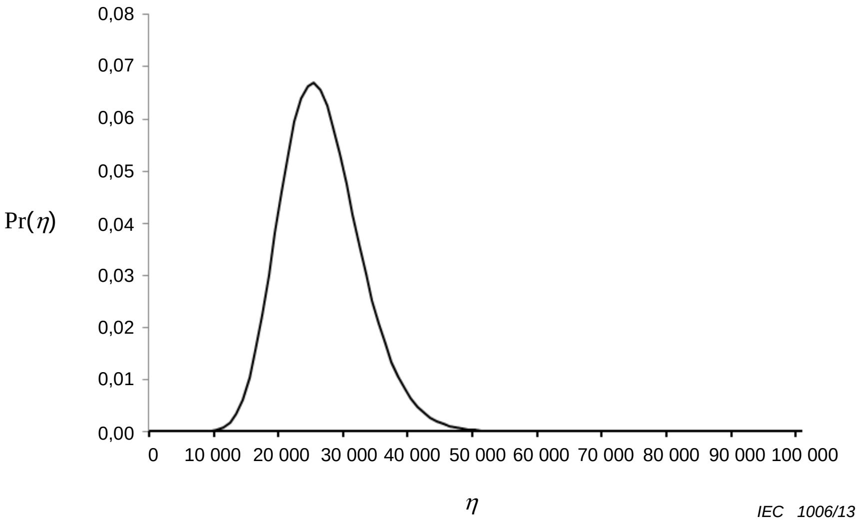


Figure C.2 – Tracé de la distribution Gamma antérieure ajustée (17,756 6, 1447,408) pour le nombre attendu de paramètres de défaillance du modèle de loi en puissance

Tableau C.4 – Comparaison des distributions Gamma ajustée et subjective pour le paramètre de forme β

Intervalle pour les valeurs possibles de β	Distribution de fréquences subjective	Distribution de probabilités subjective	Distribution de probabilités de Gamma ajustée (6,7956, 0,0448)	Erreur entre les probabilités de Gamma ajustée et subjective
0 – 0,2	3	0,15	0,1853	-0,0353
0,2 – 0,3	6	0,30	0,3488	-0,0488
0,3 – 0,4	8	0,40	0,2726	0,1274
0,4 – 0,6	3	0,15	0,1758	-0,0258
>0,6	0	0	0,0175	-0,0175
			Erreur absolue moyenne Écart-type de l'erreur	-0,0501 0,0722

Tableau C.5 – Comparaison des distributions Gamma ajustée et subjective pour le nombre attendu de défaillances par rapport au temps $T = 20\ 000\ \mathrm{h}$ paramètre η

Intervalle pour les valeurs possibles de η	Distribution de fréquences subjective	Distribution de probabilités subjective	Distribution de probabilités de Gamma ajustée (17,7566 , 1447,408)	Erreur entre les probabilités de Gamma ajustée et subjective
0 – 10000	2	0,10	0,0004	0,0996
10000 – 20000	3	0,15	0,1748	-0,0248
20000 – 25000	4	0,20	0,3103	-0,1102
25000 – 30000	6	0,30	0,2871	0,0129
30000 – 50000	3	0,15	0,2269	-0,0769
50000 – 80000	1	0,05	0,0006	0,0494
80000 – 100000	1	0,05	0	0,0500
			Erreur absolue moyenne Écart-type de l'erreur	0,06065 0,0749

Tableau C.6 – Temps par rapport aux données de défaillances rassemblées pendant l'essai du système

Description composant	Défaillances	Temps de fonctionnement cumulé par rapport aux défaillances h
A	4	34h 187 6h 111 43h 12 429h
B	2	10 910h 12 241h
C	1	1 719h
D	3	798h 163 4h 2 692h
E	1	156h
F	2	384h 1 078h
G	1	415h
H	2	11 785h 20 200h
I	5	1h 32h 2 878h 15 973h 18 840h
J	1	1h
K	1	1 235h
L	1	8 286h
M	2	862h 2 074h
N	5	158, 546h 2 828h 2 971h 12 961h
O	3	4 102h 6 523h 13 576h
P	1	15h 178h
Q	4	700h 1 647h 4 121h 12 464h
R	5	18h 45h 575h 611h 13 994h
S	8	5h 11h 226h 1 991h 3 089h 3 989h 5 589h 16 850h

Étape 2 – Données observées pour les temps cumulés jusqu'à la défaillance

Le Tableau C.6 représente les heures de fonctionnement cumulées jusqu'aux défaillances à prendre en compte pour chaque composant matériel du système pour lequel une action corrective a été mise en œuvre au cours des deux premières années de fonctionnement. Au cours du fonctionnement, le système a cumulé $T = 20\ 000$.

Étape 3 – Estimation bayésienne des paramètres à partir de la distribution postérieure

Les données observées peuvent être combinées avec la distribution antérieure pour générer la distribution postérieure à partir de laquelle les estimations bayésiennes des paramètres de loi en puissance peuvent être obtenues. Pour le modèle de loi en puissance avec la fonction de probabilité donnée par la formule (C.1) et la forme de distribution antérieure donnés dans la formule (C.4), la distribution postérieure est donnée par:

$$\Pr\left(\lambda, \beta | t\right) = Gamma\left(a_\beta + N, b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i}\right) \times Gamma\left(a_\eta + N, b_\eta + 1\right) \qquad \text{(C.5)}$$

À partir des données observées dans le Tableau C.6, ensuite $N = 52$ défaillances. La correspondance entre les paramètres estimés des distributions Gamma ajustées à la formule (C.5) donne les valeurs suivantes pour les paramètres des distributions a posteriori:

$$a_\beta + N = 6{,}7956 + 52 = 58{,}7956$$

$$b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i} = 22,2816 + 146,4683 = 168,7499$$

$$a_\eta + N = 17,7566 + 52 = 69,7566$$

$$b_\eta + 1 = 0,000691 + 1 = 1,000691$$

L'estimation bayésienne du paramètre de forme β est donnée par:

$$\hat{\beta} = \frac{a_\beta + N}{b_\beta + \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{T}{t_i}} = \frac{58.7956}{168,7499} = 0,3484 \qquad \text{(C.6)}$$

L'estimation bayésienne du paramètre de η est donnée par:

$$\hat{\eta} = \frac{a_\eta + N}{b_\eta + 1} = \frac{69,7566}{1,000691} = 69,7085$$

qui donne:

$$\hat{\lambda} = \frac{\eta}{T^\beta} = \frac{69,7085}{20\ 000^{0,3484}} = 2,2117 \qquad \text{(C.7)}$$

Remarques pour conclure

Le Tableau C.7 résume les estimations bayésienne et classique pour l'exemple présenté. Les calculs d'obtention des estimations classiques ne sont pas représentés mais ils utilisent les étapes indiquées dans le corps principal de la présente norme. Les deux estimations indiquent que l'intensité de défaillance du système diminue à mesure que l'expérience de fonctionnement est cumulée et qu'elle est cohérente avec la croissance de fiabilité. L'estimation bayésienne de la croissance est supérieure à l'estimation classique, car la distribution Gamma antérieure du paramètre de forme influence la valeur estimée conjointement aux observations.

Le choix de la forme fonctionnelle de l'antérieur, les méthodes utilisées pour obtenir et vérifier les probabilités subjectives et l'approche utilisée pour ajuster une distribution paramétrique par rapport aux probabilités subjectives sont importants, car ils influencent les estimations obtenues. Dans cet exemple, les informations de la distribution antérieure influencent l'estimation bayésienne du paramètre de forme. Il est nécessaire que la crédibilité pratique de toutes les hypothèses faites dans le cadre de l'analyse soit justifiable.

Tableau C.7 – Résumé des estimations des paramètres du modèle de loi en puissance

Paramètre	Estimation bayésienne	Estimation classique
β	0,3484	0,3467
λ	2,2117	1,6715

C.3.3 Estimation bayésienne du futur nombre de défaillances pour un système opérationnel

Contexte du problème

Une estimation du nombre de défaillances prévues au cours des prochaines 6 000 h après qu'un système a fonctionné pendant 10 000 h est requise. Un modèle de loi en puissance est sélectionné pour décrire le schéma sous-jacent de l'intensité de défaillance, car l'on pense qu'il peut changer au cours de la durée calendaire. Des connaissances techniques concernant les exigences opérationnelles et la maintenance planifiée sont utilisées pour aider l'analyste à choisir la distribution antérieure, à l'aide du nombre probable de défaillances et de l'incertitude associée.

Étape 1 – Choix de la distribution antérieure

L'analyste demande à l'ingénieur expert de donner ses jugements sur le nombre typique de défaillances qu'il prévoit en T = 10 000 h de fonctionnement ainsi qu'une estimation de la répartition.

L'ingénieur pense qu'il peut se produire en moyenne 30 défaillances. L'ingénieur déclare cependant qu'il serait surpris face à moins de 5 ou plus de 85 défaillances. En traçant la forme de la distribution du nombre de défaillances, l'ingénieur produit la fonction représentée sur la Figure C.3.

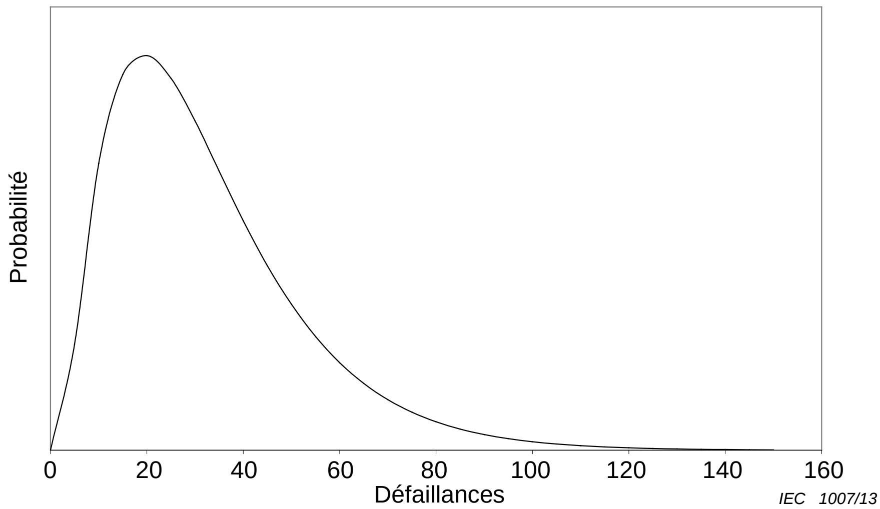


Figure C.3 – Distribution subjective du nombre de défaillances

L'analyste demande à convertir les informations sur la distribution subjective en une distribution antérieure mathématique. L'analyste a pour but de sélectionner une fonction qui à la fois correspond aux opinions subjectives de l'ingénieur et facilite les calculs de l'estimation. L'approche adoptée consiste à re-paramétrer le modèle de loi en puissance pour obtenir la fonction d'intensité:

$$z(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \qquad \text{(C.8)}$$

où $\theta = \lambda^{-\beta}$ et utilise une probabilité conjointe pour β et θ, sous la forme:

$$\Pr(\theta,\beta;a,b,T)=g(\beta)\frac{\beta}{\theta}\frac{b^a}{\Gamma(a)}\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\beta a}\exp\left[-b\left(\frac{T}{\theta}\right)^{\beta}\right] \quad \text{(C.9)}$$

où $g(\beta)$ est l'antérieur pour β et $\Gamma(.)$ est une fonction gamma. Cette forme de l'antérieur a été proposée par plusieurs auteurs, dont Beiser et Rigdon [10], et les analystes pensent que la distribution des probabilités Gamma fournit une classe de modèles suffisamment flexible pour saisir le schéma d'incertitude dans le nombre de défaillances indiqué par l'ingénieur.

Les hyperparamètres de la distribution antérieure donnés dans la formule (C.9), a, b au temps T, peuvent être obtenus à l'aide des informations fournies par l'ingénieur. L'analyste peut faire correspondre directement les 30 défaillances prévues avec la moyenne de la distribution Gamma. L'écart-type donne une mesure de la répartition et pour les distributions asymétriques, comme celle qui est représentée sur la Figure C.3, l'écart-type est approximativement égal à un quart de la plage. Puisque la plage de défaillances donnée par l'ingénieur est 85 – 5 = 80, l'écart-type peut être estimé à 20.

La moyenne et l'écart-type de la distribution Gamma pouvant être associés à ses paramètres, les valeurs de a et b peuvent être obtenues comme suit:

$$a=\frac{\text{mean}^2}{\text{variance}}=\frac{30^2}{20^2}=2,25, \quad b=\frac{\text{mean}}{\text{variance}}=\frac{30}{20^2}=0,075$$

Légende

Anglais	Français
mean	moyenne
variance	variance

L'analyste peut générer une représentation de la fonction Gamma avec les paramètres (2,25, 0,075) et permettre à l'ingénieur de vérifier si cette distribution est cohérente avec ses opinions subjectives. Si ce n'est pas le cas l'analyste doit reprendre la sélection de l'antérieur.

Afin de spécifier complètement la distribution antérieure à plusieurs variables donnée dans la formule (C.9), l'ingénieur est prié de spécifier une distribution pour le paramètre de forme β en raisonnant selon le schéma de l'intensité de défaillance. L'ingénieur sait que l'intensité de défaillance n'augmente pas à mesure que l'expérience de fonctionnement s'accumule mais il ne sait pas du tout si elle est plutôt susceptible de diminuer ou de rester constante. L'analyste traduit cette information en une distribution uniforme sur la plage $0,5<\beta<1$, ce qui donne:

$$g(\beta)=\frac{1}{0,5} \quad 0,5<\beta<1$$

puisque cette fonction saisit l'indifférence aux valeurs du paramètre de forme sur une plage cohérente avec une intensité de défaillance n'augmentant pas.

Étape 2 – Données observées pour les temps cumulés jusqu'à la défaillance

Les données de défaillance ont été collectées sur le terrain. En 10 000 h de fonctionnement, N = 30 défaillances à prendre en compte ont eu lieu. Les heures auxquelles les défaillances ont eu lieu sont données dans le Tableau C.8.

Étape 3 – Estimation bayésienne des paramètres à partir de la distribution postérieure

D'après la loi en puissance et la distribution antérieure sélectionnée, la distribution du nombre de défaillances M dans un intervalle temporel futur $\left(t_N, t_N+s\right)$ peut être dérivée et est donnée par:

$$\Pr\left(M \mid t\right)=\frac{cb^{a}\Gamma\left(N+M+a\right)}{M!\Gamma\left(a\right)}\int_{0}^{\infty} g\left(\beta\right)\beta^{N}T^{\beta a}u^{\beta}\left\{\frac{\left[\left(t_N+s\right)^{\beta}-t_n^{\beta}\right]^{M}}{\left[bT^{\beta}+\left(t_N+s\right)^{\beta}\right]^{N+M+a}}\right\}d\beta \qquad \text{(C.10)}$$

où N est le nombre de défaillances observées au moment de l'estimation, $u=\prod_{i=1}^{N}t_i$ et c est une constante de normalisation, donnée par:

$$c=\left[\int_{0}^{\infty} g\left(\beta\right)\frac{b^{a}}{\Gamma(a)}\frac{\beta^{N}u^{\beta}T^{a\beta}\Gamma(N+a)}{(t_N^{\beta}+T^{\beta})^{N+\beta}}d\beta\right]^{-1}$$

En remplaçant les données à prendre en compte pour l'antérieur et les données de défaillance observées pour le système dans la formule (C.10), on obtient la distribution postérieure pour le nombre de défaillances M dans l'intervalle temporel futur depuis la dernière défaillance observée à 8 690 h, $\left(t_{30}=8690,\ t_{30}+s=8690+6000\right)$:

$$\Pr\left(M \mid t\right)=$$

$$\frac{c0,075^{2,25}\Gamma\left(30+M+2,25\right)}{M!\Gamma\left(2,25\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2,5}\beta^{30}10000^{2,25\beta}u^{\beta}\left\{\frac{\left[\left(8690+6000\right)^{\beta}-8690^{\beta}\right]^{M}}{\left[0,075(10000)^{\beta}+\left(8690+6000\right)^{\beta}\right]^{30+2,25+M}}\right\}d\beta$$

où $u=\prod_{i=1}^{N}t_i=3.7463\text{x}10^{107}$ et $c=\left[3.5887\text{x}10^{-20}\right]^{-1}$.

Tableau C.8 – Données d'intervalle de défaillance pour un système opérationnel

Numéro de la défaillance	Intervalle cumulé de défaillance h
1	860
2	1 258
3	1 317
4	1 422
5	1 897
6	2 011
7	2 122
8	2 439
9	3 203
10	3 298

Numéro de la défaillance	**Intervalle cumulé de défaillance** h
11	3 902
12	3 910
13	4 000
14	4 247
15	4 411
16	4 456
17	4 517
18	4 899
19	4 910
20	5 676
21	5 755
22	6 137
23	6 211
24	6 311
25	6 613
26	6 975
27	7 335
28	8 158
29	8 498
30	8 690

La Figure C.4 représente les probabilités postérieures pour le nombre de défaillances, M, au cours des prochaines 6 000 h de fonctionnement et la Figure C.5 représente la distribution de probabilités postérieures cumulée pour le nombre de défaillances au cours des 6 000 h de fonctionnement. La moyenne de la distribution postérieure est égale à 18,24, ce qui signifie que très probablement 19 défaillances auront lieu au cours des prochaines 6 000 h de fonctionnement. Il est possible également d'obtenir des limites de 95 % du nombre de défaillances à partir de la distribution postérieure. Par exemple, une limite supérieure de 95 % correspond au centile 95 de la distribution postérieure, qui a une valeur de 28. Cela signifie qu'il existe 5 % de risques que plus de 28 défaillances se produisent au cours des prochaines 6 000 h de fonctionnement.

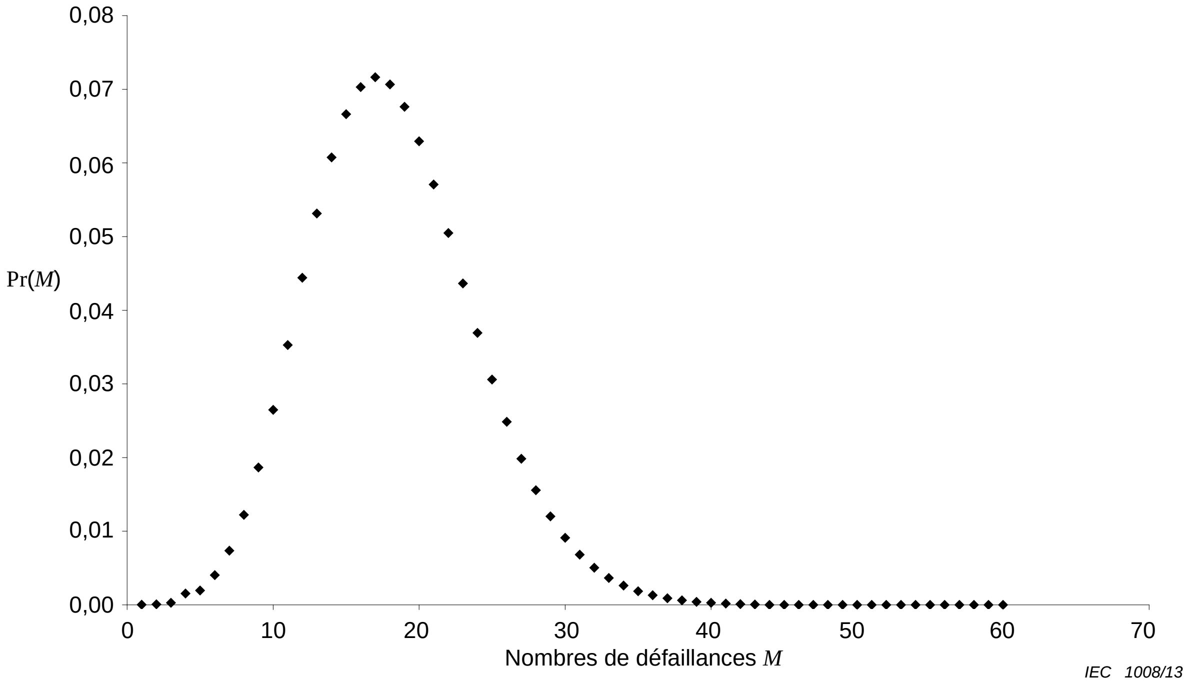


Figure C.4 – Représentation de la distribution de probabilités postérieure pour le nombre de défaillances futures, M

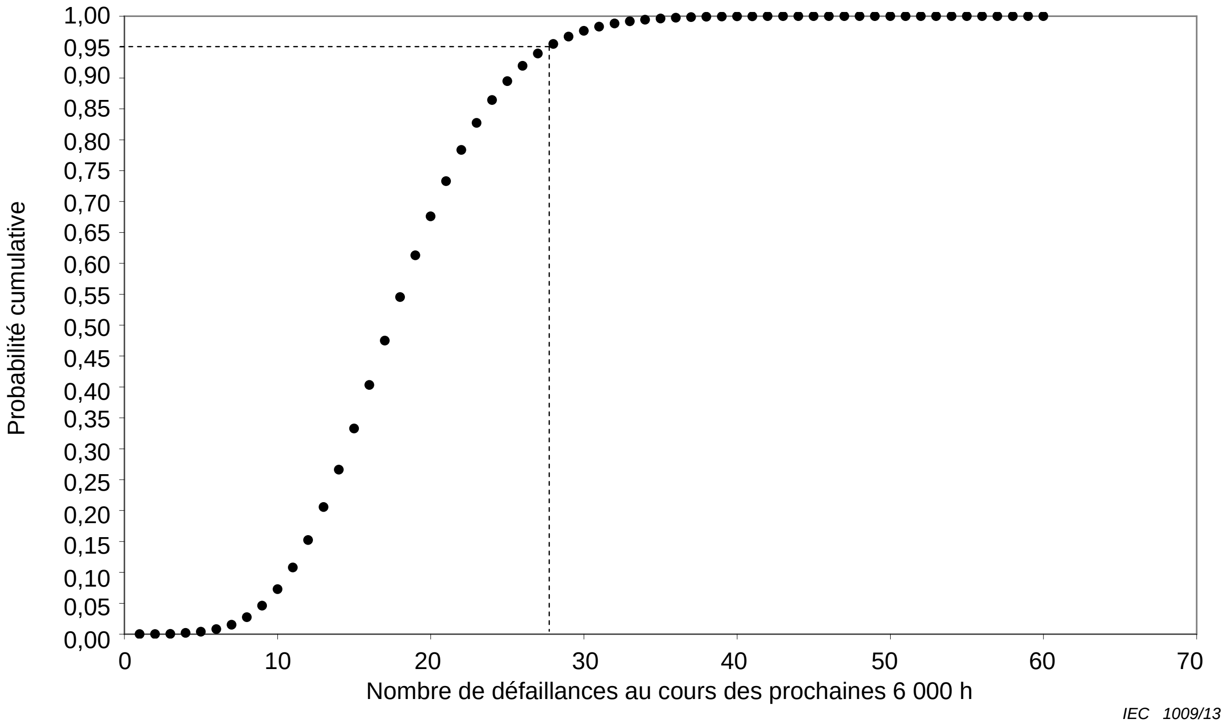


Figure C.5 – Représentation de la distribution cumulative postérieure pour le nombre de défaillances futures, M

C.4 Résumé

Les informations de la présente annexe ont pour but d'expliquer la justification d'une approche bayésienne d'estimation pour le modèle de loi en puissance. L'estimation bayésienne permet à l'analyste d'inclure des informations antérieures dans le modèle et de les combiner aux données d'intervalle de défaillance observées. Les méthodes classiques, expliquées dans le corps principal de la présente norme, utilisent uniquement les données observées d'intervalle de défaillance pour obtenir les estimations.

Les exemples donnés dans la présente annexe présentent le processus d'analyse bayésienne pour deux approches spécifiques. Il convient qu'un analyste ayant une bonne connaissance de Bayes soit impliqué dans l'estimation, car l'analyse bayésienne met en jeu une modélisation généralement plus complexe que dans le cas de l'estimation classique.

Les méthodes bayésiennes peuvent être très puissantes, c'est pourquoi il convient de les utiliser avec soin. En particulier, il convient que les informations à prendre en compte servant à spécifier la distribution antérieure soient pleinement justifiées et ouvertes à l'examen, afin de conserver l'intégrité de l'analyse.

Bibliographie

[1] CEI 61703, *Expressions mathématiques pour les termes de fiabilité, de disponibilité, de maintenabilité et de logistique de maintenance*

[2] CROW, L.H., 1974, *Reliability Analysis for Complex Repairable Systems*. Reliability and Biometry, ed. F. Proschan and R.J. Serfling, pp. 379-410, Philadelphia, PA:SIAM

[3] CROW, L.H., 1982, *Confidence Intervals Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth*. Technometrics, 24, 1, pp.67-72

[4] CROW, L.H., 1983, *Confidence Intervals on the Reliability of Repairable Systems*. Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium

[5] DUANE, J.T., *Learning curve approach to reliability monitoring,* IEEE Transactions on Aerospace, Vol. 2, N° 2, 1974

[6] CEI 61164:2004, *Croissance de la fiabilité – Tests et méthodes d'estimation statistiques*

[7] ASCHER, H. and FEINGOLD, H.,1984, *Repairable Systems Reliability*. Marcel Dekker

[8] BAIN, R.E. and Engelhardt, M. 1995, *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models.* Marcel Dekker

[9] RIGDON, S.E. and BASU, A.P., 2000 *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. John Wiley

[10] BEISER J.A. and RIGDON, S.E., 1997 *Bayes Prediction for the Number of Failures of a Repairable System*. IEEE Transactions on Reliability, Vol 46, No. 2, pp 291-295

INTERNATIONAL
ELECTROTECHNICAL
COMMISSION

3, rue de Varembé
PO Box 131
CH-1211 Geneva 20
Switzerland

Tel: + 41 22 919 02 11
Fax: + 41 22 919 03 00
info@iec.ch
www.iec.ch