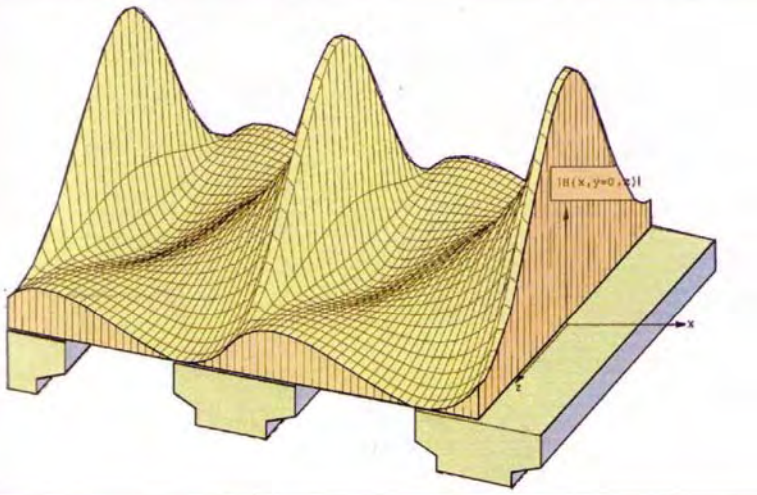
Konstantin Meyl

Wirbelströme



Dreidimensionale nichtlineare Berechnung von Wirbelströmen unter Berücksichtigung der entstehenden Oberwellen am Beispiel einer Wirbelstromkupplung

DREIDIMENSIONALE NICHTLINEARE BERECHNUNG VON WIRBELSTROMKUPPLUNGEN

Von der Fakultät Elektrotechnik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung.

Wirbelstrome lassen sich nicht unmittelbar messen, da sie wie alle Wirbel einem Messfuhler ausweichen und um ihn herum verwirbeln. Sie sind daher nur indirekt uber eine Messung der von ihnen ausgehenden Wirkungen nachweisbar. Dazu zahlen die Wirbelverluste, die Ruckwirkung auf das Erregerfeld und die Ausbildung magnetischer Kraftwirkungen. Eine gute Ubereinstimmung zwischen diesen Messwerten und den berechneten Grossen ist ein Anhaltspunkt fur die Existenz von Wirbelstromen und fur die Richtigkeit des mathematischen Modells. Das Buch befasst sich mit dem Problem der Vorausberechnung und optimalen Bemessung von Wirbelstromkupplungen. Durch eine dreidimensionale und nichtlineare Berechnung kann auf analytischem Weg eine allgemeingultige Theorie entwickelt werden. Dabei wird berucksichtigt, dass die Wirbelstrome und die Felder im Ankerring dreidimensional verteilt, entsprechend der Polanordnung oberwellenbefaftet und einer starker Stromverdrangung unterworfen sind. Selbst die Uberlagerungspermeabilitat der Oberwellen geht in die Rechnung ein. Die messtechnische Uberprufung des berechneten Drehmoments in Abhangigkeit von der Erregung, der Drehzahl und der Ankerringtemperatur, durchgefuhrt an Wirbelstromkupplungen unterschiedlicher Bauformen und Baugrossen, zeigt gute Resultate.

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. H.-J. Gutt
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. K. Feser
Tag der mündlichen Prüfung: 25.07.84

Institut für Elektrische Maschinen und Antriebe
der Universität Stuttgart

1984

Kurzfassung

MEYL, KONSTANTIN:

DREIDIMENSIONALE NICHTLINEARE BERECHNUNG VON WIRBELSTROMKUPPLUNGEN

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. H.-J. Gutt
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. K. Feser

Die Arbeit befaßt sich mit dem Problem der Vorausberechnung und optimalen Bemessung von Wirbelstromkupplungen. Durch eine dreidimensionale und nichtlineare Berechnung konnte auf analytischem Wege eine allgemeingültige Theorie entwickelt werden. Dabei wird berücksichtigt, daß die Wirbelströme und die Felder im Ankerring dreidimensional verteilt, entsprechend der Polanordnung oberwellenbehaftet und einer starken Stromverdrängung unterworfen sind. Die meßtechnische Überprüfung des berechneten Drehmoments in Abhängigkeit von der Erregung, der Drehzahl und der Ankerringtemperatur zeigt gute Resultate.

Konstantin Meyl
Robert-Bosch-Str. 10
8910 Landsberg/Lech
Tel.: 08191/5201

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für elektrische Maschinen und Antriebe der Universität Stuttgart entstanden.

Mein Dank gilt dem Institutsleiter Herrn Prof. Dr. H.J. Gutt für die Aufnahme und die Förderung dieser Arbeit sowie für die Übernahm« des Hauptreferates. Dank seiner Bemühungen ist mein, für diese Arbeit wichtiger Studienaufenthalt bei Prof. Dr. E.J. Davies in England zustande gekommen.

Meinen Kollegen und allen Beteiligten danke ich für wertvolle Hinweise und Anregungen und in besonderem Maße Herrn Prof. Dr. K. Feser, dem Leiter des Instituts für Energieübertragung und Hochspannungstechnik für die Übernahme des Koreferates.

Der Geschäftsleitung der Firma Meyl und Ziesel Antriebstechnik GmbH danke ich für die zur Verfügung gestellten Untersuchungsobjekte und meiner Frau für ihre Hilfe und Geduld bei der Reinschrift des Manuskripts.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Inhaltsverzeichnis 3
Formelzeichenverzeichnis 6

1. Einführung 8
1.1 Übersicht 8
1.2 Aufbau und Wirkungsweise 8
1.3 Besondere Eigenschaften 9
1.4 Betrachtungsweisen 10

2. Probleme bei der Berechnung von Wirbelstromkupplungen . 13
2.1 Voraussetzungen 13
2.2 Vernachlässigungen 14
2.2.1 Hystereseverluste (I) 14
2.2.2 Endliche Ankerringdicke (II) 14
2.2.3 Krümmung des Ankerrings (III) 15
2.3 Zu berücksichtigende Probleme 16
2.3.1 Temperatureinfluß (IV) 16
2.3.2 Dreidimensionalität (V;VI;VII) 16
2.3.3 Nichtlinearität (VIII) 17
2.3.4 Oberwellen (IX;X) 19
2.4 Fourierzerlegung der Luftspaltflußdichte 20
2.5 Handelsübliche Klauenpolformen 22
2.6 Empirisch-günstige Polform 24
2.7 Luftspaltfluß 25

3. Dreidimensionale Berechnung des Wirbelstromfeldes ... 26
3.1 Herleitung der Feldgleichung 26
3.2 Stromdichtevektor 27
3.3 Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen . . 28
3.4 Randbedingungen 30
3.5 Wirbelstromverteilung 32
3.6 Räumliches Feldlinienbild der Wirbelströme 34
3.7 Dreidimensionale Feldstärkeverteilung 37
3.8 Induktionslinien im Wirbelstromzylinder 38

4. Drehmomentberechnung 41
4.1 Luftspaltinduktion 41
4.2 Oberwellenspektren 42
4.2.1 Testkupplungen..... 42
4.2.2 Handelsübliche Kupplungen 43
4.3 Wirbelstromverluste 45
4.3.1 Laufvariable m=0 46
4.3.2 Laufvariable m=l,3,5... 46
4.4 Drehmoment..... 47
4.5 Größe der Induktion..... 48

5. Nichtlineare analytische Beschreibung 51
5.1 Variable Permeabilität 51
5.2 Amplituden der Feldstärkevektoren 52
5.3 Approximation 54
5.4 Nichtlineare Oberwellenbeschreibung 56
5.5 Lösung des Nichtlinearen Problems 57

6. Messtechnische Überprüfung 59
6.1 Funf Untersuchungsobjekte..... 59
6.2 Drehmomentmessung und -berechnung 60
6.3 Oberwellenspektrum des Drehmoments 63
6.4 Berechnung der Eindringtiefe 63

7. Magnetischer Kreis 66
7.1 Probleme 66
7.2 Ankerringdurchf lutung..... 66
7.3 Zeigerdiagramm..... 67
7.4 Ankerrückwirkung 68
7.5 Magnetisches Ersatzschaltbild 70
7.6 Erregerbedarf..... 71
7.6.1 Analytische Berechnung 71
7.6.2 Graphische Lösung 72

8. Überprüfung der vollständigen Theorie 75
8.1 Auswertung des magnetischen Kreises 75
8.2 Drehmomentauswertungen 76
8.2.1 Drei handelsübliche Kupplungen (Nr. 1-3) 76
8.2.2 Testkupplung ohne Endringe (Nr. 4) 78
8.2.3 Endringkupplung (Nr. 5)..... 79
8.3 Konstruktionsrichtlinien 82
8.3.1 Betriebsverhalten 82
8.3.2 Materialeigenschaften 82
8.3.3 Abmessungen 83
8.4 Wachstumsgesetze 84

9. Thermisches Verhalten 86
9.1 Temperaturabhängigkeit des Drehmoments 86
9.2 Messung der Temperaturabhängigkeit 87

Zusammenfassung 89
Literaturverzeichnis 91

Formel Zeichenverzeichnis

A Fläche [m^2]; A_p: Poloberfläche; A_f, A_s, A_{mE}, A_{mp}: Querschnittsflächen ;a_f, a_s, a_p: Eisenlängen[m]

a,b Materialkonstanten (a=0,923 b=0,774 s.Kap. 5.3)

B Flußdichte [T] ; B_L: Luftspaltinduktion
B_a: Maximalwert der Luftspaltinduktion
$\hat{B}_{Ll}$, $\hat{B}_{Ln}$: Amplituden von B_L
B_{mE}, B_{mp}: Eiseninduktion
b_p: Polbreite [m] : b_{pi}: Ersatzpolbreite
b_{p0}: Polbreite in Polmitte (bei z=0)
b_{pu}: Polbreite an der Polspitze (bei z= +- L_u/2)

C C_d, C_q: Minderungsfaktoren (s. Gl. 6.6)
D Luftspaltdurchmesser [m] ; D_f, D_a, D_i, Durchmesserwerte

d: Eindringtiefe [m] (s. Gl. 3.35); d_a: Ankerringdicke

E Elektrische Feldstärke [V/m]

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$: Einheitsvektoren

F f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_r, f_i: Substitutionen (s. Kap. 3.3 - 3.5)

H Magnatische Feldstärke [A/m] ; H_n, H_{xnm}, H_{ynm}, H_{znm}: Oberwellenamplituden des Feldstärkevektors

I Strom |A] ; [gl Erregerstrom; I_N: Nennerregerstrom
i_E : normierter Erregerstrom (i_E= I_E/I_N) ; i_d, i_q (s. Gl. 6.49) und i_L, i_e, i_m (s. Gl. 6.46): normierte Ströme

J Stromdichtevektor [A/m] ;$\hat{J}_n$, J_{xn}, $\hat{J}_{xno}$, J_{xnm},...: Oberwellenamplituden des Stromdichtevektors

K K_l, K2, K_3: Abkürzungen (s. Gl. 4.23-4.26)

L axiale Ankerringlänge [m]
L_p Polradlänge [m] ; L_u: Überlappungslänge der Pole

M Drehmoment [N m] ; M_n: Oberwellenteildrehmomente; M_{nm}: Drehmoment bei ϑ_m; M^{na}: Drehmoment bei ϑ_a
m: Laufvariable (m=0 oder m=l,3,5/7,___)

N Drehzahl; N_{rel}: Relativdrehzahl[s^{-1}]
N_N: Nenndrehzahl (N_N=25[s^{-1}])
n: Oberwellenzahl (n=l,3,5,7,...)

0 Oberfläche [m^2]

P Leistung W ;
P_{VA}: Wirbelstromverluste im Ankerring (s. Gl.4.22)
P_{An}: Oberwellenverluste im Ankerring

p Polpaarzahl

R Widerstand [Ω] ; R_A: Ankerringwiderstand

s Schlupf ($s=N_{rel}/N_N$)

t Zeit [s]

V Magnetische Spannung [A] ; V_e: Erregerspannung
V_m: Eisenspannung; V_L: Luftspaltdurchflutung
V_d, V_q: Längs- und Querkomponente der Ankerdurchflutung

w w_E: Windungszahl der Erregerwicklung

x,y,z Koordinaten; x',y',z': normierte Koordinaten

α Polbedeckungsverhältnis ($\alpha=b_p/\tau_p$)
α : Temperaturkoeffizient

ß Konstruktionsverhältnis ($ß=\tau_p/L$)

γ Lastwinkel

δ Phasenwinkel; δ : Luftspalt [m]

ε linearer Vergrößerungsfaktor.

Θ Durchflutung [A] ; Θ_E: Erregerdurchflutung
Θ_{EN}: Nennerregerdurchflutung; Θ_{AR}: Ankerdurchflutung
$\hat{\Theta}_{AR}$, Θ_{ARnm}: Amplituden der Ankerdurchflutung

ϑ $\vartheta_ü$: Übertemperatur [K] ($\vartheta_ü=\vartheta_m-\vartheta_a$)
ϑ_m: Maximale Endtemperatur; ϑ_a: Außentemperatur [°C]

Λ Leitwert [m]; Λ_σ: Streuleitwert; Λ_a: Ankerleitwert
Λ_m: Erregereisenleitwert; Λ_L: Luftspaltleitwert

λ Wellenlänge [m] ($\lambda = 2\cdot\tau_p$)
λ_w: Wirksame Wellenlänge (Gl.3.36)

μ Eisenpermeabilität [Vs/Am]
μ_o: Permeabilität des Vakuums ($\mu_o=4\pi\cdot10^{-7}$ [Vs/Am])
μ_r: Relative Permeabilität; ($\mu=\mu_o\cdot\mu_r$)
μ_{dyn}: Dynamische Überlagerungspermeabilität

ρ Spezifischer Widerstand [Ωm]

τ τ_p: Polteilung [m] ($\tau_p=\pi D/2p$)

Ø Fluß [Vs]; $Ø_p$: Polfluß; $Ø_L$: Luftspaltfluß ($Ø_L=p\cdot Ø_p$)
$Ø_E$: Erregerfluß; $Ø_\sigma$: Streufluß ($Ø_E=Ø_L+Ø_\sigma$)

φ normierte Flüsse;($\varphi_L=Ø_L/Ø_{LN}$)...

ω Winkelgeschwindigkeit [s^{-1}] ($\omega=2\pi p\cdot N_{rel}$)

1. Einführung

1.1 Übersicht

Es ist allgemein bekannt, daß die Berechnung des Drehmoments einer Wirbelstromkupplung in Abhängigkeit von der Erregung, der Drehzahldifferenz und der Temperatur Schwierigkeiten bereitet. Dies ist in besonderem Maße auf den Einfluß der Wirbelströme zurückzuführen, die einer starken Stromverdrängung unterworfen sind und eine infolge der Nichtlinearität des Eisens ortsabhängige Permeabilität zur Folge haben. Daraus resultiert ein ebenfalls stark nicht lineares Betriebsverhalten. Alle bisher bekannt gewordenen und notwendigerweise nichtlinearen Theorien befriedigen zur Berechnung handelsüblicher Wirbelstromkupplungen nicht. Zur Vorausberechnung und Bemessung von Wirbelstromkupplungen wird deshalb nach einer allgemeingültigen Theorie gesucht. In der vorliegenden Arbeit soll eine entsprechende dreidimensionale Theorie hergeleitet und durch Vergleich mit Messungen auf ihre Richtigkeit untersucht werden.

1.2 Aufbau und Wirkungsweise von Wirbelstromkupplungen

Eine Wirbeletromkupplung besteht gemäß Bild 1.1 /24/ aus zwei konzentrisch ineinander gelagerten Hälften:

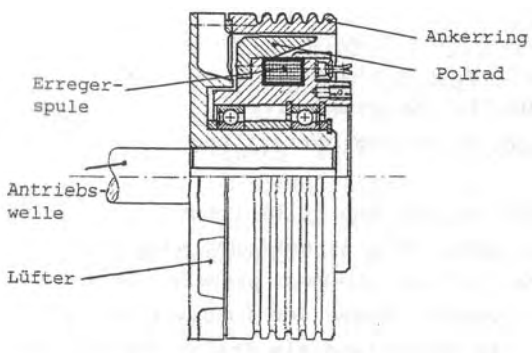


Bild 1.1: Der konstruktive Aufbau der untersuchten Kupplungen

1. dem Erregerteil der Kupplung, als "Polrad" bezeichnet. Es handelt sich im vorliegenden Fall um einen gleichstromerregten Innenpolläufer. Durch die Verwendung des Klauenpolprinzips wird die Kupplung zu einem heteropolaren Typ.
2. dem Sekundärteil der Kupplung; er bildet den "Ankerring". Hier werden sekundäre Spannungen induziert, die Ströme hervorrufen, wenn die beiden Kupplungshälften gegeneinander Relativbewegungen ausführen. Als Ankerring wird ein glatter, massiver Stahlring (St 37) verwendet, der auch mit Kupferendringen ausgestattet sein kann.

Die Kraftlinien des magnetischen Erregerfeldes schließen sich über die ausgeprägten Pole des Polrades, über den Luftspalt und über den Ankerring. Wird die Ringspule von einem Gleichstrom erregt und laufen die Kupplungshälften mit unterschiedlichen Drehzahlen, so werden im Ankerring Spannungen induziert. Diese rufen Wirbelströme hervor, die durch Erzeugen eines sekundären Magnetfeldes der erregenden Ursache, also der Relativbewegung gegenüber dem Polrad, entgegenwirken. Es bildet sich ein Drehmoment aus, das sowohl vom Erregerstrom als auch von der Schlupfdrehzahl abhängig ist. Als dritte Einflußgröße tritt noch die Temperatur des Ankerrings hinzu, der durch die Schlupfverluste thermisch stark beansprucht wird.

1.3 Besondere Eigenschaften

Im Gegensatz zu den asynchronen Schlupfkupplungen /20-24/ weisen Wirbelstromkupplungen eine besonders "weiche" Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik auf ohne Ausbildung eines deutlich ausgeprägten Kippunktes. Die Dämpfungseigenschaften /13/, der verschleißfreie Betrieb und die hohe Überbelastbarkeit begünstigem den praktischen Einsatz /14-19/.

Die Wirbelstromkupplung ist ein "elektromechanischer Leistungsverstärker", d.h. mit einer relativ geringen elektrischen Erregerleistung kann eine ca. 50 bis 100-fach größere mechanische Antriebsleistung gesteuert werden. Wegen des folglich geringen Aufwands an Stromrichtern ist die Verwendung als Stellglied in gesteuerten und geregelten Antrieben sinnvoll. Problematisch und deshalb näher zu untersuchen sind in diesem Zusammenhang die Schlupfverluste und

die Nichtlinearitäten von Wirbelstromkupplungen. Der Entwurf zeitoptimaler Regeleinrichtungen, der wegen der nichtlinearen Eigenschaften adaptive Regler erforderlich macht, verlangt eine exakte Kenntnis der Regelstrecke, über ihre stationären Kennlinien und ihr dynamisches Verhalten /37/.
Die bisher bekannten Theorien haben sich jedoch als unzureichend erwiesen . Da die neu herzuleitende Theorie aber auf ihnen aufbaut, muß darauf hingewiesen werden, daß die Vorgehensweisen und Ergebnisse sehr unterschiedlich sind, weil an Stelle von heteropolaren häufig homopolare Kupplungen untersucht werden /4-9/ oder statt des massiven Ankerrings beschichtete /4, 29, 34/ oder mit Endringen bestückte Ankerringe /31-33/ verwendet werden und nicht zuletzt, weil die Autoren von verschiedenen Betrachtungsweisen ausgehen.

1.4 Betrachtungsweisen

Die Wirbelstromkupplung ist ein eigenständiges Gebilde innerhalb des Elektromaschinenbaus, so daß die Herleitung einer eigenen Theoie erforderlich ist.
Sucht Man eine Analogie zur Asynchron-Käfigläufermaschine, so denke man sich das Ständerdrehfeld zerlegt in einen Anteil, der drehnonentbildend ist, und in einen, der den Eisenkreis aufmagnetisiert. Bei der Kupplung liegen diese beiden Funktionen zunächst getrennt vor. Die Gleichstromerregung dient allein der Magnetisierung. Das zur Erzeugung eines Drehmoments erforderliche Drehfeld wird gewonnen, indem das vom Polrad erzeugte Gleichfeld Mechanisch von außen angetrieben wird. Das angetriebene Gleichfeld besitzt fur den Anker die gleichen Eigenschaften wie das Ständerdrehfeld eines Asynchronmotors.
So plausibel diese Anschauung auch erscheinen mag, gilt die dieser Betrachtungsweise zugrundeliegende Theorie der Asynchronmaschine allenfalls für asynchrone Schlupfkupplungen /20-22/; insbesondere, wenn die Ständerwicklung mit Gleichstrom gespeist und

der Motor über den Schlupf gebremst wird /25/. Bei Wirbelstromkupplungen hingegen können mehrere Eigenschaften beobachtet werden, die mit der Asynchronmaschinentheorie unvereinbar sind.

1. Induktionskupplungen bieten den Vorteil, daß über den Erregerfeldstrom die Magnetisierung direkt beeinflußt und verstellt werden kann. Das Polrad, das diese Eigenschaften verkörpert, entspricht als Klauen- oder Schenkelpolrad dem einer entsprechenden Synchronmaschine.
2. Eine weitere Besonderheit, die mit der Verwendung eines Polrades verbunden ist, ist die Zweiachsigkeit des Systems. Die unterschiedlichen magnetischen Leitwerte in der Längsachse über einem Pol und in der Querachse über einer Pollücke machen eine zweiachsige Darstellung erforderlich /23/.
3. So wichtig diese Eigenschaften auch sind, ist keine Betriebsart eines übererregten Synchrongenerators möglich oder vorstellbar, bei der im Ständer ähnliche Vorgänge der Induktion von Wirbelströmen und der Stromverdrängung stattfinden wie im Ankerring einer Wirbelstromkupplung. Diese Vorgänge sind mit einer wirbelstromspezifischen Eigenschaft verbunden, die weder Asynchron- noch Synchronmaschinen aufweisen.

   In der nachfolgen den Theorie wird gezeigt, daß sich bereits von sehr kleinen Drehzahlen an aufwärts über den gesamten Betriebsbereich einer Wirbelstromkupplung hinweg ein Lastwinkel von $\gamma = 45° \cong$konstant einstellt.

Dieser ist für eine zweipolige Ersatzanordnung definiert, so daß der tatsächlich unter Last auftretende Raumwinkel γ/p beträgt.

Durch die Verwendung eines polradfesten Koordinatensystems kann bei einer festen Relativdrehzahl (N_{rel}) dem räumlich sich ausbildenden Lastwinkel ein entsprechender zeitlicher Winkel gleichgestellt werden, so daß der "Phasenwinkel" δ zwischen dem Zeiger der Erregerdurchflutung im Luftspalt und der Ankerringdurchflutung unter $\delta = 90° + \gamma = 135°$ auftritt, wie aus dem Zeigerdiagramm (Bild 7.1) ersichtlich.

Es handelt sich also um eine für Wirbelstromsysteme typische Eigenschaft, daß der Phasenwinkel von der Last unabhängig und bei quasistationärer Betriebsweise dem System eingeprägt ist. Die Wirbelstromkupplung ist in diesem Punkt einer Gleichstrommaschine ähnlich, die mit einem um 45° aus der neutralen Zone gedrehten und kurzgeschlossenen Bürstensatz generatorisch fremderregt und feldgesteuert betrieben wird.
Auch wenn in /30,31/ mit einer Betrachtung der Wirbelstromkupplung als Synchronmaschine eine ganze Reihe besonderer Eigenschaften von Wirbelstromkupplungen erklärt werden konnten, so erweist sich ein solcher Weg, der zu einer zweidimensionalen Berechnung führt, letzten Endes doch als genauso unzutreffend /33/ wie die Verwendung einer Asynchronmaschinentheorie /9-13/.

2. Probleme bei der Berechnung von Wirbelstromkupplungen

Zunachst werden besondere Eigenschaften und Probleme bei der mathematischen Behandlung von Wirbelstromkupplungen dargelegt, an Hand der Fachliteratur diskutiert und neue Wege zur Lösung angegeben.
Es sollen vorzugsweise heteropolare Wirbelstromkupplungen mit Klauenpolrad und homogenem Stahlankerring berechnet werden, die in der industriellen Anwendung weltweit am stärksten verbreitet und mangels einer geeigneten Theorie bis heute noch nicht berechnet worden sind. Die Wirbelströme im Ankerring einer solchen Kupplung verlaufen auf räumlichen Bahnkurven, so daß eine dreidimensionale Theorie erforderlich wird. Gleichzeitig müssen die Stromverdrängung, der nichtlineare Einfluß der variablen Permeabilität und der mit der Bauform der Erregerpole in Zusammenhang stehende Oberwelleneinfluß berücksichtigt werden.
Eine solche Lösung und deren Herleitung werden in dieser Arbeit ausführlich dargelegt. Sie ist die Voraussetzung für die Vorausberechnung und für die Optimierung von Wirbelstromkupplungen und soll helfen, die heutzutage am Maschinenmarkt angebotenen, mehr empirisch konstruierten Kupplungen zu modernisieren und ihre Ausnutzung zu steigern.

2.1 Voraussetzungen

Die allgemein bekannte Notwendigkeit, eine dreidimensionale und zugleich nichtlineare Theorie herleiten zu müssen, ist bei den aus der einschlägigen Literatur bekannten Verfahren zur Wirbelstromberechnung bisher unbeachtet geblieben. Statt dessen wird von vereinfachenden Annahmen ausgegangen, die allenfalls auf Laborkupplungen, auf keinen Fall jedoch auf handelsübliche Wirbelstromkupplungen zutreffend sind.
Die üblichen Vernachlässigungen /1-6, 29-37/ sollen zunächst zusammengestellt, danach erläutert und in ihrer Bedeutung diskutiert werden. Sie lauten im einzelnen:

I. Hystereseeffekte werden vernachlässigt (Kap. 2.2.1)
II. Die endliche Ankerringdicke übt auf die Wirbelströmung keinen begrenzenden Einfluß aus (Kap. 2.2.2)
III. Das karthesische Koordinatensystem ist anwendbar, d.h. die Ankerringkrümmung wird vernachlässigt (Kap. 2.2.3)

IV. Der spezifische Widerstand wird als konstant angenommen (Kap. 2.3.1). Endeffekte sind vernachlässigbar /3,30/ (Kap. 2.3.2).

VI. Die magnetische Flußdichte wird in Richtung der Läuferachse als konstant angenommen (Kap. 2.3.2).

VII. Der Stromdichtevektor ist überall im Ankerring axial gerichtet (Kap. 2.3.2).

VIII. Die nichtlineare Permeabilität wird als konstant angenommen. (Kap. 2.3.3).

IX. Die Oberwellen der Luftspalt-Induktion werden vernachlässigt (Kap. 2.3.4).

X. Alle im Ankerring auftretenden Feldgrößen sind sowohl zeitlich als auch räumlich sinusförmig verteilt (Kap.2.3.4).

2.2 Vernachlässigungen

Die ersten drei Annahmen stellen keine wesentliche Einschränkung für das angestrebte Lösungsverfahren dar. Sie sind zur Herleitung der dreidimensionalen, nichtlinearen Theorie zweckmäßig.
Es handelt sich im einzelnen um:

2.2.1 Hystereseverluste (I)

Die Vernachlässigung (I) kann getroffen werden, da die Hystereseverluste des Ankerrings in allen Betriebspunkten wesentlich kleiner sind als die Wirbelstromverluste. Für die angestrebte analytische Lösung ist es weiterhin von Vorteil, zwischen der Induktion B und der Feldstärke H eine eindeutige Funktion angeben zu können.

2.2.2 Endliche Ankerringdicke (II)

Wann der Ankerring handelsüblicher Wirbelstromkupplungen die endliche, vom Luftspalt aus gemessene radiale Dicke d_a besitzt, so stellt es für die Berechnung sicherlich keine nennenswerte Fehlerquelle dar, wenn von einem Ankerring unendlicher Dicke ausgegangen wird, da im üblichen Betriebsbereich von Wirbelstromkupplungen die Eindringtiefe der Wirbelströme d_1 (nach /9,31/):

$$d_1 = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega \mu}} \quad \{ 2.1 \}$$

wesentlich kleiner ist als die praktisch ausgeführte Ankerringdicke, da : $d_1 \ll d_a$ (2.2)

Die Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn als Randbedingung und Integrationsgrenze Unendlich eingesetzt werden kann.

2.2.3 Krümmung des Ankerrings (III)

Die Verwendung rechtwinkliger Koordinaten (III) ist damit gleichbedeutend, daß das Polrad-Ankerring-System in seiner Abwicklung betrachtet und die Krümmung des Ankerrings vernachlässigt wird. Dies ist erlaubt, da der Luftspaltdurchmesser D groß gegenüber der Ankerringdicke $D \gg d_a$ und erst recht groß gegenüber der Luftspaltbreite ist: $D \ggg \delta$

Wie im Bild 2.1 gezeigt, werden die Koordinatenachsen festgelegt.

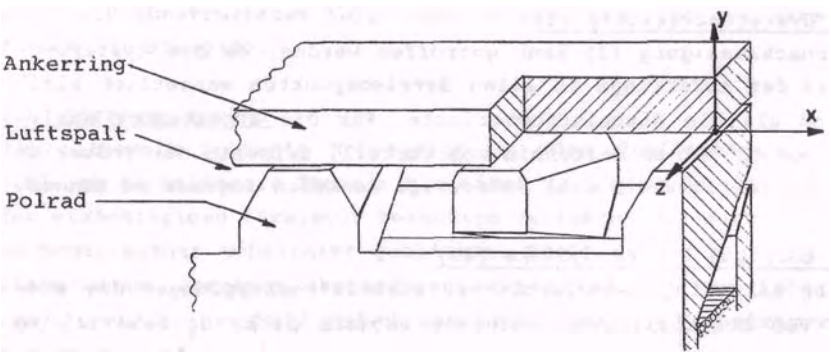


Bild 2.1 Die Wirbelstromkupplung in der Abwicklung

Darin gibt x die Bewegungsrichtung und z die Achsrichtung an und y weist, vom Luftspalt ausgehend, wo y=0 ist, radial nach außen. Der ebene, abgewickelte Ankerring entspricht dem in Wirklichkeit gekrümmten, wenn er in beiden x-Richtungen unendlich ausgedehnt ist

$$-\infty < x < +\infty \quad (2.3)$$

2.3 Zu berücksichtigende Probleme

3.3.1 Temperatureinfluß (IV)

Wird mit einem konstanten spezifischen Widerstand gerechnet, so ist dies solange gut möglich wie dafür Sorge getragen wird, daß die Temperatur des Ankerrings unverändert bleibt. Diese Bedingung ist aber nur im Labor für einzeln durchgeführte Messungen erfüllbar und nicht für den praktischen Betrieb von Wirbelstromkupplungen. Hier hat die Temperatur einen Einfluß von bis zu 30% auf die Drehmomenterzeugung. Er wird deshalb später in Kapitel 9 gesondert untersucht.

2.3.2 Dreidimensionalität (V, VI, VII)

Um die Vernachlässigungen V, VI und VII treffen zu können, wurden in einigen veröffentlichten Fällen die Testkupplungen mit Kupferendringen versehen /30-32/, um der Vorstellung eines unendlich langen Ankerringzylinders nahezukommen. In diesem Fall wird vorausgesetzt, daß der spezifische Widerstand der Endringe vernachlassigbar ist gegenüber dem des Eisenmaterials; das Problem soll dadurch zweidimensional beschreibbar werden. Wirbelstromkupplungen und -bremsen werden aber fast ausnahmslos ohne Endringe ausgeführt, da die industrielle Herstellung eines gut leitenden Kupfer- Eisen-Übergangs große Probleme bereitet.

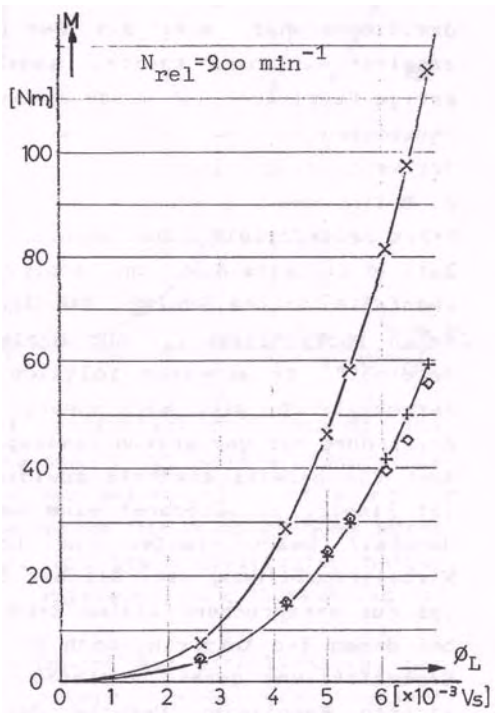


Bild 2.2:
Messung und Berechnung des Drehmoments der Kupplung 2.
(Meßpunkte: ◇;
2-dimensional gerechnet: x
1-dimensional gerechnet: +)

In Bild 2.2 ist der gemessene Drehmomentverlauf einer der drei untersuchten handelsüblichen Kupplungen aufgetragen über dem Luftspaltfluß, der gleichzeitig mit Hilfe von Meßspulen an den zum Luftspalt hin offenen Enden der Pole gemessen worden ist. Wird, ausgehend von dem jeweiligen Luftspaltfluß, das Drehmoment mit Hilfe der noch herzuleitenden nichtlinearen Theorie berechnet, wobei auch die Oberwellen berücksichtigt werden, so erkennt man deutlich, daß die zweidimensionale Rechnung im Vergleich zu der sehr viel exakteren dreidimensionalen Rechnung wesentlich zu hohe Wirbelstromverluste liefert. Bei der Vernachlässigung der Oberwellen und der Einführung von "Endeffekt-Korrekturfaktoren" /32, 35, 36/ handelt es sich um Hilfsmaßnahmen, um die vom Ansatz her bereits unbrauchbare zweidimensionale Theorie trotzdem für Überschlagsrechnungen verwenden zu können.

2.3.3 Nichtlinearität (VIII)

E. J. Davies /34/ berechnete einen, in der Praxis allerdings seltenen Kupplungstyp mit kupferbeschichtetem Ankerring, zwar dreidimensional, aber mit der Vernachlässigung VIII; d.h. er arbeitet mit einer konstant angenommenen Permeabilität. Für derartige Kupplungen ist diese Annahme zulässig, da die Wirbelströme vorwiegend in der Kupferschicht fließen und der Eisenrückschluß nur wenig gesättigt ist.

E. Bolte, der die Wirbelströme in dem in gleicher Weise geschichteten Sekundärteil eines asynchronen Linearmotors erst in jüngster Zeit dreidimensional und analytisch berechnet hat /38/, kommt ebenfalls zu dem Schluß, daß der Beitrag des "massiven magnetischen Rückschlusses... nur wenige Prozente der Gesamtschubkraft erreicht". Er arbeitet folglich ebenfalls mit einer konstanten Permeabilität, gibt aber zusätzlich ein iteratives Verfahren zur Auffindung der geeigneten Ersatzpermeabilität an.

Auch die bereits erwähnte dreidimensionale Theorie von Malti /5/ ist linear. Er berechnet eine homopolare Kupplung, deren größter Nachteil bekanntermaßen und konstruktionsbedingt die geringe Wirbelstrombildung ist. Darüber hinaus sorgen die Autoren dafür, daß nur entsprechend kleine Erregerle istungen eingespeist werden, bei denen der Ankerring noch an keiner Stelle in den Bereich der Eisensättigung gerät. Trotzdem lassen die von ihnen veröffentlichten Kennlinien bereits deutlich erkennen, daß dies eine

Annahme ist, unter der selbst die Berechnung homopolarer Wirbelstromkupplungen für industrielle Anwendungen nicht mehr befriedigen kann.
Heteropolare Kupplungen geraten sogar schon bei minimalen Erregerströmen in den Bereich der Sättigung. Sie werden üblicherweise stark gesättigt betrieben, wobei zu berücksichtigen ist, daß der Sattigungsgrad zu einem bestimmten Zeitpunkt an verschiedenen Stellen im Ankerring ganz unterschiedlich ist.

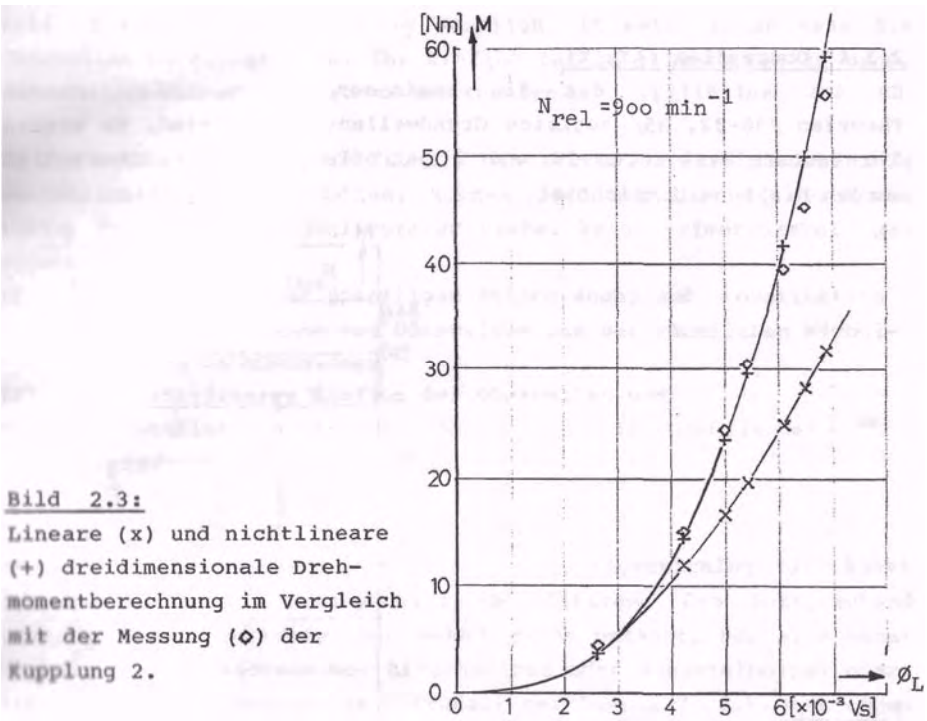


Bild 2.3:
Lineare (x) und nichtlineare (+) dreidimensionale Drehmomentberechnung im Vergleich mit der Messung (◇) der Kupplung 2.

Wie aus Bild 2.3 hervorgeht, ist der Fehler, der durch die Verwendung einer linearen Theorie begangen wird, kein systematischer und auch kein proportionaler, so daß selbst die Einführung von Korrekturfaktoren keinerlei Verbesserung mit sich bringen würde. Lineare Theorien /1-5, 38/ sind, von dem ungesättigten Betrieb einer Wirbelstromkupplung einmal abgesehen, zur Berechnung unbrauchbar.
Andererseits ist eine analytische Lösung der nichtlinearen, partiellen Differentialgleichung des Ankerringfeldes nicht bekannt.

Deshalb werden die Maxwell'schen Gleichungen zunächst mit einer örtlich konstanten Permeabilität aufgestellt und die ortsabhängige Feldstärke berechnet. Mit Hilfe einer Approximation der Magnetisierungskennlinie wird in Kap. 5 die jeweilige Permeabilität in Abhängigkeit von der zugehörigen Amplitude des Feldstärkevektors im Ankerring mathematisch beschrieben und eine auf diese Weise die Nichtlinearität berücksichtigende, geschlossene Gleichung für das erzeugte Drehmoment hergeleitet.

2.3.4 Oberwellen (IX, X)

Es ist auffällig, daß die zweidimensionalen, nichtlinearen Theorien /30-32, 35/ zugleich Grundwellentheorien sind. Es werden die Vernachlässigungen IX und X getroffen, d.h. die Oberwellen werden nicht berücksichtigt.

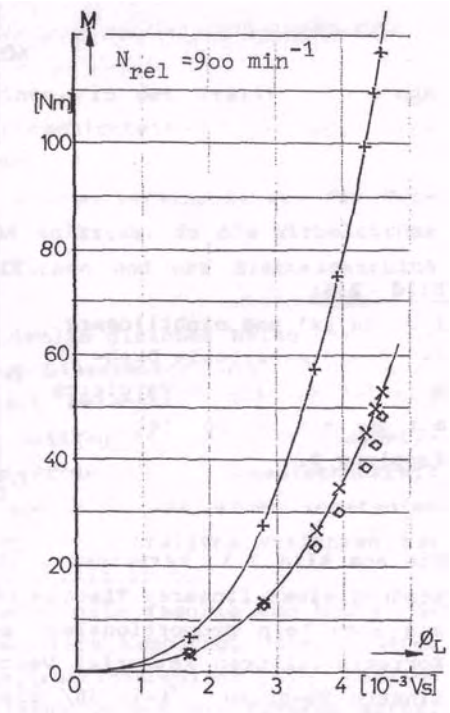


Bild 2.4
Die zweidimensionale, nichtlineare Drehmomentberechnung der "Endringkupplung 5" ohne (x) und mit Berücksichtigung der Oberwellen (+) im Vergleich mit der Messung (◇)

Die Messung und die zweidimensionale Berechnung einer entsprechend aufgebauten Kupplung (Nr. 5) mit Kupferendringen (s. Kapitel 6.1), wie in Bild 2.4 gezeigt, hilft diese Kausalität zu durchleuchten:

Die Grundwellenberechnung kommt dem Meßergebnis wesentlich näher als die sehr viel "exaktere", auch die Oberwellen berücksichtigende Rechnung. Der Grund ist darin zu sehen, daß durch die Annahme (VII), die Wirbelströmung verlaufe axial und besitze ausschliesslich eine drehmomentbildende Komponente, das Drehmoment um mehr als den Anteil zu groß berechnet wird, den die Oberwellen zur Verlusterzeugung und damit auch zur Drehmomentbildung beitragen.

Bild 2.4 zeigt gleichzeitig deutlich, in welch hohem Maße die Oberwellen beteiligt sind. Ihr Einfluß ist im allgemeinen zu groß, als daß sie vernachlässigt werden könnten.

Zu den erwähnten Problemen (IV-X), die erstmalig alle gleichzeitig berucksichtigt werden sollen, kommen noch weitere neue Probleme hinzu, denen in der Fachliteratur bisher keine Aufmerksamkeit geschenkt worden war:

XI. Der Einfluß einer jeweiligen Polanordnung und -konstruktion auf die Ausbildung der Oberwellen und der räumlichen Wirbelströmung im Ankerring,
XII. der nichtlineare Einfluß der Oberwellen und
XIII. der Einfluß von Streuung und Sättigung im magnetischen Kreis.

2.4 Fourierzerlegunq der Luftspaltflußdichte

Eine Wirbelstromkupplung mit verteilter Erregerwicklng /36/ kommt der Grundwellendarstellung noch am nächsten. Ein entsprechend ausgeführter Industrietyp ist jedoch nicht bekannt. Für alle sonst Üblichen Kupplungstypen mit Klauenpolrad oder Schenkelpolrad nimmt die Induktionsverteilung im Luftspalt bei Leerlauf, d.h. bei einem Schlupf s=0 den im Bild 2.5 gezeigten Verlauf an.

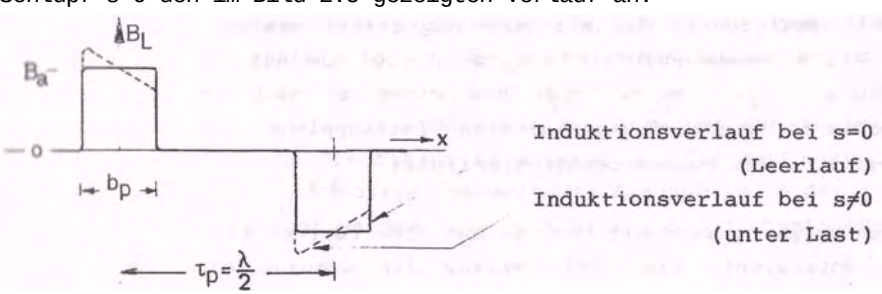


Bild 2.5: Die Verteilung der Luftspaltfeldstärke

Die Induktionsverteilung im Luftspalt tritt als Randbedingung der Ankerfeldverteilung und der Wirbelströmung auf und trägt wesentlich zur Erzeugung von Oberwellen bei.
Die harmonische Analyse der Leerlauf-Induktionsverteilung ergibt nach Bronstein /26, S. 478, Nr.6/ und nach einer entsprechenden Transformation die Reihenentwicklung:

$$B_L = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_{Ln} \quad \text{mit} \quad B_{Ln} = B_a \frac{4}{\pi \cdot n} \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right) \qquad (2.4)$$

In Bild 2.5 ist eine weitere nichtlineare Einflußgröße angedeutet: die Rückwirkung des Ankerings, die kurz als Ankerrückwirkung bezeichnet werden soll. Sie führt zu einer Verzerrung des Leerlauffeldes und zieht eine Induktionsabschwächung an der ablaufenden Polkante und eine Induktionsüberhöhung an der einlaufenden Polkante nach sich. Letzteres kann zu lokalen Sättigungseffekten und damit zu einer entsprechenden Reduktion der gesamten Luftspaltinduktion führen. Bei Klauenpolrädern tritt dieses Phänomen jedoch nur in abgeschwächter Form auf, da keine so hohen Luftspaltinduktionen wie bei Schenkelpolrädern möglich sind. Der magnetische Kreis besitzt sehr häufig konstruktionsbedingt einen Engpaß im Bereich des Halses eines Klauenpols. Bei einer "idealen Spezialkupplung" /30-34/ wird daher darauf geachtet, daß der Eisenquerschnitt an keiner Stelle des magnetischen Kreises kleiner ist als am Luftspalt. Das führt aber dazu, daß die aktive Eisenlänge L weniger als ein Drittel der gesamten Polradlänge beträgt /10, Fig. lc/. Um diese technisch und wirtschaftlich ungünstige Materialausnutzung zu vermeiden, haben sich bei handelsüblichen Wirbelstromkupplungen sogenannte "optimale" Polradformen herausgebildet und durchgesetzt, die in der Regel Oberwellen höherer Ordnung zur Folge haben. Bei einer Bauart /14, Bild 4/ wird die am Luftspalt wirksame Fläche beispielsweise dadurch verkleinert, daß die Pole angespitzt werden, was bedeutet, daß die wirksame Polbreite b_p sehr viel kleiner ist als die Polteilung τ_p: $b_p \ll \tau_p$. Bei einer zu Meß- und Vergleichszwecken entsprechend umgestalteten "Testkupplung" (Nr. 4 und 5) beträgt z.B. das Polbedeckungsverhältnis:

$$\alpha = \frac{b_p}{\tau_p} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318$$

Diese Kupplung wird mit (Nr. 5) und ohne (Nr. 4) Endringe betrieben und untersucht. Sie soll helfen, die Grenzen einer zweidimensionalen Theorie aufzuzeigen und die Allgemeingültigkeit der

dreidimensionalen Theorie zu untermauern.
Die als Gleichung 2.4 angegebene Fourierzerlegung kann für die Testkupplungen auch unter Last bei Schlupfbetrieb verwendet werden, da die Phasenverschiebung auf Grund der Ankerrückwirkung wegen der geringen Polbreite vernachlässigt werden kann.
Erst bei größeren Polbedeckungen nimmt der über dem Pol auftretende Lastwinkel zu; damit ist die unsymmetrische Induktionsverteilung bei Last durch eine genauere Fourierzerlegung zu beschreiben. Die Berechnung der Ankerrückwirkung erfolgt in Kapitel 7.4 .

2.5 Handelsübliche Klauenpolformen

Bei der in Bild 1.1 gezeigten Wirbelstromkupplung kommt die am haufigsten anzutreffende trapezförmige Polform zur Anwendung (s.a. /8, Fig. 1/), wie sie z.B. von Klauenpolgeneratoren her bekannt ist. Auf diese Weise kann der Hals der Pole im Querschnitt vergrossert werden und dadurch Sättigung in diesem Bereich vermieden werden. Außerdem ist erkennbar, daß sich die Pole nur teilweise uberläppen. Außerhalb der Überlappungszone ist das Erregerfeld homopolar. Nur in der Mitte bei z=0 herrscht eine symmetrische, heteropolare Flußdichteverteilung. Hier ist keine einseitige Vormagnatisierung vorhanden, wobei unter dieser Vormagnetisierung der Gleichanteil der Induktion B_{vor} verstanden wird, also der zeitliche Mittelwert der bei einem Schlupf im Ankerring sich ausbildenden Wechselinduktion: $B = B_{vor} + B_w$.
Die Trapezform hat zur Folge, daß, von z=0 ausgehend in beiden Richtungen gleichermaßen, aber entgegengesetzt gerichtet, einseitige Vormagnetisierung auftritt, die bis zur Länge $z=+-L_u/2$ linear ansteigt, wenn L_u die Länge des tiberlappungsbereiches bedeutet (s. Bild 2.6).
Der vormagnetisierend wirkende Gleichanteil der Induktion B_{vor} hat den Charaker eines Streuanteils, denn nur der überlagerte Wechselanteil B_w ist in der Lage, Wirbelströme zu induzieren und damit zur Drehmomentbildung beizutragen.
für die Berechnung der Wechselinduktion B_w, zunächst nur im heteropolaren Bereich, ist die Fläche A_w maßgeblich, die sich aus der Überschneidung ergibt, wenn zwei benachbarte Klauenpole in der x—z—Ebene übereinandergelegt werden (wie in Bild 2.6 u.a. gestrichelt eingezeichnet ist).

$$A_w = L * b_p(z) \quad (2.5)$$

Die zugehörige Polbreite $b_p(z)$ ist eine Funktion von z.

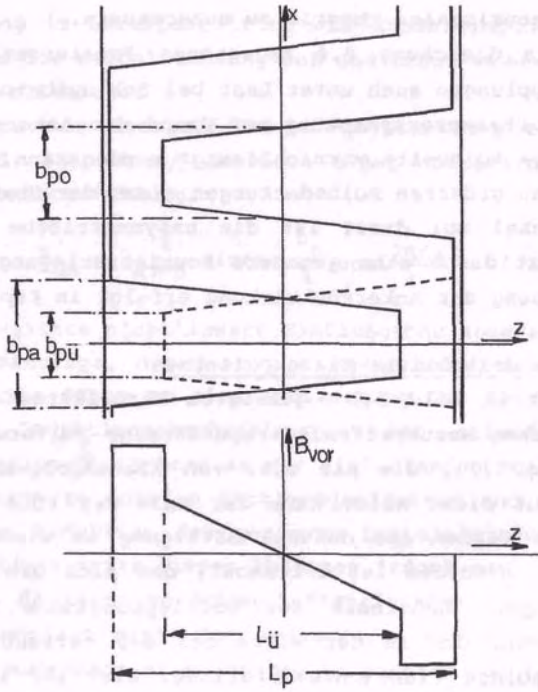


Bild 2.6: Einseitige Vormagnetisierung bei trapezförmigen, nur teilweise überlappenden Klauenpolen

$$b_p(z) = b_{po}\left(1 - |z| \cdot \frac{2}{L_ü}\left(1 - \frac{b_{pü}}{b_{po}}\right)\right) \qquad (2.6)$$

Wird diese Gleichung in die Fourierzerlegung (Gl. 2.4) eingesetzt, so wird die Luftspaltinduktion in ihrer x- und z-Abhängigkeit beschrieben durch:

$$B_L = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_a \frac{4}{\pi n} \sin\left[\frac{n\pi b_{po}}{\lambda}\left(1 - |z| \cdot \frac{2}{L_ü}\left(1 - \frac{b_{pü}}{b_{po}}\right)\right)\right] \cdot \cos\left[\frac{2\pi n x}{\lambda}\right] \qquad (2.7)$$

Im Falle einer heteropolaren Kupplung ist die wirksame Eisenlänge L gleich der geometrischen Gesamtlänge Lp: $L = L_p$ (2.8)

Bei teilweiser Überlappung muß die nur homopolar wirksame Eisenlänge, für die die Wechseldurchflutung nur halb so groß ist wie im heteropolaren Bereich, auch nur zur Hälfte berücksichtigt werden. In diesem Fall ist als wirksame Eisenlänge $L = (L_p + L_u)/2$ (2.9) zu nehmen. In einigen bekannten Fällen wird die Trapezform so weit getrieben, bis die Pole die in Bild 2.7 eingezeichnete dreieckige Geometrie besitzen ($L_ü = L$ und $b_{pü} = 0$ /7, Fig. 8/), d.h.:

$$b_p(z) = b^*_{po} \cdot \left(1 - |z| \cdot \frac{2}{L}\right) \qquad (2.10)$$

2.6 Empirisch-günstige Polform

Auf empirischen) Weg wurde ermittelt, daß die elliptische bzw. die kovexe Polform zur Übertragung eines vorgegebenen Drehmoments die geringste Amperwindungszahl benötigt. Die Polbreite ist durch die Gleichung gegeben:

$$b_p(z) = b_{pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \qquad (2.11)$$

Der Vorteil besteht darin, daß in der Mitte der Kupplung, wo die axiale Komponente der Wirbelströme und folglich auch die Drehmomentbildung am größten sind, der Pol seine maximale Breite besitzt, um zu den Rändern hin, wo sich die Verhältnisse umkehren, schmaler zu worden. Es ist bereits in den 60er Jahren experimentell ermittelt worden, daß durch eine derartige Polform bei gegebener Amperewindungszahl ein Maximum an Drehmoment übertragen werden kann. Der Trapezpol ist ein fertigungstechnischer Kompromiß.

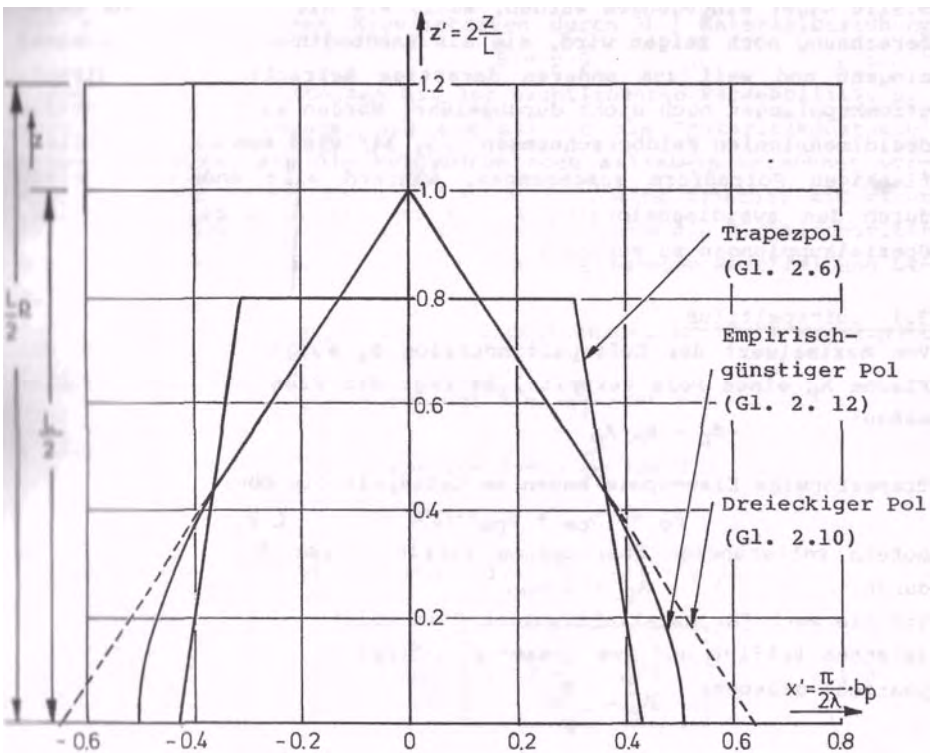


Bild 2.7; Verschiedene Polformen und ihre Beschreibung

Die in Bild 2.7 eingezeichnete empirisch-günstige Polform ist zwar nicht optimal, geht aber aus dieser als erste Näherung hervor. Sie stellt im Rahmen dieser Arbeit einen mathematischen Kompromiß dar, durch den dreieckförmige oder teilweise überlappende trapezförmige Pole näherungsweise beschrieben werden können. Die Polbreite eines derartigen Pols beträgt:

$$b_p(z) = \frac{\lambda}{n\pi} \arcsin\left[\frac{\pi b_{pi}}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right] \qquad (2.12)$$

Durch Einsetzen in die Fourierentwicklung (2.4) lautet die Gleichung für den Verlauf der Luftspaltinduktion am Umfang:

$$B_L = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_a \frac{4\, b_{pi}}{n\, \lambda} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right) \qquad (2.13)$$

Auf verschiedene Bauformen von Klauenpolrädern mußte an dieser Stelle näher eingegangen werden, weil, wie die anschließende Feldberechnung noch zeigen wird, sie als Randbedingung in die Rechnung eingeht und weil zum anderen derartige Betrachtungen an Wirbelstromkupplungen noch nicht durchgeführt worden sind: Bei den beiden dreidimensionlen Feldberechnungen /5, 34/ wird von einer parallelflankigen Polradform ausgegangen, während alle anderen Arbeiten durch den zweidimensionalen Ansatz bereits dazu gezwungen sind, Spezialkupplungen zu verwenden.

2.7 Luftspaltfluß

Vom Maximalwert der Luftspaltinduktion B_a ausgehend, die über der Fläche A_p eines Pols auftritt, beträgt der Fluß pro Pol bekanntermaßen:

$$\Phi_p = B_a \cdot A_p \qquad (2.14)$$

Trapezförmige Klauenpole haben am Luftspalt die Oberfläche:

$$A_p = (b_{pa} + b_{pü}) \cdot L/2 \qquad (2.15)$$

Sofern vollständige Überlappung vorliegt, ist die Fläche gegeben durch:

$$A_p = L * b_{po} \qquad (2.16)$$

wie sie auch für parallelflankige Pole gültig ist. Der Zusammenhang zwischen Polfluß und dem gesamten Luftspaltfluß ist über die Polpaarzahl gegeben:

$$\Phi_p = \frac{\Phi_L}{p} \qquad (2.17)$$

3. DreidimenBionale Berechnung des Wirbelstromfeldes

3.1 Herleitung der Feldgleichung

Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld der Wirbelstöme gehorche den Maxwell'schen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Form, bei der der Anteil der dielektrischen Verschiebungsstromdichte wegen der Leitfähigkeit des Stahlankerrings unberücksichtigt bleibt.

Durchflutungsgesetz: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ (3.1)

Induktiongesetz: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (3.2)

Das Ankerringfeld ist quellenfrei: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (3.3)

Seine elektrischen Eigenschaften werden durch das Ohm'sche Gesetz in der Form $\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}$ (3.4)

und seine magnetischen Eigenschaften durch die Materialbeziehung $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ (3.5)

wiedergegeben. Das Arbeiten mit der nichtlinearen Permeabilität μ_r setzt allerdings voraus, daß sie solange als "Materialkonstante" betrachtet wird, wie die Feldgrößen noch allgemein berechnet werden; d.h., wie in Kapitel 2.3.3 erläutert, wird zunächst mit einer ortlich konstanten Permeabilität gerechnet und die Nichtlinearität erst in Kapitel 5 durch Einführen einer geeigneten Beschreibung berücksichtigt.

Indem der Rotor nochmals auf das Induktionsgesetz (3.2) angewendet wird

$$- \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\upsilon}{\partial t} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} =$$

$$= -\rho \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{J} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} =$$

und mit dem Durchflutungsgesetz (3.1) $\rho \cdot \nabla^2 \vec{J} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$

ergibt sich die Feldgleichung

$$\boxed{\nabla^2 \vec{J} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}} \qquad (3.6)$$

der die Stromdichte der Wirbelströme in ihrer räumlichen und zeitlichen Verteilung genügen muß.

Dabei wird also davon ausgegangen, daß die Permeabilität dem jeweiligen Feldvektor entspricht, zumindest in kleinen Bereichen als Konstante auftritt und keine Zeitabhängigkeit besitzt, so daß auch die Ableitung $\partial \mu / \partial t$ entfallen muß, die sonst noch als weiterer inhomogener Term in der Laplacegleichung(3.6)enthalten wäre.

3.2 Stromdichtevektor

Für die Stromdichte muß zunächst ein allgemeiner Lösungsansatz gefunden werden, der der Feldgleichung (3.6) genügt und der anschließend an die Randbedingungen angebunden werden soll. Die Betrachtung der Stromdichteverteilung an der Ankerringoberfläche, wo y=0 ist und wo wegen der Kontinuitätsbedingung keine y-Komponente auftreten kann: $J_y(x,y,z) = 0$ (3.7) läßt die Vorstellung plausibel erscheinen, daß auch im Innern des Ankerrings keine y-Komponenten auftreten und die Wirbelströme auf in sich geschlossenen Bahnen in der x-z-Ebene fließen /39/ und daß wegen der Symmetrieeigenschaft des Ankerrings in seiner Mitte bei z=0 der Stromdichtevektor in z-Richtung sein Maximum erreicht und die x-Komponente verschwindet: $J_x(x,y,z=0) = 0$ (3.8) Schreitet man jedoch in beiden z-Richtungen fort, so wird man beobachten können, wie der Zeiger der Stromdichte aus der z- in die x-Richtung nach einer noch unbekannten Funktion dreht, um an den Rändern zu den umgekehrten Verhältnissen zu führen, daß räumlich die x-Komponente maximal und die z-Komponente zu Null wird:
$J_z(x,y,z=+-L/2) = 0$ (3.9)
Betrachtet man nochmals den Stromdichtevektor in der Ankerringmitte $J_z(x,y=0,z=0)$, so wird dieser Zeiger bei einer Drehung des Ankerrings gegenüber dem Polrad mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit w die Phasenverschiebung wt erfahren. Diese überlagert sich dem räumlichen Winkel, der in x-Richtung auftritt und bei der gegebenen heteropolaren Polanordnung von der Polteilung

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p} = \frac{\lambda}{2} \quad (3.10)$$

abhängig ist, die vom Ankerring aus betrachtet unter der Wellenlänge $\frac{\lambda}{2\pi}$ scheint:

$$\vec{J}(x,t) = \vec{J} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Wird den Überlegungen aus Kapitel 2.3.4 Rechnung getragen, so ist bereits an dieser Stelle zu berücksichtigen, daß neben der Grund-

welle auch eine große Zahl an Oberwellen auftreten, deren Phasenwinkel ein ganzzahliges Vielfaches n bezüglich der Grundwelle betragen:

$$\vec{J}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{J}_n(x,n,t) \text{ mit } \vec{J}_n(x,n,t) = \vec{J}_n \cdot \cos\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right] \cdot n \qquad (3.11)$$

Fur die Oberwellen gelten also die

Winkelgeschwindigkeit: $\omega_n = n \cdot \omega$ (3.12)

und die Wellenlänge: $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ (3.13)

Heben dieser Abhängigkeit in x-Richtung und der zeitlichen Abhangigkeit des Stromdichtevektors ist auch noch eine solche von der y- und z- Koordinate zu berücksichtigen:

$$\vec{J}_n = \vec{J}_n(y,z) = \vec{e}_x \cdot J_{xn}(y,z) + \underbrace{\vec{e}_y \cdot J_{yn}(y,z)}_{=0} + \vec{e}_z \cdot J_{zn}(y,z) \qquad (3.14)$$

In y-Richtung tritt, wie bereits erwähnt/39/, keine Komponente der Stromdichte auf (nach Gleichung 3.7): $\hat{J}_{yn}(y,z) = 0$.
In exponentieller Form angeschrieben, lautet die allgemeine Beschreibung des Stromdichtevektors jetzt:

$$\vec{J}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{ \vec{J}_n(y,z) \cdot e^{j(\omega n t - \frac{2\pi n x}{\lambda})} \right\} \qquad (3.15)$$

Dieser Vektor muß die Feldgleichung und die Randbedingungen erfüllen, wodurch dann im einzelnen die Amplituden bestimmbar werden.

3.3 Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

Sowohl die Grundwelle als auch alle Oberwellen des Stromdichtevektors in seiner x- und z- Komponente müssen der Feldgleichung (3.6)

Werden die Ableitungen gebildet und in die Gleichung (3.16) einge-

genügen:

in x-Richtung:
$$\frac{\partial^2 J_{xn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_{xn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_{xn}}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial J_{xn}}{\partial t}$$

in z-Richtung:
$$\frac{\partial^2 J_{zn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_{zn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_{zn}}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial J_{zn}}{\partial t} \qquad (3.16)$$

setzt:

$$\frac{\partial^2 J_{xn,zn}}{\partial x^2} = -\left[\frac{2\pi n}{\lambda}\right]^2 \cdot \hat{J}_{xn,zn}(y,z) \cdot e^{j(\omega n t - \frac{2\pi n x}{\lambda})}$$

$$\frac{\partial^2 J_{xn,zn}}{\partial (y,z)^2} = \frac{\partial^2 \hat{J}_{xn,zn}(y,z)}{\partial (y,z)^2} \cdot e^{j(\omega n t - \frac{2\pi n x}{\lambda})}$$

$$\frac{\partial J_{xn,zn}}{\partial t} = j\omega n \hat{J}_{xn,zn}(y,z)\, e^{j(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda})}$$

so ergeben sich nach der Division durch die Winkelbeziehung und nach Einführen der Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_{xn}(y,z) &= J_{xn}(y)\cdot J_{xn}(z) \\ \text{und}\qquad \hat{J}_{zn}(y,z) &= J_{zn}(y)\cdot J_{zn}(z) \end{aligned}\right| \qquad (3.17)$$

die Bestimmungsgleichungen für die Amplituden:

$$\frac{\partial^2 \hat{J}_{xn,zn}(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{J}_{xn,zn}(y,z)}{\partial z^2} = \left(j\omega n \frac{\mu}{\rho} + \left[\frac{2\pi n}{\lambda}\right]^2\right)\cdot \hat{J}_{xn,zn}(y,z)$$

oder mit der Abkürzung: $f_1^2 = j\omega n \frac{\mu}{\rho} + \left[\frac{2\pi n}{\lambda}\right]^2$ (3.18)

$$\frac{\partial^2 J_{xn}(y)}{\partial y^2}\cdot J_{xn}(z) + \frac{\partial^2 J_{xn}(z)}{\partial z^2}\cdot J_{xn}(y) = f_1^2 \cdot J_{xn}(y)\cdot J_{xn}(z) \qquad (3.19)$$

und in z-Richtung analog:

$$\frac{\partial^2 J_{zn}(y)}{\partial y^2}\cdot J_{zn}(z) + \frac{\partial^2 J_{zn}(z)}{\partial z^2}\cdot J_{zn}(y) = f_1^2 \cdot J_{zn}(y)\cdot J_{zn}(z) \qquad (3.20)$$

Die beiden Gleichungen sind in ihrer y- und z-Abhängigkeit separierbar. Es können dann die noch unbestimmten Funktionen abgekürzt angeschrieben werden durch:

$$\frac{\partial^2 J_{xn}(z)}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{J_{xn}(z)} = f_2^2 \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 J_{xn}(y)}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{J_{xn}(y)} = f_1^2 - f_2^2 = f_3^2 \qquad (3.22)$$

aus Gl.(3.19) und

$$\frac{\partial^2 J_{zn}(z)}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{J_{zn}(z)} = f_4^2 \qquad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 J_{zn}(y)}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{J_{zn}(y)} = f_1^2 - f_4^2 = f_5^2 \qquad (3.24)$$

aus Gl.(3.20)

Werden die Funktionen f_1 bis f_5 in Bezug auf die jeweils zu berechnende Koordinatenabhängigkeit konstant gehalten, so hat man hier vier gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung mit "konstanten" Koeffizienten der allgemeinen Form vorliegen:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - f^2 \cdot F(x) = 0$$

Die in der allgemeinen Lösung $F(x) = C_1 e^{fx} + C_2 e^{-fx}$ auftretenden Konstanten müssen jede durch eine Randbedingung bestimmt werden.

Die gesuchten Lösungen für die vier gefragten Amplituden lauten in allgemeiner Form:

$$\left.\begin{aligned} J_{xn}(z) &= Z_{xn} e^{f_2 z} + Z'_{xn} e^{-f_2 z} \\ J_{xn}(y) &= Y_{xn} e^{f_3 y} + Y'_{xn} e^{-f_3 y} \\ J_{zn}(z) &= Z_{zn} e^{f_4 z} + Z'_{zn} e^{-f_4 z} \\ J_{zn}(y) &= Y_{zn} e^{f_5 y} + Y'_{zn} e^{-f_5 y} \end{aligned}\right| \quad (3.25)$$

3.4 Randbedingungen

Nach Voraussetzung (II) kann der Ankerring beliebig dick angenommen werden. Die Stromdichte muß aber einen endlichen Wert besitzen, auch wenn y gegen unendlich vergrößert würde. Diese Randbedingung verlangt, daß [1] $Y_{xn} = 0$ und [2] $Y_{zn} = 0$ sind.

Die Werte für [3] $Y'_{xn} = Y_{xno}$ und [4] $Y'_{zn} = Y_{zno}$ geben jeweils die Amplitude an, die an der Ankerringoberfläche bei y=0 herrscht. Dadurch ergibt sich für:

$$\left.\begin{aligned} J_{xn}(y) &= Y_{xno}\, e^{-f_3 y} \\ \text{und für:} \quad J_{zn}(y) &= Y_{zno}\, e^{-f_5 y} \end{aligned}\right| \quad (3.26)$$

Da vereinbarungsgemäß keine y-Komponente der Stromdichte auftreten darf, muß die Abhängigkeit der x- und z-Komponenten von der radialen Tiefe y nach der gleichen Gesetzmäßigkeit erfolgen:

$$f_3 = f_5 \quad (3.27)$$

nach Gleichung (3.22) und (3.24) ergibt sich daraus:

$f_3^2 = f_1^2 - f_2^2 = f_5^2 = f_1^2 - f_4^2$

also:

$$f_2 = f_4 \quad (3.28)$$

Es ist angenommen worden, daß die Wirbelstrombahnen bezüglich der Mittellinie im Ankerring (d.h. der x-Achse bei z=0) symmetrisch verlaufen. Aus dieser Symmetriebedingung $J_{xn}(z) = -J_{xn}(-z)$ folgt

[5] $Z'_{xn} = -Z_{xn}$ und aus $J_{zn}(z) = J_{zn}(-z)$ folgt

[6] $Z'_{zn} = Z_{zn}$.

Die Randbedingung nach Gleichung (3.9), daß die z-Komponente an den beiden Enden des Ankerrings verschwinden muß, ist noch nicht ausgewertet worden: $J_{zn}(z=\pm L/2) = 0$ mit Gleichung (3.28) und der Bedingung [6] ist $J_{zn}(z=\pm L/2) = Z_{zn}(e^{f_2 L/2} + e^{-f_2 L/2}) = 0$

Da die Amplitude $Z_{zn} \neq 0$ ist, solange Wirbelströme im Ankerring fließen, muß der Klammerausdruck die Bedingung erfüllen und verschwinden:

$$e^{f_2\cdot\frac{L}{2}} + e^{-f_2\cdot\frac{L}{2}} = 2\cos\frac{f_2 L}{2\cdot j} \stackrel{!}{=} 0$$

Die Bedingung erfüllt die Funktion $\cos(\frac{m\pi}{2})$ für alle Werte von m=1,3,5,7,... ; d.h.: $\frac{f_2 L}{2\cdot j} = \frac{m\cdot\pi}{2}$ bzw. $f_2 = j\frac{m\pi}{L}$ (3.29)

damit ergibt sich für

$$J_{znm}(z) = Z_{zn}\cdot\left(e^{j\frac{m\pi z}{L}} + e^{-j\frac{m\pi z}{L}}\right)$$

d.h. $$J_{znm}(z) = Z_{zn}2\cdot\cos(\frac{m\pi z}{L})$$

und für $$J_{xnm}(z) = Z_{xn}\cdot\left(e^{j\frac{m\pi z}{L}} - e^{-j\frac{m\pi z}{L}}\right) \qquad (3.30)$$

d.h. $$J_{xnm}(z) = Z_{xn}2\cdot j\cdot\sin(\frac{m\pi z}{L}) \qquad (3.31)$$

Zusammen mit den Gleichungen(3.26) können die Stromdichteamplituden nach Gleichung(3.17) wieder zusammengefügt werden:

$$\left.\begin{aligned}\hat{J}_{znm}(y,z) &= \hat{J}_n e^{-f_3 y}\cos(\frac{m\pi z}{L})\\ \hat{J}_{xnm}(y,z) &= \hat{J}_{xno} e^{-f_3 y}\cdot j\cdot\sin(\frac{m\pi z}{L})\end{aligned}\right| \qquad (3.32)$$

mit der maximalen Amplitude bei x=0, y=0 und z=0:

[7] $\hat{J}_n = 2\cdot Z_{zn}\cdot Y_{zno}$

und der Amplitude $\hat{J}_{xno} = 2\cdot Z_{xn}\cdot Y_{xno}$

Als letzte Bedingung müssen die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt werden, also auch die Anwendung der Divergenz auf das Durchflutungsgesetz (Gl. 3.1):

$$\operatorname{div}\vec{J} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0$$

bzw. mit den x- und z-Komponenten des Stromdichtevektors ausgedrückt: [8] $$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

Der Zeiger nach Gleichung(3.15) mit seinen Amplituden nach Gleichung(3.32)lautet mittlerweile:

$$J_x(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{Re}\{J_{xnm}\} \text{ mit: } J_{xnm} = \hat{J}_{xno}\cdot j e^{-f_3 y}\sin(\frac{m\pi z}{L})\cdot e^{j(\omega nt-\frac{2\pi nx}{\lambda})}$$

$$J_z(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{Re}\{J_{znm}\} \text{ mit: } J_{znm} = \hat{J}_n\cdot e^{-f_3 y}\cdot\cos(\frac{m\pi z}{L})\cdot e^{j(\omega nt-\frac{2\pi nx}{\lambda})} \qquad (3.33)$$

Die Bedingung[8] muß auch für alle Oberwellen erfüllt werden:

$$\hat{J}_{xno} = \hat{J}_n \cdot \frac{m\lambda}{L2n} \quad (\quad 3.34 \quad)$$

Diese, die Wirbelströme in ihrer räumlichen Verteilung beschreibenden Gleichungen müssen trotz ihrer relativem Allgemeingültigkeit die Einschränkung erfahren, für Kupplungen mit Endringen (z.B. die Testkupplung 5) nicht anwendbar zu sein, da bei diesen Kupplungen an den Rändern der aktiven Zone bei z=+- L/2 die z-Komponente der Stromdichte nicht verschwindet. Wie groß sie tatsachlich ist, ist nicht bekannt. Bei der Voraussetzung (VII, Kap. 2.3.2) geht man etwas willkürlich und vereinfachend davon aus, dass sie genauso groß ist wie in der Ankerringmitte (bei z=0). Der zweidimensionale Ansatz verlangt also, daß der $\cos(m\cdot\pi/2)$ maximal wird. Dies ist für m=0 erfüllt. Mit dieser Bedingung verschwindet konsequenterweise auch die x-Komponente der Stromdichte.

3.5 Wirbelstromverteilung

Durch die Gleichungen(3.33)sind die Wirbelströme an sich schon beschrieben. Für das bessere Verständnis der Feldverteilung sind noch einige Umformungen zweckmäßig: Die Funktion £$ wird komplex zerlegt $f_3 = f_r + jf_i$ oder $f_3^2 = f_r^2 - f_i^2 + j2f_rf_i$ nach Gl. 3.22 mit Gl. 3.18 und Gl. 3.29 ist:

$$f_3^2 = f_1^2 - f_2^2 = j\cdot\omega\cdot n\,\frac{\mu}{\rho} + \left(\frac{2\pi\,n}{\lambda}\right)^2 - \left(j\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

durch Koeffizientenvergleich betragen

der Realteil:

$$f_r^2 - f_i^2 = \left[\frac{2\pi\,n}{\lambda}\right]^2 + \left[\frac{m\pi}{L}\right]^2 = \frac{1}{\lambda_w^2}$$

und der Imaginärteil:

$$2f_rf_i = \omega\,n\,\frac{\mu}{\rho} = \frac{2}{d^2}$$

mit der Eindringtiefe für die Grundwelle der Wirbelströme nach Gl.(2.1)und für alle Oberwellen, wenn Gl. (3.12) berücksichtigt wlrd:

$$d = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega n\mu}} \quad (3.35)$$

und mit der Abkürzung λ_w , einer sogenannten wirksamen Wellenlänge, die sich aus der Wellenlänge λ und Ankerlänge wie folgt zusammensetzt:

$$\lambda_w = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi\,n}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}} \quad (3.36)$$

d.h.:

$$f_r^2 = \frac{1}{2\cdot\lambda_w^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\cdot\lambda_w^4} + \frac{1}{d^4}}$$

Es soll an dieser Stelle die sehr wichtige Vernachlässigung eingeführt werden:

$$d^2 \ll 2\,\lambda_w^2 \qquad (3.37)$$

Sie bedeutet, daß in dem interessierenden Drehzahlbereich einer industriell genutzten Wirbelstromkupplung die Eindringtiefe d sehr viel kleiner ist als die wirksame Wellenlänge λ_w ,

also:

$$\frac{2\rho}{\omega\cdot\mu\cdot n} \ll \frac{2}{\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \qquad (3.38)$$

oder:

$$\frac{\mu}{\rho} \gg n\cdot\frac{\pi^2}{\omega}\cdot\left[\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{m}{nL}\right)^2\right] \qquad (3.39)$$

Bei der mittleren Baugröße der untersuchten Wirbelstromkupplungen (Nr.2) betragen die Ankerringdicke d_a = 26mm, die wirksame Wellenlänge λ_w = 8,64mm, während bei Grundwellenbetrachtung (n=l; m=l) die Eindringtiefen von 1,5mm bis 4,6mm variieren. Durch die Vernachlässigung (Gl. 3.37) wird also ein Fehler begangen, der zwischen 1,5% und 14% liegt. Hier tritt die Gleichung zunächst in quadrierter Form auf, weshalb der Fehler nur 0,02% bis maximal 2% beträgt. Genauere Betrachtungen unter Einbeziehung der Oberwellen ergeben sich aus der nichtlinearen Berechnung der Eindringtiefe in Kapitel 6.4.

Wenn also $\frac{1}{d^2} \gg \frac{1}{2\cdot\lambda_w^2}$ ist, so erst recht $\frac{1}{d^4} \gg \frac{1}{4\cdot\lambda_w^4}$

d.h.

$$f_r^2 = \frac{1}{2\cdot\lambda_w^2} \pm \frac{1}{d^2} \approx \pm\frac{1}{d^2} \quad \text{mit:} \quad f_r = \frac{1}{d};\ f_i = \frac{1}{d} \quad \text{ist:} \quad f_3 = \frac{1+j}{d} \qquad (3.40)$$

eingesetzt in Gleichung (3.33) gilt:

$$J_{xnm} = \hat{J}_n\cdot j\cdot\frac{m\cdot\lambda}{L2n}\cdot\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot e^{-\frac{y}{d}}\cdot e^{j\left(\omega nt-\frac{2\pi nx}{\lambda}-\frac{y}{d}\right)}$$

und

$$J_{znm} = \hat{J}_n\cdot\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot e^{-\frac{y}{d}}\cdot e^{j\left(\omega nt-\frac{2\pi nx}{\lambda}-\frac{y}{d}\right)} \qquad (3.41)$$

Wird die Eulersche Relation verwendet, wobei nach der Vereinbarung von Gleichung (3.15) nur der Realteil in Betracht zu ziehen ist, so lautet der Stromdichtevektor in seiner endgültigen Form:

$$\vec{J} = \vec{e}_x J_x + \vec{e}_z J_z \qquad \text{mit:}$$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -\hat{J}_n \cdot \frac{m\lambda}{2Ln} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \sin\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) \\ J_z &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \hat{J}_n \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3.42)$$

Es ist jetzt leicht erkennbar, daß
(1.) der Stromdichtevektor der Wirbelströme zeitlich und räumlich (in x und z) sinusförmig verteilt ist oder aus der Überlagerung entsprechender Stromoberwellen besteht, daß
(2.) seine beiden Komponenten gegeneinander um 90° phasenverschoben auftreten, daß
(3.) die Amplitude exponentiell mit zunehmender radialer Tiefe y abnimmt und
(4.) der Stromdichtevektor gleichzeitig proportional zur radialen Tiefe eine Phasendrehung vollzieht.
Damit ist der Stromverdrängungseffekt mathematisch beschrieben, der besagt, daß die Wirbelströme an die Ankerringoberfläche zum Luftspalt hin drängen, um dort die bekannterweise sehr hohen Stromdichten zu verursachen. Dies gilt aber in besonderem Maße für die Oberwellen, deren Eindringtiefe (nach Gl. 3.35) mit steigender Ordnungszahl immer kleiner wird. Das bedeutet aber auch, daß der Oberwellengehalt der Stromdichte an der Ankerringoberfläche am grössten ist. Die Dämpfungseigenschaft der Wirbelströme ist daran erkennbar, daß die Eindringtiefe mit höheren Drehzahlen ebenfalls abnimmt und damit der Stromdichtevektor ins Ankerinnere hinein starker abklingt.

3.6. Räumliches Feldlinienbild der Wirbelströme

Die Differentialgleichung der Feldlinien ist nach Bronstein /26, S. 460/ durch die Steigungsbedingung gegeben:

$$\frac{J_{xn}}{J_{zn}} = \frac{dx}{dz} = -\frac{m\lambda}{2Ln} \cdot \tan\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \tan\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right)$$

Nach Trennung der Variablen ist das Integral zu lösen:

$$\int \cot\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) dx = -\frac{m\lambda}{2Ln} \int \tan\left(\frac{m\pi z}{L}\right) dz$$

Die Darstellung soll normiert und zum Zeitpunkt t=0 erfolgen:

$$x' = x \cdot 2/\lambda \; ; \; y' = y/d; \; z' = z/L$$

Als Losung erhält man die Gleichung, die die Feldlinien bestimmt:

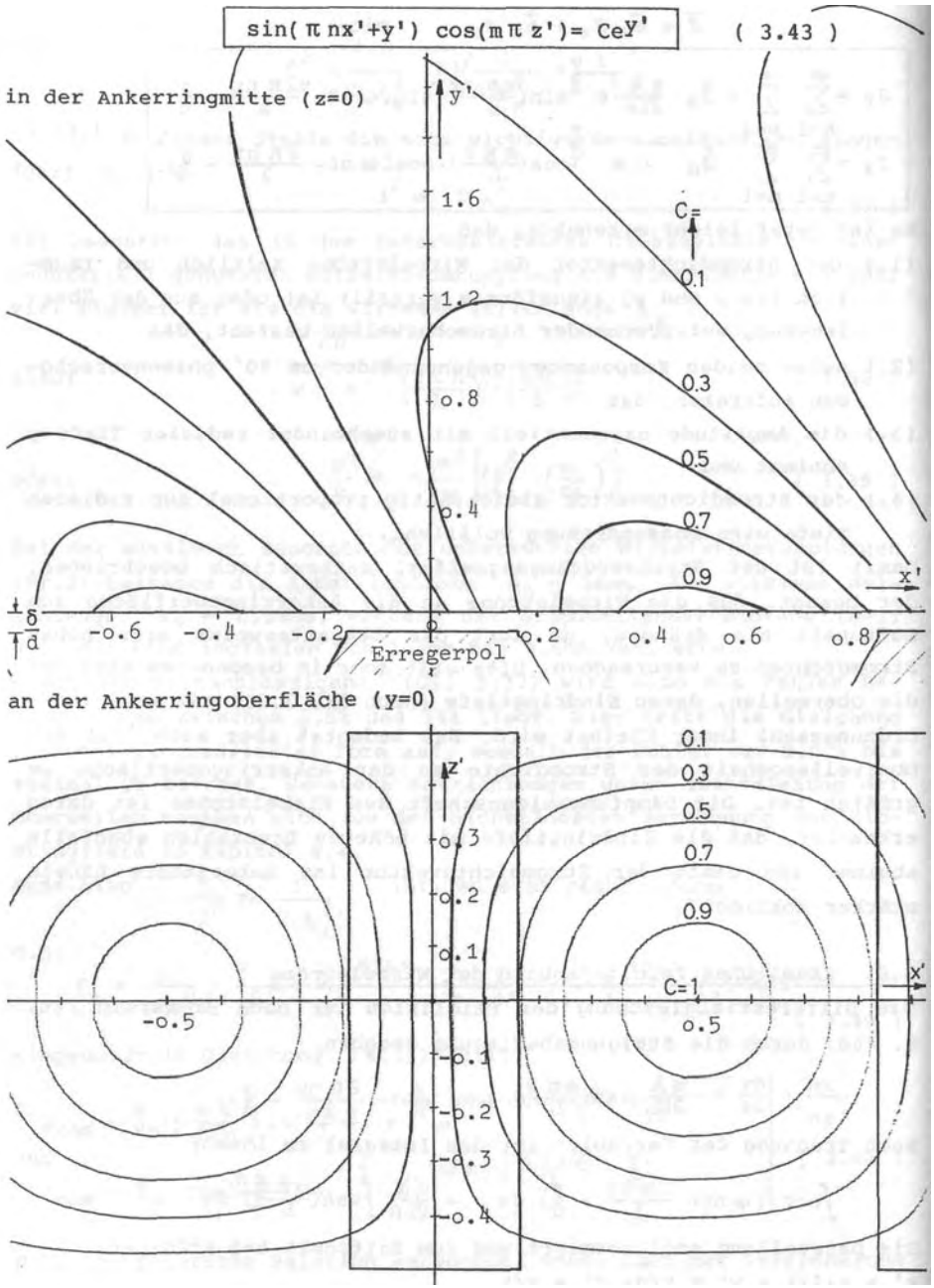


Bild 3.1: Die Feldlinien der Wirbelströme (n=l,m=l)

Bild 3.1 veranschaulicht die Verteilung der Stromdichte zunächst an der Ankarringoberfläche bei y=0 in ihrer räumlichen Lage zu den Erregerpolen. Die Strömung ist in ümfangsrichtung abwechselnd links- und rechtsdrehend zu denken. Ihr Gradient nimmt zur Mitte der konzentrischen Konturen hin zu. Der Übersichtlichkeit sowie der Allgemeingültigkeit halber ist nur die Grundwelle der Wirbelstromverteilung dargestellt. Mit zunehmender Eindringtiefe nimmt die Stromdichte ab, wie das darüber aufgetragene Feldlinienbild in der x-y-Ebene für die Ankerringmitte bei z=0 wiedergibt. Das bedeutet, daß die Wirbelstrombahnen, die die Vektoren konstanter Amplitude beschreiben, kürzer werden.
Bild 3.2 laßt diesen Zusammenhang erkennen. Bei dieser räumlichen Darstellung wird außerdem die in Bewegungsrichtung auftretende Phasenverachiebung sehr deutlich.

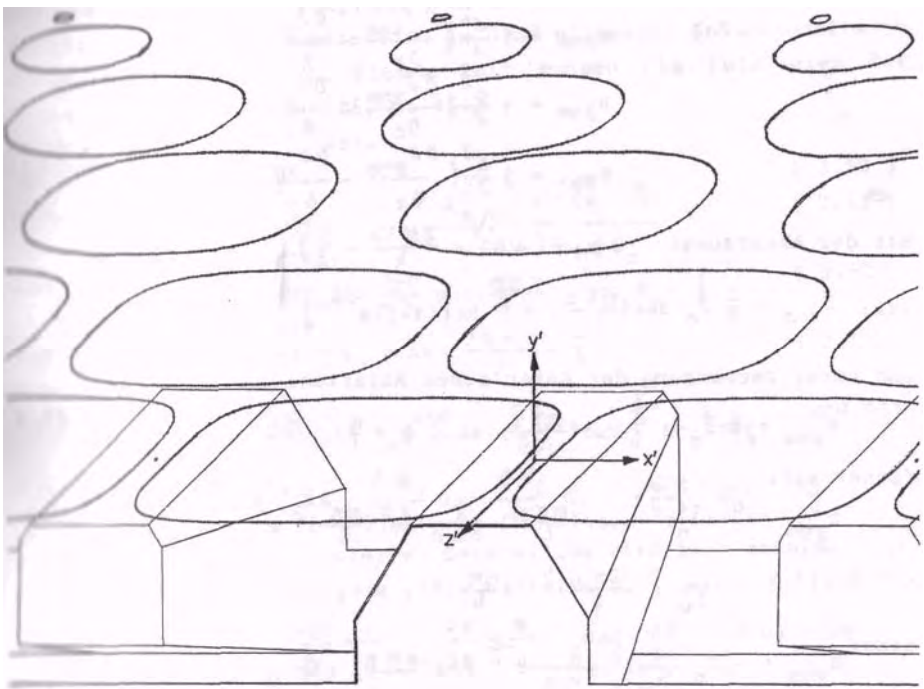


Bild 3.2: Die räumliche Ausbildung der Wirbelströme im Ankerring $\vec{J}(x',y',z')$ bezogen auf die sehr geringe Eindringtiefe d:(y'=y/d) undd dadurch in y'- Richtung sehr stark gedehnt dargestellt.

3.7 Dreidimensionale Feldstärkeverteilung

Der Zusammenhang zwischen der Stromdichte im Ankerring und der Feldstärke ist durch das Induktionsgesetz (Gl. 3.2 unter Berücksichtigung der Gleichungen 3.4 und 3.5) gegeben:

$$\rho \,\mathrm{rot}\, \vec{J} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (3.44)$$

Wird davon ausgegangen, daß jeder von einer Wechselinduktion $\mu \cdot \vec{H}$ induzierte harmonische Anteil des Stromdichtevektors ebenfalls sinusförmig ist und die gleiche Frequenz $\omega \cdot n$ besitzt wie die ihn erregende Feldharmonische, so läßt sich die zeitliche Abhängigkeit (von Gl. 3.44) bereits angeben:

$$\mathrm{rot}\, \vec{J}_n = -\frac{\mu}{\rho} \cdot j \cdot \omega n \cdot \vec{H}_n = -j \frac{2}{d^2} \cdot \vec{H}_n \qquad (3.45)$$

Die drei Bestimmungsgleichungen für je eine Komponente einer Feldharmonischen lauten:

$$H_{xnm} = j \cdot \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial J_{znm}}{\partial y} - \frac{\partial J_{ynm}}{\partial z} \right)$$

$$H_{ynm} = j \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial J_{xnm}}{\partial z} - \frac{\partial J_{znm}}{\partial x} \right)$$

$$H_{znm} = j \frac{d^2}{2} \left(\frac{\partial J_{ynm}}{\partial x} - \frac{\partial J_{xnm}}{\partial y} \right)$$

Mit der Abkürzung: $\psi_n = \left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d} \right)$

ist: $H_{xnm} = \frac{d}{2} \cdot \hat{J}_n \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \mathrm{Re}\left\{(1-j)e^{j\psi_n}\right\}$

und unter Verwendung der Euler'schen Relation:

$$H_{xnm} = \frac{d}{\sqrt{2}} \hat{J}_n \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\psi_n + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (3.46)$$

ferner ist:

$$H_{ynm} = -\frac{d^2}{2} \cdot \hat{J}_n e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \frac{\lambda}{2\pi n} \cdot \mathrm{Re}\left\{ \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cdot e^{j \cdot \psi_n} + \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{j \cdot \psi_n} \right\}$$

mit Gl.(3.36): $\frac{1}{\lambda_w^2} = \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ ist: $\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\lambda_w^2} \cdot e^{j\psi_n}\right\} = \frac{\cos \psi_n}{\lambda_w^2}$

also:

$$H_{ynm} = -\hat{J}_n \cdot \left(\frac{d}{\lambda_w}\right)^2 \cdot \frac{\lambda}{4\pi n} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos \psi_n \qquad (3.47)$$

entsprechend gilt für:

$$H_{znm} = -\frac{d}{2} \cdot \hat{J}_n \cdot \frac{m\lambda}{2nL} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \mathrm{Re}\left\{(1+j)e^{j\,\psi_n}\right\}$$

und umgeformt:

$$H_{znm} = -\frac{d}{\sqrt{2}} \hat{J}_n \cdot \frac{m\lambda}{2nL} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\psi_n + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (3.48)$$

An jeder Stelle im Ankerring setzt sich der Feldstärkevektor $\vec{H}$ aus den drei Komponenten zusammen: $\vec{H} = \vec{e}_x \cdot H_x + \vec{e}_y \cdot H_y + \vec{e}_z \cdot H_z$

mit:

$$H_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{J}_n \cdot d}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \sin\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$H_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \hat{J}_n \cdot \left(\frac{d}{\lambda_w}\right)^2 \frac{\lambda}{4\pi n} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) \quad (3.49)$$

$$H_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \frac{\hat{J}_n \cdot d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\lambda}{2nL} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d} + \frac{\pi}{4}\right)$$

3.8 Induktionslinien im Wirbelstromzylinder

Die räumliche Verteilung der Feldstärke bzw. der Induktion im Ankerring kann sehr anschaulich an Hand einzelner Induktionslinien dargestellt werden. In diesem Fall müssen die Feldlinien der Bedingung genügen, daß /26, S. 460/

$$\frac{H_{xnm}}{dx} = \frac{H_{ynm}}{dy} = \frac{H_{znm}}{dz} \quad \text{ist;} \quad (3.50)$$

also:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_{xnm}}{H_{ynm}} = - \frac{2\pi n \cdot \lambda_w^2}{\lambda \cdot d \sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\left(\psi_n + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \psi_n} \quad (3.51)$$

und außerdem:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{H_{xnm}}{H_{znm}} = - \frac{2nL}{m\lambda} \cdot \cot\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \tan\left(\psi_n + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.52)$$

Aua der Substitution: $\psi_n = \omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}$ (3.53)

folgen $\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = - \frac{2\pi n}{\lambda}$ und $\frac{\partial \psi_n}{\partial y} = - \frac{1}{d}$ und das totale Differential: $d\psi_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} dy = - \frac{2\pi n}{\lambda} dx - \frac{dy}{d}$ für

den Zweck einer normierten Darstellung wird hier ebenfalls gesetzt: $x' = 2nx/\lambda$; $y' = y/d$; $z' = mz/L$

d.h.: $\frac{dx'}{dx} = \frac{2n}{\lambda}$ $\frac{dy'}{dy} = \frac{1}{d}$ $\frac{dz'}{dz} = \frac{m}{L}$ und $d\psi_n = -\pi\, dx' - dy'$

Die normierten Gleichungen lauten:

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{2nL}{\lambda m} \cdot \frac{dx}{dz} = -\left(\frac{2nL}{\lambda m}\right)^2 \cdot \cot(\pi z') \cdot \tan\left(\psi_n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dx'}{dy'}\pi = \pi \cdot \frac{2nd}{\lambda} \cdot \frac{dx}{dy} = -\left(\frac{2\pi n}{\lambda} \cdot \lambda_w\right)^2 \cdot (1 + \tan \psi_n)$$

$$\pi \frac{dx'}{dy'} = -\frac{1+\tan \psi_n}{2} \qquad (3.54)$$

und

$$\frac{dx'}{dz'} = -\cot(\pi z') \frac{1+\tan \psi_n}{1-\tan \psi_n} \qquad (3.55)$$

mit

$$\frac{d\psi_n}{dx'} = -\pi - \frac{dy'}{dx'} = \pi \cdot \left[\frac{2}{1+\tan \psi_n} - 1\right] = \pi \cdot \frac{1-\tan \psi_n}{1+\tan \psi_n}$$

eingesetzt in

$$\frac{1-\tan \psi_n}{1+\tan \psi_n} \cdot dx' = -\cot(\pi \cdot z')dz'$$

liefert für die Gleichung

$$\int d\psi_n = -\pi \int \cot(\pi z')dz'$$

die allgemeine Lösung:

$$\psi_n = -\ln \sin(\pi z') + K_1 \qquad (3.56)$$

weiterhin gilt:

$$\frac{d\psi_n}{dy'} = -1 - \pi \frac{dx'}{dy'} = \frac{1+\tan \psi_n}{2} - 1 = \frac{\tan \psi_n - 1}{2}$$

also:

$$\int \frac{2}{\tan \psi_n - 1} \cdot d\psi_n = \int dy'$$

mit der Lösung:

$$-\psi_n + \ln(\sin \psi_n - \cos \psi_n) = y' + K_2 \qquad (3.57)$$

durch Einsetzen des oben bereits berechneten Wertes für ψ_n kann die Lösung:

$$\ln(\sin \psi_n - \cos \psi_n) + \ln \sin(\pi z') = y' + \ln C$$

in die endgültige Form der Feldliniengleichung übergeführt werden:

$$\boxed{(\sin \psi_n - \cos \psi_n) \cdot \sin(\pi z') = C \cdot e^{y'}} \qquad (3.58)$$

In Bild(3.3) sind mehrere Induktionslinien dargestellt, wie sie an beliebiger Stelle von z' $(z' \neq 0)$ im Ankerring in der x'-y'-Ebene verlaufen. Als Parameter tritt die Integrationskonstante $K = C/\sin \pi z'$ auf.

Vergleicht man die Induktions- bzw. Feldstärkeverteilung (nach Bild 3.3) mit der entsprechenden Darstellung der Wirbelstromfeldlinien (Bild 3.1), so erkennt man deutlich den Lastwinkel von $\gamma = 45°$ in Bewegungsrichtung. Dieser Winkel ist bei Wirbelströmen typisch. Es darf allerdings nicht ganz vergessen werden, daß ein Übergangsbereich $(\text{für } 0 \leqq \gamma \leqq 45°)$ existieren muß, da der Winkel bei Stillstand verschwindet. Kleinere Lastwinkel als 45° treten aber nur bei extrem kleinen Drehzahlen auf, unter der Voraussetzung also, daß die Beziehung (Gl. 3.37) keine Gültigkeit mehr besitzt. In diesem Bereich sind jedoch die erzeugten Drehmomente derart gering, daß aus der Sicht der Praxis

Kein Interesse und auch keine Notwendigkeit für eine entsprechende Erweiterung Theorie besteht.

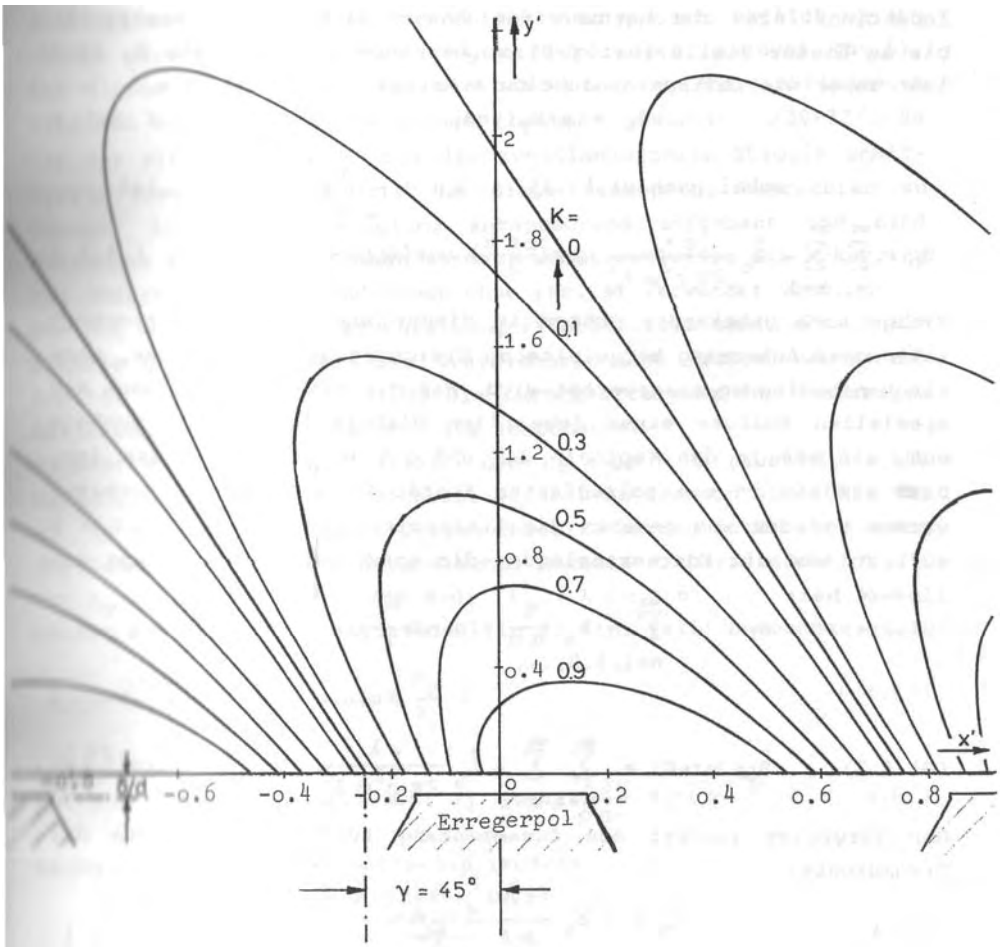


Bild 3.3: Induktionslinien im Wirbelstromzylinder

4. Drehmomentberechnung

4.1 Luftspaltinduktion

Die in Kapitel 3 berechneten Vorgänge im Wirbelstromzylinder setzen eine entsprechende Luftspalterregung voraus. Ihre Induktionslinien durchsetzen die Ankerringoberfläche senkrecht. Die an dieser Stelle (bei y=0) vorherrschende Feldstärke H_y (y=0) läßt daher die Luftspaltinduktion erwarten (mit Gl. 3.49):

$$B_L = \mu \cdot H_y(y=0) \quad (4.1)$$

wobei nach Gl.(3.35) $\mu = \frac{2\cdot\rho}{\omega \cdot n d^2}$ ist.

$$B_L = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} - \hat{J}_n \frac{\rho\lambda}{2\pi \cdot n^2 \cdot \omega \cdot \lambda_w^2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda}\right) \quad (4.2)$$

Einige noch unbekannte Größen in dieser aus der Wirbelstromverteilung im Ankerring hergeleiteten Gleichung sind bestimmbar, wenn die Randbedingung ausgewertet wird, daß die Gleichung(4.2)auch der speziellen Polform einer jeweiligen Wirbelstromkupplung genügen muß, wie sie in den Kapiteln 2.5 und 2.6 untersucht worden ist. Dazu muß sie in ein polradfestes Koordinatensystem transformiert werden von dem aus gesehen die Luftspaltinduktion unter $\omega t = 0$ auftritt und die Fourierzerlegung die entsprechende Beziehung geliefert hat:

(Gl.2.4): $$B_L = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_a \cdot \frac{4}{\pi n} \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{\lambda}\right) \stackrel{!}{=}$$

(Gl.4.2): $$B_L(\omega t=0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} - \hat{J}_n \cdot \frac{\rho\lambda}{2\pi \cdot n^2 \cdot \omega \cdot \lambda_w^2} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{\lambda}\right)$$

Der Vergleich liefert den Zusammenhang für die Amplituden der Stromdichte:

$$\hat{J}_n = - B_a \frac{8n\omega \cdot \lambda_w^2}{\rho \cdot \lambda} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right)}{\sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \quad (4.3)$$

Ist es durch Vergleich gelungen, die Oberwellen in x-Richtung zu beschreiben, so ist es ebenfalls erforderlich, die Reihenentwicklung in axialer (z-)Richtung für die spezielle Bauform der zu untersuchenden Kupplungen vorzunehmen.

4.2 Oberwellenspektren

Bei den in Kapitel 6.1 beschriebenen fünf Untersuchungsobjekten lassen sich zwei voneinander abweichende Bauformen unterscheiden:

4.2.1 Testkupplungen

Das Polrad der Testkupplungen weist parallelflankige, vollständig Oberlappennde Pole auf. Damit Endeffekte so gut wie möglich unterdruckt werden, ist der Ankerring mit Endringen bestückt (Nr.5). Bei diesem Kupplungstyp sind die bisher besten Übereinstimmungen zwischen Messungen und Rechnungen bekannt geworden /30-32/. Es ist der einzige Typ, bei dem die zweidimensionale Theorie unmittelbar anwendbar sein soll. Um diese Behauptung überprüfen zu konnen, ist die Testkupplung entsprechend aufgebaut und sind Messungen an ihr vorgenommen worden, wobei wahlweise ein Ankerring mit Endringen (Nr. 5) und einer ohne (Nr. 4) verwendet wird. Die zur mathematischen Beschreibung erforderliche zweidimensionale Theorie geht direkt aus der dreidimensionalen hervor, wenn nach Kapitel 3.4 m=0 gesetzt wird. Die Zurückverfolgung der bisherigen Herleitung zeigt, daß dadurch die Komponenten

$J_x(m=0) = 0$ (aus Gl. 3.42) und $H_z(m=0) = 0$ (aus.Gl. 3.49)

verschwinden, wie dies üblicherweise auch angenommen wird (VI; VII s. /30/). Im Gegensatz zu diesen Theorien werden jetzt aber neben der Grundwelle auch die harmonischen Anteile mitberücksichtigt.

λ_w (nach Gl. 3.36) für m=0: $\lambda_w = \lambda / \pi\, 2\, n$ (4.4)

werden die Stromdichteamplituden (im 2. dim. Fall) berechnet aus:

$$\hat{J}_n(m=0) = -B_a \frac{\lambda \cdot 2\omega}{\rho \cdot \pi^2 \cdot n} \cdot \sin\left(n\pi \frac{b_p}{\lambda}\right) \quad (4.5)$$

Auf die Grundwellenamplitude: $\hat{J}_1 = -B_a \frac{\lambda\, 2\omega}{\rho \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right)$ (4.6)

bezogen lauten die Oberwellenamplituden:

$$\frac{\hat{J}_n}{\hat{J}_1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(n\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right)} \quad (4.7)$$

Das in Bild 4.1 gezeigte Oberwellenspektrum der zu untersuchenden Testkupplungen, bei denen das Polbedeckungsverhältnis

$\alpha = \frac{b_p}{\tau_p} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318$ beträgt, zeigt,

daß besonders von der 3. Oberwelle wesentliche Einflüsse herrühren können.

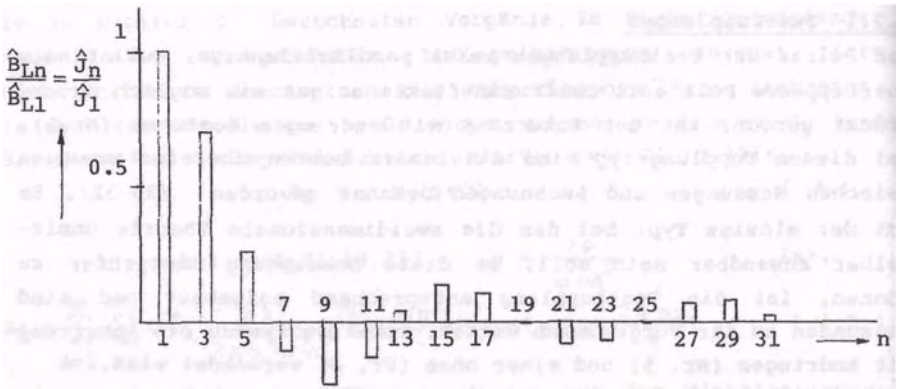


Bild 4.1; Oberwellenspektrum der Luftspaltinduktion und der Ankerringströme für die Testkupplung 5.

Die Einbeziehung der Oberwellen in den Berechnungsgang erweist sich als unumgänglich. Das bei den Testkupplungen an der Aston University in Birmingham /30-32/ gewählte Polbedeckungsverhältnis von α=0,5 (...0,7) hat den Vorteil, daß die Amplitude der dritten Oberwelle nur halb so groß ist. Das übrige Spektrum weist allerdings eine kaum feststellbare Verbesserung auf.
Das Oberwellenspektrum der Luftspaltinduktion ist mit dem der Ankerringströme identisch.

4.2.2 Handelsübliche Kupplungen

Bei dem sehr viel interessanteren zweiten Fall geht es um handelsübliche Wirbelstromkupplungen verschiedener Baugrößen, bei denen die dreidimensionale Theorie zu verwenden ist. Für empirisch günstig gestaltete Pole und näherungsweise auch für dreieckige oder teilweise überlappende trapezförmige Pole wurde im Kapitel 2.6 die Gleichung (2.13) für die Luftspaltinduktion hergeleitet:

(Gl. 2.13)
$$B_L = \sum_{n=1}^{\infty} B_a \cdot \frac{4b_{pi}}{n\cdot\lambda} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{\lambda}\right) \quad \hat{=}$$

(Gl. 4.2)
$$B_L(\omega t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \hat{J}_n \cdot \frac{\rho\cdot\lambda}{2\pi\cdot n^2\omega\lambda_w^2} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{\lambda}\right)$$

Der Vergleich der Winkel zeigt, daß m=l gewählt werden muß. Bei der empirisch günstigen Polform treten demnach keine harmonischen Anteile in axialer (z-)Richtung auf; auch bei geometrischer Ähnlichkeit der Pole sind die entsprechenden Anteile mehr oder weniger qut vernachlässigbar. Der Vergleich der Amplituden liefert für m=l den Zusammenhang:

$$\hat{J}_{n(m=1)} = -B_a \frac{8\pi\cdot n\omega\cdot\lambda_w^2\cdot b_{pi}}{\rho\cdot\lambda^2} \qquad (4.8)$$

$$\lambda_w^2(m=1) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} = \frac{\lambda^2\cdot L^2}{\pi^2\cdot\left[(2nL)^2 + \lambda^2\right]} \qquad (4.9)$$

einzusetzen ist. Es betragen die Amplitude der Grundwelle

$$\hat{J}_1 = -B_a \frac{8L^2\omega\cdot b_{pi}}{\pi\rho\cdot(4L^2+\lambda^2)} \qquad (4.10)$$

sowie das Spektrum der Harmonischen:

$$\frac{\hat{J}_n}{\hat{J}_1} = n\cdot\frac{4L^2+\lambda^2}{4n^2L^2+\lambda^2} = \frac{1+\beta^2}{n+\beta^2\frac{1}{n}} \qquad (4.11)$$

$$\beta = \frac{\tau_p}{L} = \frac{\lambda}{2L} \qquad (4.12)$$

Fur die mittlere Kupplungsgröße (Nr.2 mit ß=0,58) ist das Oberwellenspektrum in Bild 4.2 gezeigt.
Die Amplituden der Luftspaltinduktion betragen nach Gl.(2.13):

$$\hat{B}_{Ln} = B_a \cdot \frac{4b_{pi}}{n\cdot\lambda} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \qquad (4.13)$$

Bezieht man auch hier die Oberwellen auf die Grundwellenamplitude $\hat{B}_{L1}$ ao erhält man das Verhältnis:
(4.14)

$$\frac{\hat{B}_{Ln}}{\hat{B}_{L1}} = \frac{1}{n}$$

Das Oberwellenspektrum der Luftspaltinduktion ist ebenfalls in Bild 4.2 eingetragen.

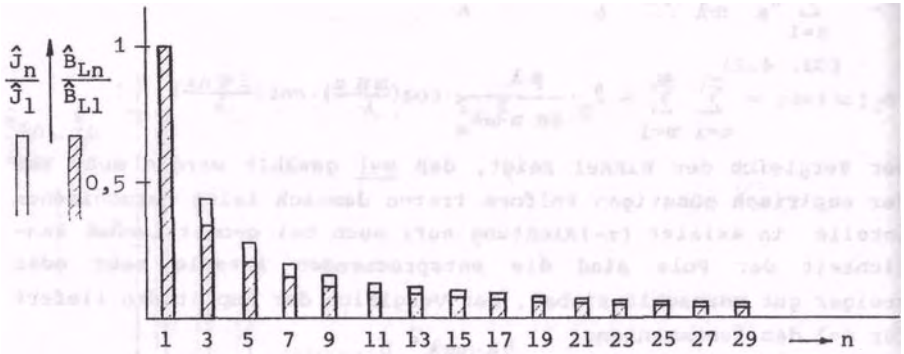


Bild 4.2; Das Oberwellenspektrum der Ankerringstöme und der Luftspaltinduktion handelsüblicher Wirbelstromkupplungen (Nr. 2).

4.3 Wirbelstromverluste

Die Wirbelstromverluste sind für jeden einzelnen Ankerringstrom - auch jeden Oberwellenanteil durch die Beziehung $I_A^2 * R_A$ gegeben, wobei es sich bei R_A um den jeweiligen Bahnwiderstand handelt, der sich einem Wirbelstrom entgegenstellt. Der Ankerring wird als homogener Körper mit dem spezifischem Widerstand ρ angesehen. Die Wirbelströme und ihre Bahn sind durch die in Kapitel 3 hergeleiteten Gleichungen (3.42) gegeben. Die gesamten im Ankerring in Stromwärme umgesetzten Verluste setzen sich aus den Anteilen zusammen, die von der Grundwelle und von den Oberwellen herrühren.

$$P_{VA} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{An} \quad \text{mit} \quad P_{An} = \underbrace{\iiint}_{V} \rho \cdot J^2 \, dx \, dy \, dz \qquad (4.15)$$

Jeder einzelne Beitrag zu den Gesamtverlusten wird durch die Integration des zum Quadrat erhobenen Stromdichtezeigers über das gesamte Ankerringvolumen berechnet:

$$P_{An} = \rho \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{p\lambda} (J_x^2 + J_z^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$P_{An} = \rho \cdot \hat{J}_n^2 \int\int\int e^{-2\frac{y}{d}} \cdot \left\{ \left(\frac{m\lambda}{2Ln}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \int \cos^2\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d} + \frac{\pi}{2}\right) d\left[f(t,x)\right] \right.$$

$$\left. + \cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \int \cos^2\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) d\left[f(t,x)\right] \right\} dx\ dy\ dz$$

Die Integration der quadrierten Cosinusfunktionen über ganzzahlige Perioden von x und t ergibt in jedem Fall den Hauptwert der Cosinusfunktion (=1/2) .

$$P_{An} = \frac{\rho}{2} \cdot \hat{J}_n^2 \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{\infty} \int_0^{p\lambda} e^{-2\frac{y}{d}} \cdot \left\{ \left(\frac{m\lambda}{2Ln}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right\} dx\ dy\ dz \qquad (4.16)$$

Die Losung des Volumenintegrals liefert unterschiedliche Ergebnisse n den beiden zu untersuchenden Fällen:

4.3.1 Laufvariable m=0

Zur Berechnung der Laborkupplung wird von m=0 ausgegangen. In dieses fall betragen die einzelnen Wirbelstromverluste im Ankerring:

$$P_{An} = \hat{J}_n^2 \frac{\rho\, L\, d\, p\, \lambda}{4} \qquad (4.17)$$

Uber die Eindringtiefe $d = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu n \omega}}$ sind die Wirbelstromverluste von der nichtlinearen Permeabilität abhängig.

4.3.2 Laufvariable m=l,3,5,...

Fur den allgemeinen, dreidimensional berechneten Fall, für m<>0 nehmen auch hier die quadrierten Sinus- und Cosinusfunktionen Ihren Hauptwert an, womit die einzelnen Anteile der Wirbelstromverluste betragen:

$$P_{An} = \hat{J}_n^2 \frac{\rho\, L\, d\, p\, \lambda}{8} \cdot \left[\left(\frac{m\lambda}{2Ln}\right)^2 + 1\right] \qquad (4.18)$$

Werden die beiden Ergebnisse (4.17 und 4.18) miteinander verglichen, so lassen sich bereits erste neue Erkenntnisse gewinnen: Reicht bei einer Wirbelstromkupplung das Drehmoment nicht aus, so ist es bekannte Hilfsmaßnahme, den Ankerring mit Endringen zu versehen. Der Vergleich der Grundwellen (n=l) zeigt, daß (I) der Drehmomentgewinn, der bei einer industriellen Wirbelstromkupplung erzielt wird, von dem Verhältnis der Polteilung $\tau_p = \lambda/2$ zu

der Ankerlänge L abhängt: $\Delta m_E = \frac{L^2 - \tau_p^2}{L^2 + \tau_p^2} \cdot 100\ [\%]$ (4.19)

und daß (II) die Endringmethode nur solange etwas bringen kann, wie die Polteilung kleiner ist als die Ankerlänge. Für prezise Aussagen dürfen jedoch die Polform, die Oberwellen, die Ankerrückwirkung und die Streuung nicht unberücksichtigt bleiben. Der praktisch erzielbare Drehmomentgewinn liegt unter dem theoretisch berechneten: Δm_E = 32%, wie die Messungen an den Testkupplungen (Nr.4 und Nr.5) ergeben (s. Kap. 8.2).

4.4 Drehmoment

Die für den Ankerring einer Wirbelstromkupplung aufgestellte Energiebilanz beinhaltet, daß die über das Drehmoment M und die Relativdrehzahl $N_{rel} = \frac{\omega}{2\pi p}$ (4.20)

mechanisch eingespeiste Leistung $P_m = M \cdot 2\pi \cdot N_{rel} = M \cdot \frac{\omega}{p}$ (4.21)
gleich der im Ankerring elektrisch erzeugten Wirbelstromleistung P_{VA} ist. Diese Leistung wird, wie bereits berechnet, in Wärme und damit in Verlustleistung umgewandelt.

$P_m = P_{VA}$ und $M = \frac{p}{\omega} \cdot P_{VA}$ (4.22)

Das von Wirbelstromkupplungen übertragene Drehmoment beträgt:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_n \quad \text{mit} \quad M_n = \hat{J}_n^2 \cdot \frac{\rho\, L\, d\, \lambda\, p^2}{4\omega} \cdot K_1 \qquad (4.23)$$

mit der Abkürzung:

$$K_1 \begin{cases} = 1 & \text{für m=0 (Laborkupplung)} \\ = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{m}{n} \cdot \beta\right)^2\right] & \text{für m=1,3,5,...} \end{cases}$$

mit $\beta = \tau_p / L$ nach Gl.(4.12).

Mit den Gleichungen für die Stromdichteamplituden (Gl. 4.5 und Gl. 4.8):

$$\hat{J}_n = -B_a \frac{2\omega\lambda}{\pi^2 \cdot \rho \cdot n} \cdot K_2 \quad \text{mit} \quad K_2 \begin{cases} = \sin\left(n\pi \cdot \frac{b_p}{\lambda}\right) & \text{für m=0} \\ = \frac{\pi \cdot b_{pi}}{\lambda\left(1+\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right)} & \text{für m=1} \end{cases} \qquad (4.24)$$

und mit dem Luftspaltfluß nach Gleichung(2.14) und(2.17): $B_a = \frac{\Phi_L}{A_p \cdot p}$ betragen die harmonischen Teildrehmomente:

$$M_n = \left(\frac{\Phi_L}{A_p \cdot \pi^2}\right)^2 \cdot \frac{L\, d\, \lambda^3\, \omega}{\rho \cdot n^2} \cdot K_3 \qquad (4.25)$$

mit der Abkürzung:

$$K_3 = K_1 \cdot K_2^2 \begin{cases} = \sin^2\left(n\pi \frac{b_p}{\lambda}\right) & \text{für m=0} \\ = \left(\frac{\pi \cdot b_{pi}}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\cdot\left(1+\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right)} & \text{für m=1} \end{cases} \qquad (4.26)$$

Mit diesem vorläufigen Ergebnis ist eine punktweise numerische Drehmomentberechnung unter der Voraussetzung möglich, daß die Eindringtiefe der Wirbelströme und ihre harmonischen Anteile bekannt sind (s. Kap. 6.4). Die Eindringtiefe d ist aber stark nichtlinear und ausserdem noch von der Ordnungszahl der Oberwellen abhängig. Die Ursache liegt in der sättigungsabhängigen Permeabilität begrundet: mit Gleichung (3.35) ausgedrückt, lautet das Drehmoment:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Phi_L}{A_p \cdot \pi^2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2\omega}{\rho n \mu}} \cdot \frac{L \cdot \lambda^3}{n^2} \cdot K_3 \qquad (4.27)$$

Fur den ungesättigten Betriebsbereich bei minimalen Erregerleistungen kann diese Gleichung (4.27 mit 4.26) unmittelbar zur Drehmomentberechnung von Wirbelstromkupplungen verwendet werden (vgl. Bild 2.3). Zur Berechnung des eigentlichen Arbeitsbereiches muss dagegen noch eine nichtlineare Beschreibung hergeleitet werden.

4.5 Grösse der Induktion

Um den Einfluß der nichtlinearen, variablen Permeabilität besser verstehen zu können, ist es zweckmäßig, sich zunächst ein Bild von der Grosse der Induktion überall im Ankerring zu machen. An einem beliebig gewählten, räumlich in x,y und z sowie zeitlich in w*t festen Punkt im Ankerring wird der Vektor der Induktion durch die Komponenten beschrieben: (4.28)

$$B_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{J}_n \sqrt{\frac{\rho\mu}{\omega n}} \cdot e^{-y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\cdot\rho}}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \sin\left(\omega n t - \frac{2\pi n x}{\lambda} - y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\cdot\rho}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$B_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\hat{J}_n \frac{2\pi\rho}{\omega\lambda}\left(1+\left(\frac{m\lambda}{2nL}\right)^2\right) \cdot e^{-y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\rho}}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega n t - \frac{2\pi n x}{\lambda} - y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\rho}}\right)$$

$$B_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\hat{J}_n \cdot \frac{m\lambda}{2nL} \sqrt{\frac{\rho\mu}{\omega n}} \cdot e^{-y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\rho}}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega n t - \frac{2\pi n x}{\lambda} - y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\rho}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Werden die Oberwellenamplituden der Stromdichte $\hat{J}_n$ nach Gleichung(4.10) und(4.11)einzeln berechnet und eingesetzt, so kann der Betrag $|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ (4.29) gebildet und graphisch dargestellt werden.

In Bild 4.3 ist der Betrag der Induktion im Ankerring unter Berucksichtigung aller Oberwellen über der radialen Tiefe y'=y/d aufgetragen, einmal in der Ankerringmitte (für z=0), wo die

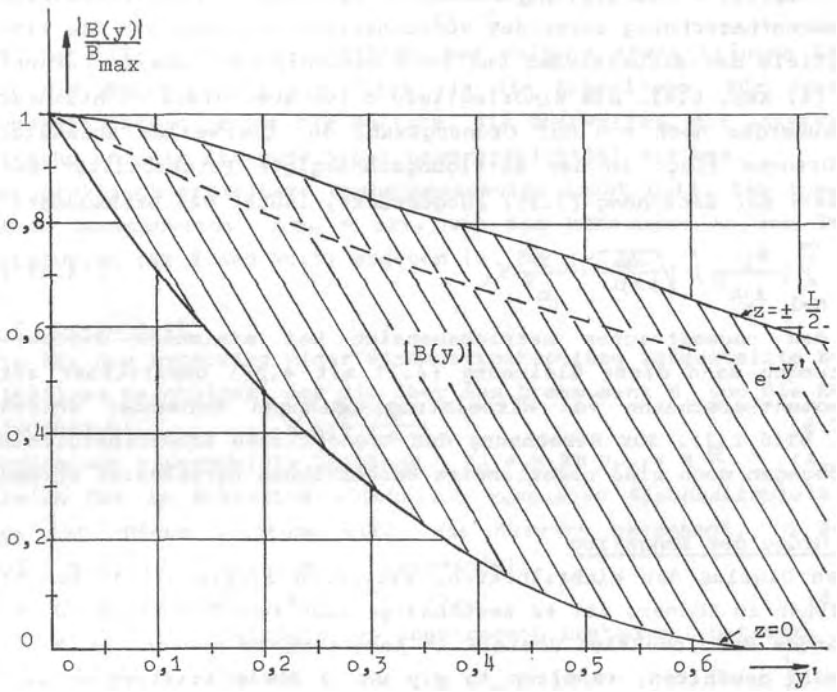


Bild 4.3: Der Betrag der Induktion im Ankerring $|B(y)|$,aufgetragen über der radialen Eindringtiefe y'=y/d.

Wirbelstrombildung und damit der Stromverdrängungseffekt maximal ist und in einer weiteren Kurve an den Rändern des Ankerrings (bei z = +- L/2). Mit den Gleichungen(4.28) und 14 .29) kann natürlich die Abnahme der Induktion für jeden beliebigen Punkt $|B(x,y,z)|$ berechnet und dargestellt werden. Die entsprechende Kurve verläuft dann in dem schraffierten Feld, das sich zwischen den beiden gezeichneten Grenzkurven aufspannt. Sie wird jedoch nur als Ausnahmefall an einigen wenigen Punkten den andeutungsweise zu Vergleichszwecken aufgetragenen exponentiellen Verlauf annehmen können, wie er von Davies /30/ und anderen Wissenschaftlern - als überall im Ankerring gültig - ihrer Theorie generell zu Grunde gelegt wird /1,6,35/. In der dreidimensionalen Darstellung (Bild 4.4) ist der Betrag der Flußdichte im Ankerring über der Abwicklung der Klauenpolanordnung gezeigt.

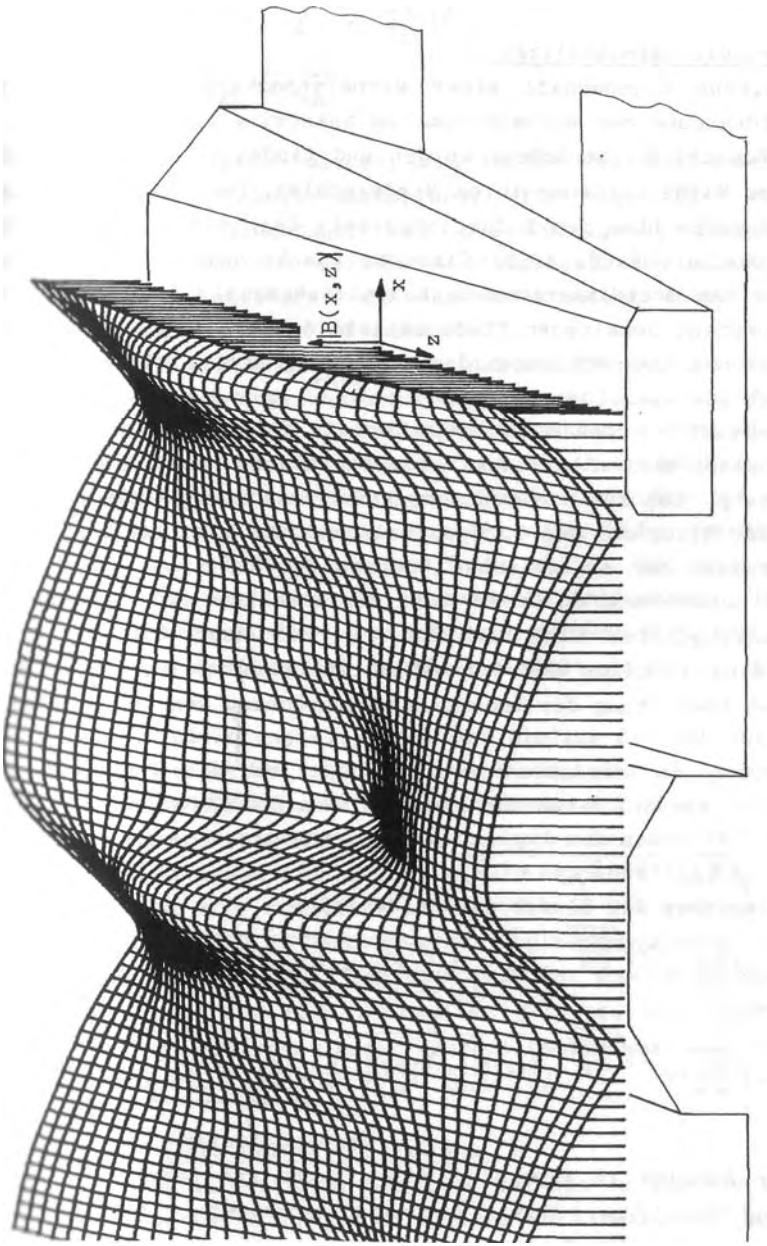


Bild 4.4: Der Betrag der Induktion im Ankerring $|B(x,z)|$ bei $y=0$ unter Berücksichtigung der Oberwellen.

5. Nichtlineare analytische Beschreibung

5.1 Variable Permeabilität

Die typische Eigenschaft einer Wirbelstromkupplung, die starke Stromverdrängung der Wirbelströme im Ankerring zum Luftspalt hin, ist in Kapitel 3 berechnet worden und findet in den Gleichungen (3.42) der Wirbelströmung ihren Niederschlag. Da die Induktion und die Feldstärke über das Induktionsgesetz fest mit der Wirbelströmung verkoppelt sind, tritt dieselbe Erscheinung hier wiederholt auf, wie die dreidimensionalen Feldgleichungen(3.49) zeigen. Bei] einer konstant gehaltenen Eindringtiefe d weisen die Gleichungen ein exponentielles Abklingen des Feldstärkevektors mit zunehmender Eindringtiefe nach der Funktion $e^{-y/d}$ aus. Aus der Magnetisierungskennlinie des Ankerringmaterials folgt, daß demnach auch die Induktion abnimmt und die Permeabilität zunimmt. Die Materialkonstante μ ist für die Rechnung keine konstante Größe mehr. Sie hängt aber nicht nur vom Erregungszustand der Kupplung ab, wie das üblicherweise bei magnetischen Kreisen der Fall ist, sondern sie variiert zusätzlich an einem fest eingestellten Arbeitspunkt mit der Eindringtiefe. Die Eindringtiefe ist nach Gleichung (3.35) selbst eine Funktion der Permeabilität. Dadurch kommt obendrein noch eine Abweichung der Induktionsabschwächung von der e-Funktion zustande.

Der Einfluß der variablen Permeabilität auf die Induktion kann diskutiert werden, wenn der Zeiger der Induktion angeschrieben wird, der sich aus den Amplituden zusammensetzt:

$$\hat{B}_n = \sqrt{\hat{B}_{xn}^2 + \hat{B}_{yn}^2 + \hat{B}_{zn}^2} \qquad (5.1)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.28) ist

$$\hat{B}_n = \hat{J}_n \sqrt{\frac{\rho\mu}{\omega n}} \cdot e^{-y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\rho}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\omega n^4 \cdot \pi^2 \cdot \rho^2}{\rho \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot \lambda^2} \left(1 + \left(\frac{m\lambda}{2nL}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{m\lambda}{2nL}\right)^2}$$

$$\hat{B}_n = \hat{J}_n \sqrt{\frac{\rho\mu}{\omega n}} \cdot e^{-y\sqrt{\frac{\mu n \omega}{2\rho}}} \cdot \sqrt{\left(1 + \left(\frac{m\lambda}{2nL}\right)^2\right) \frac{\rho}{\mu} \left(\underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\gg} + \underbrace{n\frac{\pi^2}{\omega}\left(\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m}{nL}\right)^2\right)}_{\text{vernachlässigbar nach Gl.(3.39)}}\right)} \qquad (5.2)$$

Wird die bereits in Kapitel 3 eingeführte und benutzte Vernachlässigung (3.37) bzw. (3.39) nochmals verwendet: $d^2 \ll 2\lambda_w^2$, so folgt daraus für den Zeiger:

$$\hat{B}_n = \hat{J}_n \sqrt{\frac{\rho\mu}{\omega n}} \cdot e^{-y\sqrt{\frac{\mu\omega n}{2\rho}}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{m\lambda}{2nL}\right)^2} \qquad (5.3)$$

also ist: $\hat{B}_{yn} \ll \sqrt{\hat{B}_{xn}^2 + \hat{B}_{zn}^2}$ (5.4)

1) Es darf festgehalten werden, daß in dem üblichen Betriebsbereich einer Wirbelstromkupplung, für den die Näherung $\delta^2 \ll 2 \cdot \lambda_w^2$ eingeführt und die Gültigkeit nachgewiesen worden ist, sowohl die radiale (y-)Komponente der Induktion als auch die der Feldstärke auf den Gesamtzeiger einen vernachlassigbar geringen Einfluß besitzt.

2) Daraus wird der Schluß ableitbar, daß der "innere Verstärkungsfaktor" des elektromechanischen Energiewandlersystems der Wirbelstromkupplung gegen unendlich geht. Erklärenderweise sei darauf hingewiesen, daß die zum Luftspalt hin vorhandene radiale Induktionskomponente gleich der Luftspaltinduktion ist und daß gerade diese, die Wirbelströme im Ankerring induzierende Induktionskomponente eine vernachlässigbar kleine Amplitude im Vergleich zu den im Ankerring vorhandenen Feldvektoren besitzen soll. Durch den Einfluß der Ankerrückwirkung wird der gesamte Verstärkungsfaktor jedoch stark reduziert (z.B auf den Wert 100-fach).

3) An Hand der Gleichung (5.3) soll der Einfluß der variablen Permeabilität erläutert werden. Sie bewirkt, daß mit zunehmender Eindringtiefe die Annahme fallen gelassen werden muß, die Feldvektoren nähmen nach einer e-Funktion ab. Der Feldstärkevektor klingt sowohl wesentlich schneller als exponentiell ab als auch um den Faktor $1/\mu$ schneller als der Vektor der Induktion. Damit das Ergebnis in geschlossener, rein analytischer Form angeschrieben werden kann, ist es notwendig, sowohl für die Grundwelle als auch für alle Oberwellen gültige, die nichtlineare Permeabilität möglichst exakt beschreibende, mathematischen Beziehungen einzuführen.

5.2 Amplituden der Feldstärkevektoren

Sichtet man die Literatur in Hinblick auf die zu lösende Problemstellung, so bietet sich die Aufteilung in lineare und in nichtlineare Theorien an.

Die linearen Theorien vernachlässigen den Einfluß der variablen

Permeabilität. Dazu zählen die älteste, grundlegende, theoretisch mathematische Abhandlung über die zweidimensionale Berechnung von Wirbelstrombremsen von Rüdenberg 1906 /1/ wie auch alle weiteren auf ihn aufbauenden Arbeiten /2,3,9/. Die beiden veröffentlichten dreidimensionalen Theorien /5,34/ sind ebenfalls linear, wie die sehr großen Abweichungen zwischen gemessenen und gerechneten Werten unmißverständlich deutlich machen /5/.

Bei den wenigen bisher bekannt gewordenen nichtlinearen Theorien wird bei einer angestrebten analytischen Lösung in prinzipieller Übereinstimmung ein Weg eingeschlagen, den speziell für Wirbelstromkupplungen erstmals Gibbs /6/ in seiner eindimensionalen Theorie vorgestellt hat, den Davies /30/ für seine zweidimensionale Theorie weiterentwickelt hat, und der auch für die hier vorgestellte dreidimenionale Theorie verwendbar ist:

1. Zuerst wird die Amplitude des Feldstärkevektors bestimmt. Werden die Vektoren der Stromdichte (Gl. 3.42) und der Feldstärke (Gl. 3.49) miteinander verglichen, wobei deren radiale Komponente der obigen Herleitung gemäß unberücksichtigt bleiben soll, so wird deutlich, daß sich außer einer Phasendrehung der Stromdichtezeiger und der Feldstärkezeiger nur um den Faktor $d/\sqrt{2}$ unterscheiden:

$$H_z = J_y \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \sphericalangle + 135° \qquad (5.5)$$

$$H_x = J_z \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \sphericalangle - 45° \qquad (5.6)$$

Die Amplituden für sich betrachtet, stehen in dem Verhältnis zueinander:

$$H_n = \hat{J}_n \frac{d}{\sqrt{2}} \qquad (5.7)$$

2. Die Amplituden der Feldstärke lassen sich aus denen der Stromdichte berechnen. Letztere sind über die Gleichung(4.24) mit der Luftspaltinduktion und über die Gleichungen(2.14 und 2.17) mit dem Luftspaltfluß verknüpft:

$$\sqrt{\mu} \cdot H_n = \frac{\Phi_L \cdot 2 \cdot \lambda}{A_p \; p \; n \; \pi^2} \cdot K_2 \sqrt{\frac{\omega}{n \cdot \rho}} \qquad (5.8)$$

3. Geht man nicht von den Luftspaltwerten, sondern von dem Drehmoment aus, so sind über die Gleichung(4.23) ebenfalls die Stromdichteamplituden und über die Beziehung(5.7) die Feldstärkeamplituden berechenbar:

$$M_n = H_n^2 \cdot \frac{L\,\lambda\,p^2 \cdot \rho}{d \cdot 2 \cdot \omega} \cdot K_1 = \sqrt{\mu} \cdot H_n^2 \cdot \sqrt{\frac{n\rho}{2\omega}} \cdot \frac{L\,\lambda \cdot p^2}{2} K_1 \quad (5.9)$$

oder $$\mu^{1/4} \cdot H_n = \sqrt{\frac{2\,M_n}{L\lambda \cdot p^2}} \cdot \sqrt{\frac{2\omega}{n\rho}} \cdot \frac{1}{K_1} \quad (5.10)$$

Eine nichtlineare, analytische Beschreibung ist dann gefunden, wenn es gelingt, die Gleichungen(5.8)und (5.10) derart miteinander zu verknüpfen, daß sowohl die ständig wechselnde Amplitude der Feldstarke H_n als auch die variable Permeabilität μ eleminiert werden können. Zu diesem Zweck wird die Magnetisierungskennlinie mathematisch approximiert.

3.3 Approximation

Bei dieser Arbeit handelt es sich um eine nichtlineare Berechnung von Wirbelstromkupplungen, die auch Oberwellen mitberücksichtigt. Da die bekannten Approximationen für die Grundwellenbetrachtungen zur Berechnung der Oberwellen nicht verwendbar sind, ist es erforderlich, für diesen Fall eine neue Approximation herzuleiten. Zur Beschreibung der Grundwelle dagegen reicht es aus, die aus der Literatur allgemein bekannten Verfahren zu diskutieren und die Vorgehensweise der im vorliegenden Fall gewählten Approximation zu entwickeln.

Die geeigneteste, weil speziell auf die Berechnung von Wirbelstromkupplungen zugeschnittene Methode stammt von Gibbs /6/. Er entnimmt der Magnetisierungskennlinie Punkt für Punkt die Werte fur u und H, berechnet unmittelbar den in Gleichung(5.10) gefragten Ausdruck für $\mu^{1/4} \cdot H$ und trägt die berechneten Werte wieder einzeln über H auf doppeltlogarithmischem Papier auf (Bild 5.2). Dadurch ergibt sich praktisch eine Gerade, die nur bei minimalen Feldstärken unterhalb des "Knicks" der Magnetisierungskennlinie geringfügige Abweichungen aufweist. Diese spielen allein deshalb schon keine besondere Rolle, weil der Ankerring immer nur stark gesättigt betrieben wird. Davies hat diese Überlegung sowie die von Gibbs angegebene graphische Lösung übernommen und hat die zugehorige mathematische Beschreibung abgeleitet /30/:

$$\mu^{1/4} \; H = a \cdot H^b \quad (5.11)$$

Bei den vorliegenden Kupplungen wurde nicht Flußeisen als Ankerringmaterial verwendet, sondern Stahl St37.

Bild 5.1 zeigt die im Labor gemessene Magnetisierungskennlinie.

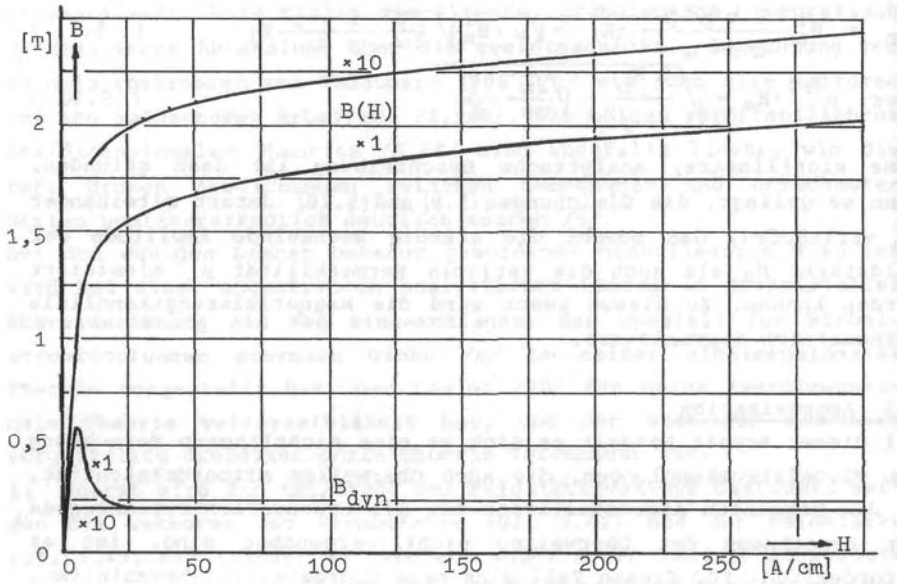


Bild 5.1: Magnetisierungskennlinie des Ankerringmaterials St37.
$B(H)=\mu_r \cdot \mu_o \cdot H$ (5.14); $B_{dyn}= \mu_{dyn} \cdot \mu_o \cdot H$ (5.15)

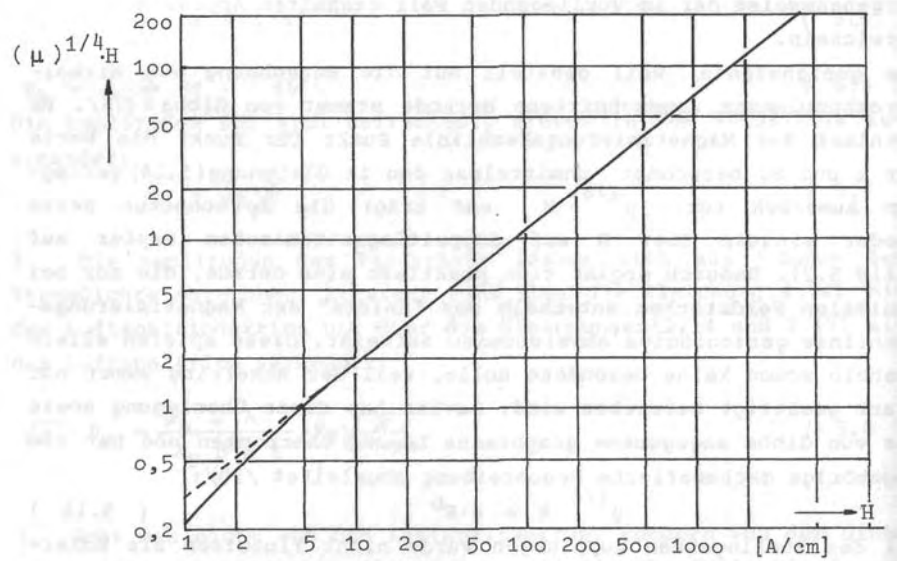


Bild 5.2: Magnetisierungskennlinie auf doppeltlog. Papier
$\mu^{1/4} \cdot H = a \cdot H^b = 0{,}923 \cdot H^{0{,}774}$ (5.11)

Die Darstellung auf doppeltlogarithmischen Papier (Bild 5.2) zeigt, daß für das verwendete Ankerringmaterial eine gute Approximation für Feldstärken H >= 5 A/cm vorliegt, wenn a=0,923 und b=0,774 in die Gleichung eingesetzt werden.
Die gute Übereinstimmung im Sättigungsbereich ist wichtig; deshalb kommt der Exponent nahe an den Wert b=0/75 heran, der den Fall der vollständigen Sättigung mit B=const. beschreiben würde. Theoretisch kann der Exponent bis auf b=l anwachsen, wenn der Ankerring ungesättlgt betrieben wird. Es ist aber deutlich erkennbar, wie weit man sich von diesem linearen Fall, der durch μ_r=const. charakterisiert ist, entfernen muß, um praxisnahe Betriebspunkte berechnen zu können.
Es sind nebenbei auch andere Approximationen untersucht worden (z.B.: $\sqrt{\mu} \cdot H = a*H^b$), aber es hat sich herausgestellt, daß auch für Stahlankerringe die Beschreibung nach Gleichung(5.11)die geeignetste ist. Sie ist jedenfalls genauer als die von Gonen und Stricker verwendete /29/; sie geht durch Umformung über in:

$$\mu \cdot H^4 = a^4 H^{4b}$$
$$B = \mu \cdot H = a^4 H^{4b-3} \qquad (5.12)$$

Die Autoren K. Venkataratnam und A. Kadir /36/ geben diese Näherung an. Ihre Theorie ist nur eine Neuauflage der Davies[1]sehen Theorie /30/. Dasselbe trifft auch für die Arbeit von Kundu /35/ mit dem Unterschied zu, daß er die allgemein bekannte Möglichkeit ausnutzt, daß die Magnetisierungskennlinie durch eine Reihenentwicklung darstellbar ist. Seine Theorie wird durch diese Maßnahme aber nicht besser als die von Davies, sondern nur unhandlicher, da jede einzelne Drehmomentharmonische aus mehreren Teildrehmomenten berechnet werden muß, die einer mathematischen Maßnahme entstammen und physikalisch gesehen keinen Sinn geben. Die analytische Lösung verliert ihren größten Vorteil gegenüber einer numerischen Lösung, namlich den einer geschlossenen Darstellung.

3.4 Nichtlineare Oberwellenbeschreibung

Fur eine Oberwellenberechnung kann die bisher zu Grunde gelegte Magnetisierungskennlinie und ihre Approximation nicht mehr verwendet werden.
Die Oberfelder überlagern sich dem Grundwellenfeld. Für sie ist infolge der Vormagnetisierung durch die Grundwelle eine Überlagerungspermeabilität maßgeblich, die erheblich kleiner ist als die

Permeabilität des Grundwellenfeldes. Ihre Frequenz ist außerdem um das n-fache höher. Deshalb kann man denselben Effekt beobachten, der auftritt, wenn man einem starken magnetischen Gleichfeld ein Wechselfeld kleiner Amplitude überlagert: Während für das Gleich- bzw. Grundfeld die relative Permeabilität μ_r wirksam ist, gilt für die höherfrequenten harmonischen Anteile die dynamische Überlagerungspermeabilität:

$$\mu_o \cdot \mu_{dyn} = \frac{dB}{dH} \approx \left.\frac{\Delta B}{\Delta H}\right|_{AP} \qquad (5.13)$$

die durch die Steigung der Magnetisierungskennlinie (Bild 5.1) an dem durch die Vormagnetisierung gegebenen Arbeitungspunkt (AP) definiert ist. Wird für jeden Arbeitspunkt, der durch die Beziehung

$$B = \mu_r \cdot \mu_o \cdot H \qquad (5.14)$$

festgelegt ist, für einen beliebig gewählten aber festen Feldstärkewert H die Steigung nach Gleichung (5.13) bestimmt, so kann die entsprechende dynamische Induktion berechnet werden:

$$B_{dyn} = \mu_{dyn} \cdot \mu_o \cdot H \qquad (5.15)$$

Wird sie anschließend über der Feldstärke aufgetragen (Bild 5.1), so ist deutlich erkennbar, daß B_{dyn} für Feldstärken H >= 15 A/cm einem von der jeweiligen Feldstärke unabhängigen, konstanten Wert zustrebt. Dieser Bereich ist, wie bereits erwähnt, von besonderem Interesse, da der Ankerring üblicherweise weit im Bereich der Sättigung betrieben wird. Zur Berechnung der Oberwellen soll die Approximation

$$B_{dyn} = 0{,}2 \text{ Tesla} \qquad (5.16)$$

verwendet werden. Diese Festlegung führt bei sehr kleinen Feldstärken auf zu kleine Werte der dynamischen Induktion und damit zu einer leichten Überbewertung der Oberwelleneinflüsse gegenüber der Grundwelle bei entsprechend minimalen Erregerleistungen. Unter Verwendung der hergeleiteten Approximationen hat die Drehmomentberechnung für die Grundwelle und für die Oberwellen getrennt zu erfolgen.

5.5 Lösung des nichtlinearen Problems

Mit Hilfe der Approximationen (5.11) und (5.16) ist jetzt die Verknüpfung der Gleichung(5.8)und(5.10) möglich:

Aus Gleichung (5.8) folgt: $\sqrt{\mu} \cdot H_n = \frac{\Phi_L}{A_p \cdot p} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\pi^2 \cdot n} \cdot K_2 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{n\rho}}$

für die Grundwelle: $$\sqrt{\mu}\cdot H_1 = \frac{\left[\mu^{(\frac{1}{4})}\cdot H_1\right]^2}{H_1} = \frac{(aH_1^b)^2}{H_1} = a^2 H_1^{2b-1}$$

und für Oberwellen:

$\sqrt{\mu}\cdot H_n = \sqrt{B_{dyn}\cdot H_n}$ mit $B_{dyn} = 0{,}2$ T nach Gl. (5.16)

Damit in der Drehmomentgleichung (5 . 9) der Ausdruck für $\sqrt{\mu}\cdot H_n^2$ eliminiert werden kann, wird weiter umgeformt;

für die Grundwelle: (5.17)

$$\sqrt{\mu}\cdot H_1^2 = a^2\cdot H_1^{2b} = a^2\cdot\left[\frac{\Phi_L}{A_p\cdot p}\cdot\frac{2\cdot\lambda}{\pi^2\cdot a^2}\cdot K_2\sqrt{\frac{\omega}{\rho}}\right]^{\frac{2b}{2b-1}}$$

und für Oberwellen: (5.18)

$$\sqrt{\mu_{dyn}\cdot\mu_0}\cdot H_n^2 = H_n\cdot\sqrt{B_{dyn}\cdot H_n} = \frac{1}{B_{dyn}}\left[\frac{\Phi_L}{A_p\cdot p}\cdot\frac{2\cdot\lambda}{\pi^2 n}\cdot K_2\sqrt{\frac{\omega}{n\rho}}\right]^3$$

Durch Einsetzen in Gleichung(5. 9) lautet die gesuchte Lösung für das von der Kupplung übertragene Drehmoment:

$$M = \frac{L\lambda p^2}{2}\sqrt{\frac{\rho}{2\omega}}\left\{a^2 K_1\left[\frac{\Phi_L}{A_p\cdot p}\cdot\frac{2\cdot\lambda}{\pi^2\cdot a^2}\cdot K_2\sqrt{\frac{\omega}{\rho}}\right]^{\frac{2b}{2b-1}} + \sum_{n=3,5,7,\ldots}^{\infty}\frac{K_1}{B_{dyn}\cdot n}\left[\frac{\Phi_L}{A_p\cdot p}\cdot\frac{2\cdot\lambda}{\pi^2\cdot n}\cdot K_2\sqrt{\frac{\omega}{\rho}}\right]^3\right\} \qquad (5.19)$$

mit: $K_1 = 1$ für m=0; $= \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\lambda}{2nL}\right)^2\right]$ für m=1 bzw. $K_2 = \sin\left(n\cdot\pi\frac{b_p}{\lambda}\right)$ für m=0; $= \frac{\pi\cdot b_{pi}}{\lambda\left(1+\left(\frac{\lambda}{2nL}\right)^2\right)}$ für m=1

Damit ist eine analytisch formulierte Lösung zur Berechnung der nichtlinearen Drehmomentbildung bei Wirbelstromkupplungen gefunden, die auch alle Oberwellen berücksichtigt. Wegen der unterschiedlichen Behandlung der Grundwelle und der Harmonischen ist der Einfluß der Oberwellenmomente nicht mehr ausschließlich von der Geometrie, sondern außerdem noch vom Betriebspunkt abhängig. Die Oberwellenspektren werden deshalb nur an wenigen ausgewählten Betriebspunkten in Verbindung mit der Auswertung von Messungen im nachsten Kapitel gezeigt.

6. Meßtechnische Überprüfung

6.1 Fünf Untersuchungsobjekte

Durch den Vergleich unterschiedlich aufgebauter Wirbelstromkupplungen mit den entsprechenden Berechnungsergebnissen wird die Brauchbarkeit der dreidimensionalen Theorie unter Beweis gestellt. Dazu werden fünf verschiedene Exemplare herangezogen. Es handelt sich im einzelnen um drei handelsübliche Wirbelstromkupplungen unterschiedlicher Baugröße (Nr. 1,2 und 3) mit dem doppelten bzw. vierfachen Leistungsangebot. Das Klauenpolrad besitzt trapezförmige, teilweise überlappende Pole. Die mittlere Baugröße ist im Schnitt in Bild 1.1 bereits gezeigt worden. Von dieser Kupplung (Nr. 2) sind nach Abschluß der ersten Messungen noch zwei abgeänderte Bauformen erstellt und untersucht worden (Nr. 4 und 5). Zuerst wurde das Polrad umgebaut, um den Einfluß der Polform demonstrieren zu können. Durch das Anspitzen der Pole zum Luftspalt hin und durch das Überführen der trapez- in parallelflankige Zähne wird der Streuanteil durch einseitige Vormagnetisierung reduziert und die Luftspaltinduktion erhöht. Weiterhin werden alle Pole auf die gleiche und gemeinsame Überlappungslänge $L=L_u$ gekürzt. Der durch die Umbaumaßnahmen hervorgebrachte Drehmomentverlust beträgt ca. 28%, weil zwar nur homopolar wirksame, aber dennoch sehr viel "aktive Eisenlänge" verloren geht. Die Luftspaltinduktion erreicht Werte, die sonst nur für Schenkelpolräder typisch sind. Diese "Testkupplung" (Nr.4) steht stellvertretend für Wirbelstromkupplungen mit symmetrisch angeordneten, parallelflankigen Erregerpolen.

Die zweite Testkupplung (Nr.5) geht aus der ersten durch den Umbau des Ankerrings hervor. Der Ankerring wurde auf die Länge der Pole L=Lp gekürzt und an seine beiden Enden wurden mit Silberlot Kupferendringe angeschweißt. Diese "Endringkupplung" erfährt durch die Umbaumaßnahme eine Drehmomentsteigerung von ca. 60%. Aus fertigungstechnischen Gründen besitzt sie zwar keine Bedeutung in der Praxis, wird aber für Laborversuche zu zweidimensionalen Berechnungen /30-32/ bevorzugt verwendet.

In diesem Kapitel soll zunächst nur die Anwendbarkeit der dreidimensionalen Theorie zur Berechnung handelsüblicher Wirbelstromkupplungen untersucht werden. Die Auswertung von Messungen an den beiden Testkupplungen wird erst in Kapitel 8 vorgenommen.

6.2 Drehmomentmessung und -berechnung

Mit den passenden Polbeschreibungen können die Untersuchungsobjekte berechnet werden. Dabei ist es hilfreich, zunächst noch nicht von dem Erregerstrom, sondern unmittelbar von dem meßbaren Luftspaltfluß auszugehen, um damit der Gefahr zu entgehen, daß sich unbemerkt zwei Fehler gegenseitig kompensieren. In den anschließenden Kapiteln wird dann die Erzeugung des Luftspaltflusses - als den durch Streuung und Ankerrückwirkung verminderten Polfluß - gesondert berechnet und mit den Messungen verglichen. In den Bildern 6.2, 6.3 und 6.4 sind die berechneten Drehmomentverläufe der drei handelsüblichen Wirbelstromkupplungen (Nr. 1-3) in Abhängigkeit vom Luftspaltfluß und von der Schlupfdrehzahl aufgetragen. Zu Vergleichszwecken sind sowohl die Meßpunkte als auch die errechneten Stützstellen eingetragen.

Bei den Messungen wird der Ankerring der Kupplung durch eine Gleichstrom-Pendelmaschine drehzahlgeregelt angetrieben, wogegen das Polrad mit den für die Flußmessungen entsprechend Bild 6.1 angebrachten Meßspulen über eine Drehmomentstütze festgehalten wird. Das Reaktionsmoment wird auf der Pendeluhr, der Luftspaltfluß mit Hilfe eines Flußmeters abgelesen.

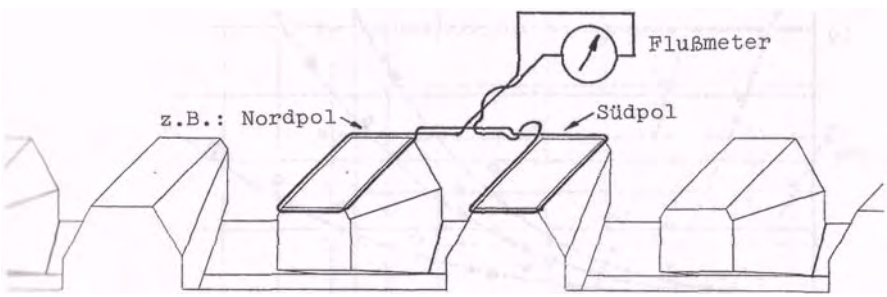


Bild 6.1: Die Anbringung der Flußmeßspulen an den zum Luftspalt hin offenen Enden der Klauenpole.

Um hier zunächst noch die Bedingung ρ = konstant erfüllen zu können, wird die Temperatur des Ankerrings ständig überwacht und auf ϑ_a = 30°C gehalten. Damit die in Kapitel 9 noch näher zu untersuchenden thermischen Ausgleichsvorgänge die Meßgenauigkeit nicht negativ beeinflussen, ist jede einzelne Messung im Vergleich zur thermischen Zeitkonstante T_ϑ schnell durchgeführt worden. Die Berechnung des Drehmoments erfolgt nach der dreidimensionalen, nichtlinearen Theorie (Gl. 5.19) mit Hilfe eines Rechenprogramms.

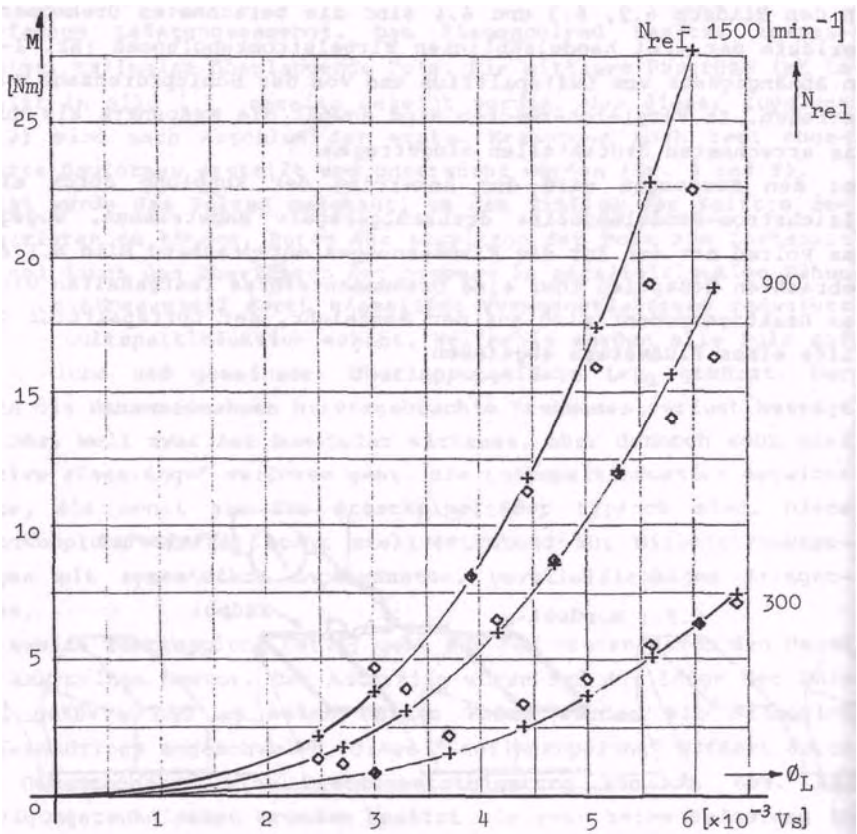


Bild 6.2:
Das gemessene (◇) und gerechnete {+) Drehmoment der Kupplung 1.

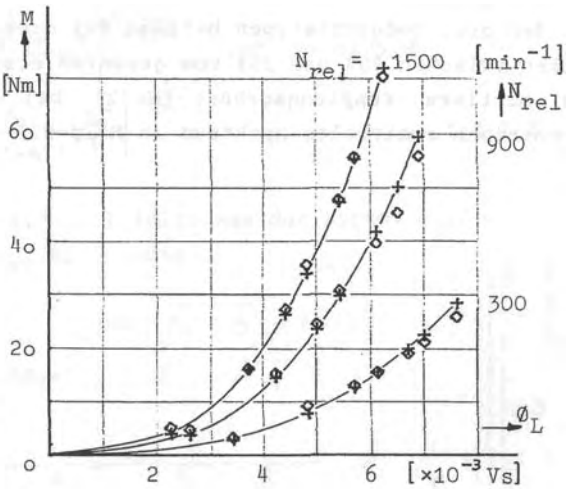


Bild 6.3:
Das gemessene (◇) und gerechnete (+) Drehmoment der Kupplung 2.

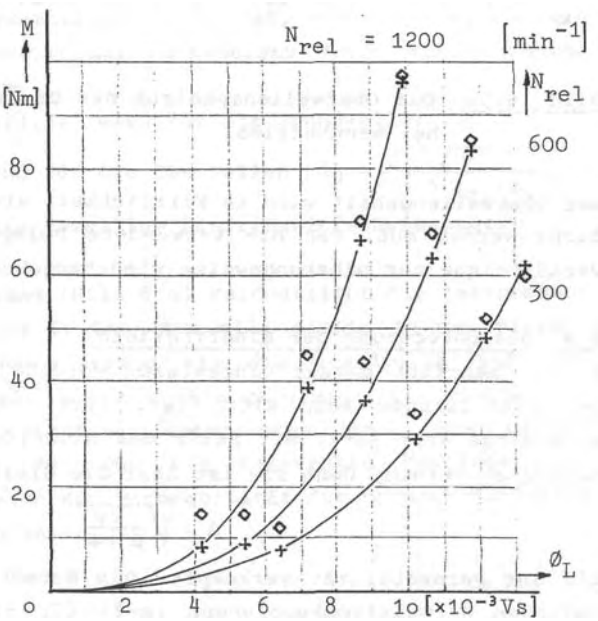


Bild 6.4:
Das gemessene (◇) und gerechnete (+) Drehmoment der Kupplung 3.

6.3 Oberwellenspektrum des Drehmoments

Der Oberwellengehalt wird weitgehend von der Form und der Größe der Erregerpole, besonders vom Polbedeckungsverhältnis beeinflußt. Bei den drei Industrietypen beträgt der Drehmomentanteil der Oberwellen zwischen 20% und 25% vom gesamten erzeugten Drehmoment. Für die mittlere Kupplungsgröße (Nr.2) bei Nennbetrieb ist das rechnerisch ermittelte Spektrum in Bild 6.5 gezeigt.

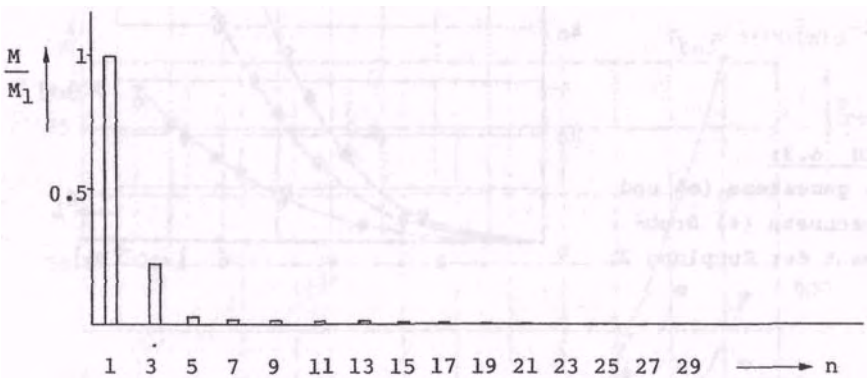


Bild 6.5: Das Oberwellenspektrum des Drehmoments der Kupplung 2 bei Nennbetrieb.

Der Oberwellengehalt wird in Wirklichkeit etwas höher sein, da bedacht werden muß, daß die verwendete Polbeschreibung die wahren Verhältnisse nur näherungsweise wiederzugeben vermag.

6.4 Die Berechnung der Eindringtiefe

Es ist mehrfach darauf hingewiesen worden, daß die Eindringtiefe der Wirbelströme sehr klein ist. Ihre tatsächliche Größe kann allerdings erst jetzt mit Hilfe der nichtlinearen Approximationen berechnet werden, denn sie ist über die Gleichung (3.35):

$$d = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu n \omega}}$$

mit der Permeabilität verknüpft. Die Berechnung hat bei handelsüblichen Wirbelstromkupplungen (m=l) für die Grundwelle und für die Oberwellen getrennt zu erfolgen.

Für die Grundwelle (n=1) folgt aus Gl.(5.11): $\mu^{1/4} \cdot H_1 = a \cdot H_1^b$

$$\sqrt{\mu} \cdot H_1 = a^2 \cdot H_1^{2b-1} \quad \text{und}$$

$$\mu = a^4 \cdot H_1^{4(b-1)} = a^4 \left[\frac{\sqrt{\mu} \cdot H_1}{a^2} \right]^{4\frac{b-1}{2b-1}} \quad \text{und mit Gl.(5.8):}$$

$$\mu_r = \frac{a^4}{\mu_o} \cdot \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\Phi_L}{A_p \cdot p} \right) \frac{2 \cdot b_{pi}}{\pi \cdot (1+\beta^2)} \sqrt{\frac{\omega}{\rho}} \right]^{4\frac{b-1}{2b-1}} \qquad (6.1)$$

Fur die Oberwellen (n=3,5,7,...) folgt aus der Approximation Gl.(5.15): $\mu_{dyn} \cdot \mu_o = B_{dyn} / H_n$,daß

$$\sqrt{\mu_{dyn}\mu_o} \cdot H_n = \sqrt{B_{dyn} \cdot H_n} \quad \text{und} \quad H_n = \frac{1}{B_{yn}} \cdot \left(\sqrt{\mu_{dyn}\mu_o} \cdot H_n \right)^2$$

eingesetzt in Gl.(5.15): $\mu_{dyn} \cdot \mu_o = \left(B_{dyn} / \sqrt{\mu_{dyn} \cdot \mu_o} \cdot H_n \right)^2$

und mit Gl.(5.8):

$$\mu_{dyn} = \frac{B_{dyn}^2}{\mu_o \left(\frac{\Phi_L}{A_p \cdot p} \right)^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot b_{pi} \cdot n}{\pi \cdot (n^2+\beta^2)} \right)^2 \cdot \frac{\omega}{n\rho}} \qquad (6.2)$$

Mit diesen Gleichungen werden die an jedem festen Arbeitspunkt wirksamen Werte der Permeabilität berechnet, wie sie z.B. auch in Gleichung(4.27) unmittelbar zur punktweisen Drehmomentberechnung eingesetzt werden können.
Kit Hilfe der Beziehung(3.35) wird für die Grundwelle:

$d_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{\omega \cdot \mu_r \cdot \mu_o}}$ und für die Oberwellen $d_n = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{\omega \cdot n \cdot \mu_{dyn} \cdot \mu_o}}$

an jedem Arbeitspunkt die jeweilige Eindringtiefe berechnet.

Die graphische Darstellung (Bild 6.6) verdeutlicht die interessante Feststellung, daß die dritte Oberwelle tiefer in den Wirbelstromzylinder einzudringen vermag als die Grundwelle und erst recht natürlich als alle höheren Harmonischen. Ihr Beitrag zur Drehmomentbildung ist demzufolge entsprechend hoch. Die Ursache ist in der Kleinheit der für sie relevanten überlagerungspermeabilität im Vergleich zur Permeabilität der vormagnetisierend wirkenden Grundwelle zu sehen.

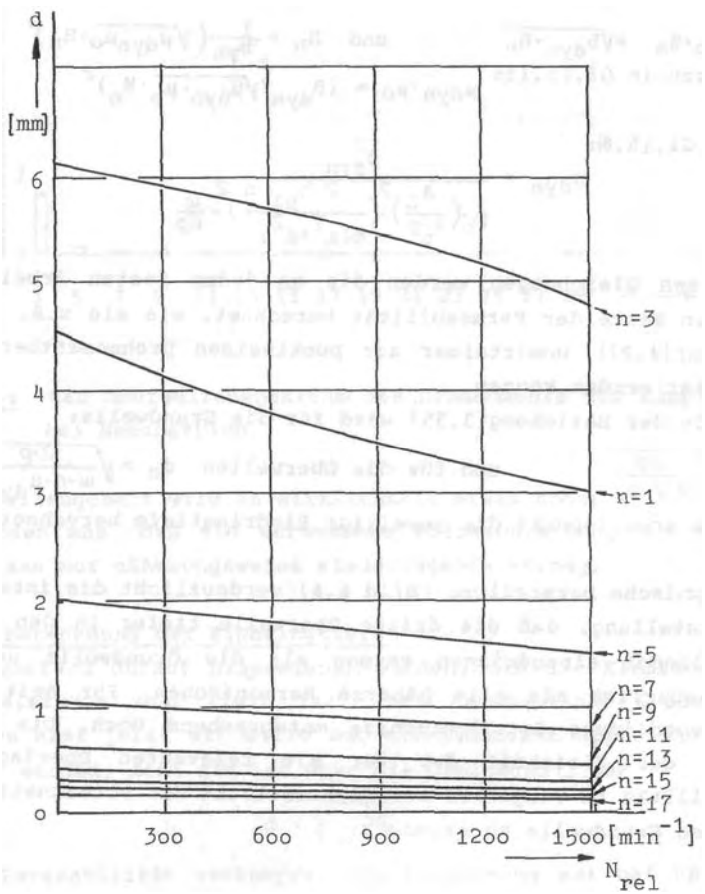


Bild 6.6; Die Eindringtiefe d bei Nennerregung (I_E=4A; i_E=l)

7. Magnetischer Kreis

7.1 Probleme

Die Ermittlung des Erregerbedarfs hat über die Berechnung des magnetischen Kreises zu erfolgen. Den Kreis durch einen einzigen, konstant angenommenen magnetischen Widerstand zu beschreiben /30,31/, reicht zur Berechnung handelsüblicher Wirbelstromkupplungen nicht aus, da man in der Praxis bemüht ist, auch das Polradeisen möglichst hoch auszunutzen. Die lokal auftretenden Sättigungseffekte üben einen zusätzlichen nichtlinearen Einfluß aus und erschweren die mathematische Beschreibung der physikalischen Vorgange. Bevor diese Problematik behandelt wird, sollen zunächst zwei wesentliche Einflüsse berechnet werden: die Ankerrückwirkung und die Streuung.

Für die Berechnung ist die bisher veröffentlichte Literatur nicht allzu hilfreich. Malti /5/ geht wie Rüdenberg /l/ und auch andere /2/ davon aus, daß die Ankerrückwirkung unter dem gleichen Winkel, unter dem auch die Wirbelströmung auftritt, auf die Polraderregung zurückwirkt. Die Unsymmetrie des Systems verlangt aber eine zweiachsige Darstellung, da die Ankerringdurchflutung über dem Pol (Langsachse) und über der Pollücke (Querachse) auf unterschiedliche Leitwerte arbeitet. Dieser Zusammenhang darf nicht unberücksichtigt bleiben (wie bei /30-34/) .

7.2 Ankerringdurchflutung

Der Ankerring einer Wirbelstromkupplung bildet für das Polrad nicht nur den magnetischen Rückschluß; die Amperewindungszahl, die auf ihn entfällt, hängt von der Durchflutung ab, die von den Wirbelströmen selbst ausgeht.

Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes verlangt, daß alle durch eine von einem in sich geschlossenen Weg umrandete Fläche hindurchtretenden Ströme erfaßt und auf summiert werden.

$$\Theta_{AR} = \oint H_y \cdot dl \qquad (7.1)$$

Wird nur eine der beiden Komponenten der Stromdichte (nach Gl. 3.42) berücksichtigt, so ist darauf zu achten, daß die Fläche senkrecht von ihr durchsetzt wird, damit der Beitrag der auf ihr senkrecht stehenden Komponente verschwindet. Ein solcher Weg geht beispielsweise von einem Punkt der Ankerringoberfläche (x,y=0,z) aus, führt senkrecht in den Ankerring hinein bis zum Punkt

(x,y=oo ,z) und schließt sich dann wieder, indem er außerhalb des Ankerrings wieder zum Ausgangspunkt zurückführt, wobei dieser Rückweg keinen Beitrag zur Durchflutung leistet. Es ist gleichgültig, welche der beiden Stromdichtekomponenten zur Berechnung herangezogen werden, da die Wirbelströme geschlossene Bahnen ausbilden und die einzelnen Komponenten ineinander übergehen:

$$\Theta_{AR} = \int_{y=o}^{\infty} \left| \int J_x \, \partial z \right| \partial y \quad = \int_{y=o}^{\infty} \left| \int J_z \, \partial x \right| \partial y \qquad (7.2)$$

Das Einsetzen und Integrieren einer der beiden Komponenten aus Gleichung 3.41 führt in beiden Fällen zu der Lösung für die Ankerringdurchflutung:

$$\Theta_{AR} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_{ARnm} \qquad \text{mit:}$$

$$\Theta_{ARnm} = \hat{J}_n \cdot \frac{\lambda \cdot d}{2\sqrt{2}\,\pi n} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (7.3)$$

7.3 Zeigerdiagramm

Vergleicht man diesen Ausdruck (Gl. 7.3) z.B. mit der Luftspaltinduktion B_L (Gl. 4.2), so sieht man, daß zwischen der Ankerringdurchflutung und der sie erregenden Luftspaltdurchflutung V_L ein Phasenwinkel von 135° auftritt. Die zur Erregung erforderliche Amperewindungszahl V_e errechnet sich folglich aus der vektoriellen Addition der wirksamen Ankerring- und Luftspaltdurchflutung, wie aus dem Zeigerbild 7.1 ersichtlich.

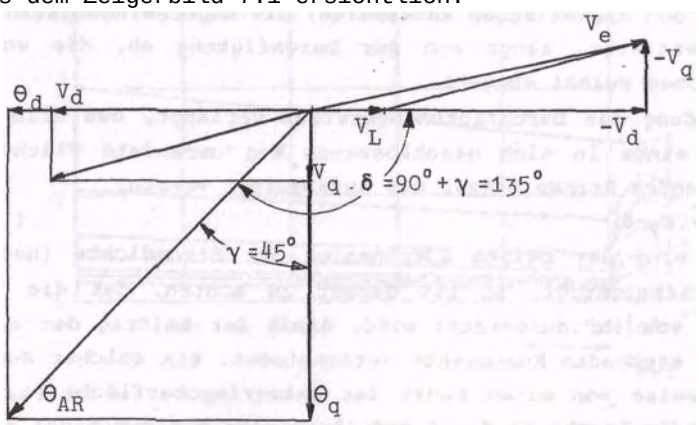


Bild 7.1: Zeigerdiagramm der Wirbelstromkupplung

Dieses Zeigerdiagramm unterscheidet sich wesentlich von den bei Rüdenberg /l/, Malti /5/ oder bei Davies /30-34/ angegebenen. Vor der Verwendung der in /34/ hergeleiteten Ergebnisse muß gewarnt werden. Wegen eines fehlerhaften Ansatzes sind die Ankerringdurchflutung und folglich auch die Ankerrückwirkung um 100% zu groß berechnet, abgesehen davon, daß die Zweiachsigkeit keine Beachtung findet.

7.4 Ankerrückwirkung

Als Ankerrückwirkung tritt nicht die volle Ankerringdurchflutung Θ_{AR} auf, da das Ankerfeld nur über den Polen einen Einfluß deutlich zeigen kann, in den Pollücken dagegen stark geschwächt wird. Wird die Ankerdurchflutung Θ_{AR} zerlegt in seine

$$\text{Längskomponente} \quad \Theta_d = \hat{\Theta}_{AR} \cdot \sin\gamma \qquad (7.4)$$

$$\text{und in die Querkomponente} \quad \Theta_q = \hat{\Theta}_{AR} \cdot \cos\gamma \ ,$$

so können daraus über die Minderungsfaktoren /27, S.440/ C_d und C_q die Komponenten der Ankerrückwirkung berechnet werden:

$$V_d = C_d \cdot \Theta_d = \hat{\Theta}_{AR} C_d \cdot \sin\gamma \qquad (7.5)$$

$$V_q = C_q \cdot \Theta_q = \hat{\Theta}_{AR} C_q \cdot \cos\gamma$$

Die Längsachse wird in die Polmitte gelegt und die Querachse in die Mitte einer Pollücke. Elektrisch gesehen stehen die beiden Achsen senkrecht aufeinander. Die Minderungsfaktoren sind von der Geometrie der Pole und dabei im wesentlichen vom Polbedeckungsverhältnis $\alpha = b_p / \tau_p$ abhängig:

$$C_d = \alpha + \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\alpha \cdot \pi) \qquad (7.6)$$

$$C_q = \alpha - \frac{1}{\pi} \cdot \sin(\alpha \cdot \pi)$$

Die Minderungsfaktoren sind sehr unterschiedlich $C_d >> C_q$ (7.7), denn Längs- und Querfeld arbeiten bei Klauenpol- wie bei Schenkelpolläufern auf ganz verschiedene Reaktanzen. Werden die verminderten Komponenten der Ankerdurchflutung in das Zeigerdiagramm (Bild 7.1) eingetragen, so ist der Erregerbedarf V_e graphisch ablesbar oder auch berechenbar durch die Gleichung:

$$V_e^2 = (V_L - V_d)^2 + V_q^2 \qquad (7.8)$$

Durch Einsetzen ergibt sich, wobei der Winkel $\gamma = 45°$ beträgt:

$$V_e^2 = \left(V_L - \hat{\Theta}_{AR} \cdot \frac{C_d}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\hat{\Theta}_{AR} \cdot \frac{C_q}{\sqrt{2}} \right)^2 \qquad (7.9)$$

Am Zeigerdiagramm ist bereits deutlich erkennbar, daß die Querkomponente der Ankerrückwirkung Θ_q wegen der Kleinheit ihres Minderungsfaktors C_q (Gl. 7.7) auf die Amplitude des Erreger-

bedarfs nur einen geringen Einfluß auszuüben vermag, weshalb für I praxisnahe Berechnungen auf die gute Verwendbarkeit der Näherung hingewiesen wird:

$$V_e \approx V_L - \hat{\theta}_{AR} \cdot \frac{C_d}{\sqrt{2}} \qquad (7.10)$$

Die Amplitude der Ankerdurchflutung beträgt:

(Gl.7.3) (Gl.5.7)

$$\hat{\theta}_{AR} = \hat{J}_n \frac{\lambda \cdot d}{2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot n} = H_n \frac{\lambda}{2\pi n} \qquad (7.11)$$

und mit den Gleichungen (4.24, 2.14 und 2.17): (7.12)

$$\hat{\theta}_{AR} = \phi_L \cdot R_a$$

wobei der magnetische Widerstand des Ankerrings:

$$R_a = d\,\omega \cdot \frac{\lambda^2 \cdot K_2}{A_p \sqrt{2} \cdot \rho \cdot \pi^3 \cdot n^2} \qquad (7.13)$$

noch eine Funktion der Drehzahl und der arbeitspunktabhängigen Eindringtiefe der Wirbelströme ist. Für eine nichtlineare Beschreibung werden auch hier wieder die Approximationen aus Kapitel 5 verwendet und umgeformt:

Für die Grundwelle (Gl. 5.11)	und für die Oberwellen (Gl. 5.15):
aus $(\mu_r \mu_o)^{1/4} H_1 = a H_1^b$	$\mu_{dyn} \mu_o H_n = B_{dyn}$
bzw. $\sqrt{\mu_r \mu_o} \cdot H_1 = a^2 H_1^{2b-1}$	$\sqrt{\mu_{dyn} \mu_o} \cdot H_n = \sqrt{B_{dyn} \cdot H_n}$
folgt: $H_1 = \left[\frac{\sqrt{\mu_r \mu_o} \cdot H_1}{a^2} \right]^{\frac{1}{2b-1}}$	$H_n = \frac{1}{B_{dyn}} (\sqrt{\mu_r \mu_o} \cdot H_n)^2$

Eingesetzt in die Gleichung (7.11) unter Verwendung der Gleichung I (5.8) lautet die Ankerdurchflutung für die Grundwelle:

$$\hat{\theta}_{AR1} = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\phi_L}{A_p} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{a^2 \cdot \pi^2} \cdot K_2 \sqrt{\frac{\omega}{\rho}} \right)^{\frac{1}{2b-1}} \qquad (7.14)$$

und für die Oberwellen: $n = 3,5,7,\ldots$

$$\hat{\theta}_{ARn} = \frac{\lambda \cdot \omega}{2 \cdot \pi \cdot n^2 \cdot B_{dyn} \cdot \rho} \left(\frac{\phi_L}{A_p} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\pi^2 \cdot n} K_2 \right)^2 \qquad (7.15)$$

Man sieht, daß die Oberwellenamplituden mit $1/n^4$ abnehmen. Sie sind folglich stark gedämpft, so daß ein von den Oberwellen ausgehender Beitrag zur Ankerrückwirkung sich nur in geringem Maße bemerkbar machen kann. Das in Bild 7.2 gezeigte Linienspektrum macht dies deutlich.

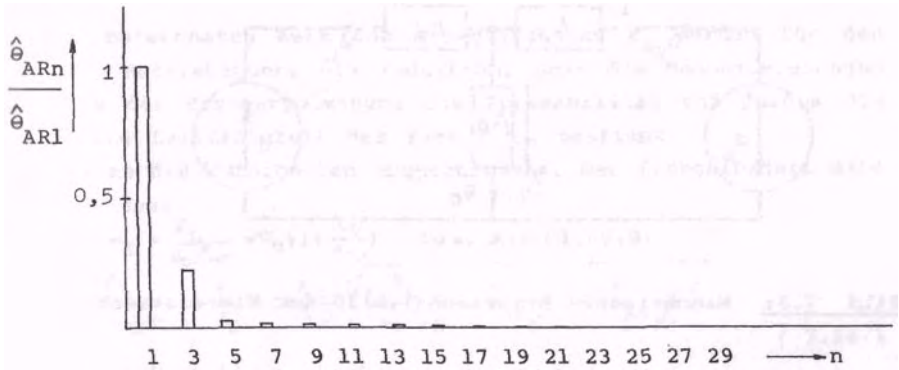


Bild 7.2: Oberwellenspektrum der Ankerdurchflutung und der Ankerrückwirkung bei Nennbetrieb.

7.5 Magnetisches Ersatzschaltbild

Beim Klauenpolrad einer Wirbelstromkupplung tritt Streuung im Bereich des Spulenraums, der Pollücke und an den Polspitzen auf. In der Summe bleibt der Streufluß zu berücksichtigen:

$$\Phi_\sigma = V_e \cdot \mu_o \cdot \Lambda_\sigma \quad (7.16)$$

Der Luftspaltfluß beträgt: $\Phi_L = V_L \cdot \mu_o \cdot \Lambda_L$ (7.17)

Aus der Summe beider setzt sich der Erregerfluß zusammen:

$$\Phi_E = \Phi_L + \Phi_\sigma = V_m \cdot \mu_o \cdot \Lambda_m \quad (7.18)$$

Dem Leitwert des Polradeisens Λ_m muß eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden muß; er ist bei handelsüblichen Kupplungen wegen der hohen Ausnutzung des Erregereisens sättigungsabhängig und nicht mehr konstant. Die magnetischen Spannungsabfälle V_m und V_e verlangen die Erregerdurchflutung Θ_E:

$$\Theta_E = V_m + V_e \quad (7.19)$$

In dem magnetischen Ersatzschaltbild 7.3 sind die Zusammenhänge anschaulich dargestellt.

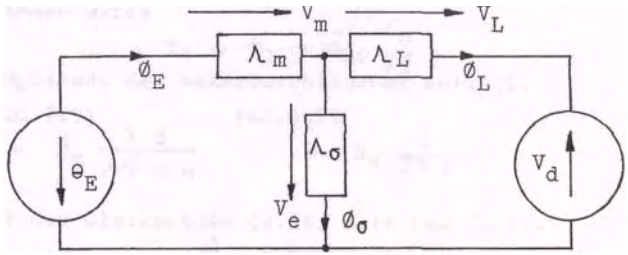


Bild 7.3: Magnetisches Ersatzschaltbild der Wirbelstromkupplung

7.6 Erregerbedarf

Die Berechnung des magnetischen Kreises dient dem Zweck, den Erregerbedarf bestimmen zu können, also den Erregerstrom I_E und über die Windungszahl der Spule w_E die Erregerdurchflutung

$$\Theta_E = I_E \cdot w_E \quad (7.20)$$

zu ermitteln, die erforderlich ist, um einen bestimmten Luftspaltfluß Φ_L und als Folge ein entsprechendes Drehmoment zu erzeugen. Diese Aufgabe kann entweder analytisch oder graphisch gelöst werden.

7.6.1 Analytische Berechnung

Bei dem Rechengang geht man am zweckmäßigsten von einem frei gewählten Wert des Luftspaltflusses Φ_L aus, für den das Drehmoment und die Ankerrückwirkung berechnet werden können. Anschließend wird die Permeabilität und die magnetische Leitfähigkeit des Polradeisens bestimmt: Mit den Gleichungen(7.9) und (7.16- 7.18) wird der Erregerfluß aus dem Luftspaltfluß berechnet:

$$\Phi_E = \Phi_L + \mu_\sigma \Lambda_\sigma \sqrt{\left(\frac{\Phi_L}{\mu_\sigma \Lambda_L} - \hat{\Theta}_{AR} \cdot \frac{C_d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\hat{\Theta}_{AR} \cdot \frac{C_q}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad (7.21)$$

mit Gleichung(7.10)in guter Näherung:

$$\Phi_E \approx \Phi_L \left(1 + \frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_L}\right) - \hat{\Theta}_{AR} \cdot \frac{C_d}{\sqrt{2}} \cdot \mu_o \cdot \Lambda_\sigma \quad (7.22)$$

Im Leerlauf, der bei einer Wirbelstromkupplung durch den Synchron-

lauf beider Kupplungshälften gekennzeichnet ist, ist keine Ankerrückwirkung vorhanden ($\hat{\Theta}_{AR}=0$) und

$$\Phi_E = \Phi_L(1+\frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_L}) \qquad (7.23)$$

Mit dem berechneten Wert des Erregerflusses Φ_E werden für den gewählten Betriebspunkt die Induktion, über die Magnetisierungskennlinie des Erregerpoleisens die Permeabilität und daraus die magnetische Leitfähigkeit des Eisens Λ_m bestimmt. Damit wären die Vorarbeiten abgeschlossen. Der Erregerbedarf wird berechnet aus:

$$\Theta_E = I_E \cdot w_E = \frac{\Phi_L}{\mu_o \cdot \Lambda_m} + V_e(1+\frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_m}) \quad \text{bzw. mit Gl.(7.9):}$$

$$I_E = \frac{\Phi_L}{\mu_o \cdot \Lambda_m \cdot w_E} + \frac{1}{w_E}\cdot(1+\frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_m})\sqrt{(\frac{\Phi_L}{\mu_o \Lambda_L} - \hat{\Theta}_{AR}\cdot\frac{c_d}{\sqrt{2}})^2 + (\hat{\Theta}_{AR}\cdot\frac{c_q}{\sqrt{2}})^2} \qquad (7.24)$$

oder mit Gl.(7.10)in guter Näherung:

$$I_E \approx \frac{\Phi_L}{\mu_o \cdot w_E}[\frac{1}{\Lambda_m} + \frac{1}{\Lambda_L}(1+\frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_m})] - \frac{\hat{\Theta}_{AR}}{w_E}\cdot\frac{c_d}{\sqrt{2}}\,(1+\frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_m}) \qquad (7.25)$$

sowie im Leerlauf aus:

$$I_E = \frac{\Phi_L}{w_E\,\mu_o \Lambda_m}(1+\frac{\Lambda_m+\Lambda_\sigma}{\Lambda_L}) \qquad (7.26)$$

7.6.2 Graphische Lösung

Wird bei industriellen Wirbelstromkupplungen eine ganze Baureihe im Sinne der Wachstumsgesetze (s. Kap. 8.4) entworfen und gebaut, so können die einmalig erstellten Kennlinien auch für alle anderen Kupplungsgrößen unmittelbar verwendet werden, wenn die graphische Darstellung in normierter Form erfolgt. Als Bezugswerte werden die Nennerregung und der zugehörige Luftspaltfluß herangezogen. Die magnetischen Spannungen werden auf den Wert der Nennerregerdurchflutung Θ_{EN} bezogen, der aus dem Nennstrom I_N laut Typenschild berechnet wird: $\Theta_{EN} = I_N \cdot w_E$ (7.27)

Damit ist: $i_E = \frac{\Theta_E}{\Theta_{EN}}$; $i_e = \frac{V_e}{\Theta_{EN}}$; $i_L = \frac{V_L}{\Theta_{EN}}$; $i_m = \frac{V_m}{\Theta_{EN}}$ (7.28)

Der zugehörige Nennluftspaltfluß muß nach Gleichung (7.26) berechnet werden:

$$\Phi_{LN} = \Theta_{EN}\,\frac{\mu_o \cdot \Lambda_m \cdot \Lambda_L}{\Lambda_L + \Lambda_m + \Lambda_\sigma} \qquad (7.29)$$

Die normierten Flüsse lauten danach:

$$\varphi_L = \frac{\Phi_L}{\Phi_{LN}}\,;\quad \varphi_E = \frac{\Phi_E}{\Phi_{LN}}\,;\quad \varphi_\sigma = \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_{LN}} \qquad (7.30)$$

Für jeden der drei zusammengefaßten Leitwerte nach Bild 7.3 kann man eine Kennlinie angeben. In Bild 7.4 sind diese eingezeichnet. Es handelt sich um die Streugerade $\varphi_\sigma(i_e)$, um die Luftspaltgerade $\varphi_L(i_L)$ und um die Polkennlinie $\varphi_E(i_m)$.

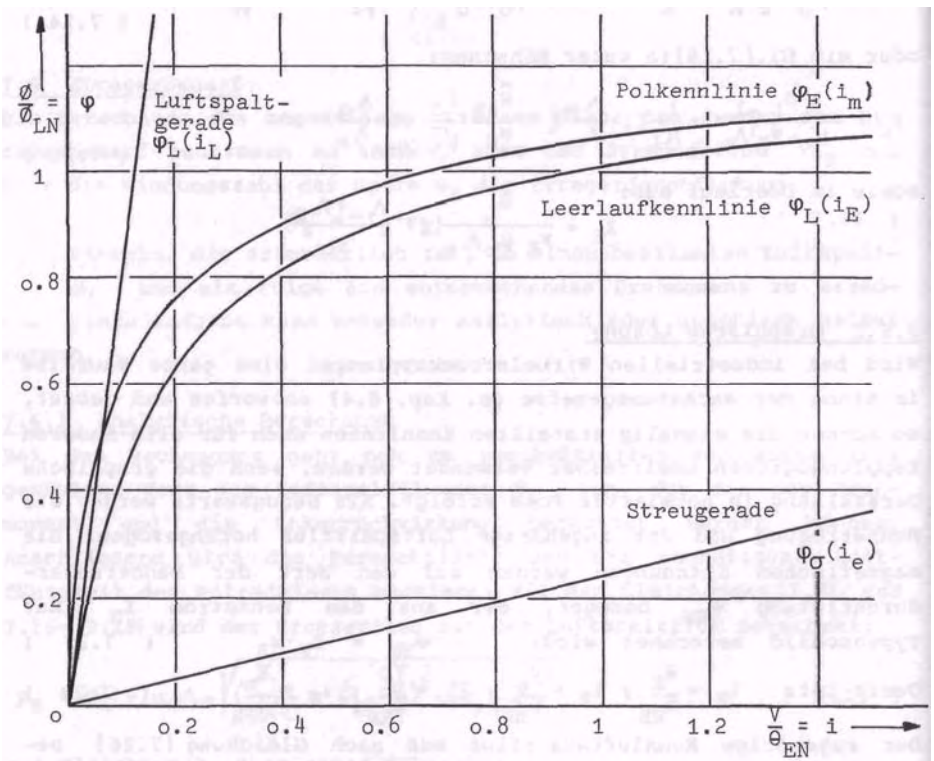


Bild 7.4: Die normierten Flußkennlinien

Zur Bestimmung des Erregerstroms wird die folgende Vorgehensweise empfohlen:

Zuerst werden die Komponenten der Ankerrückwirkung in ihrer normierten Form berechnet:

1) $$i_d = \frac{V_d}{\Theta_{EN}} = \frac{\hat{\Theta}_{AR}}{\Theta_{EN}} \cdot c_d \cdot \sin\gamma \quad \text{und} \quad i_q = \frac{V_q}{\Theta_{EN}} = \frac{\hat{\Theta}_{AR}}{\Theta_{EN}} c_q \cdot \cos\gamma \qquad (7.31)$$

Damit die Ankerdurchflutung $\hat{\Theta}_{AR}$ nach Gleichung (7.14) berechnet werden kann, wird von einem entsprechend gewählten Wert des Luftspaltflusses φ_L ausgegangen.

2) über die Luftspaltgerade wird die Luftspaltspannung V_L bzw. $i_L = V_L/\Theta_{EN}$ abgetragen.

i) Entsprechend dem Zeigerbild 7.1 müssen jetzt die Komponenten der Ankerrückwirkung in ihrer jeweiligen Phasenlage hinzuaddiert werden und der resultierende Zeiger i_E, der den Erregerbedarf für den Ankerring wiedergibt, muß auf die Durchflutungsachse zurückprojeziert werden.

4) Aus der Streugeraden $\varphi_\sigma(i_e)$ wird der Streufluß ermittelt.

5) Nach Gleichung(7.18) wird der Erregerfluß bestimmt: $\varphi_E = \varphi_L + \varphi_\sigma$

6) Aus der Polkennlinie $\varphi_E(i_m)$ wird der magnetische Spannungsabfall im Polradeisen V_m bzw. $i_m = V_m/\Theta_{EN}$ ermittelt.

7) Nach Gleichung (7.19) wird der Erregerbedarf schließlich bestimmt durch die Addition: $i_E = i_m + i_e$ (7.32)

Die in Bild 7.4 ebenfalls eingezeichnete Leerlaufkennlinie $\varphi_L(i_E)$ wird in der entsprechenden Weise hergeleitet, nur daß im Leerlauffall $i_e = i_L$ ist, keine Ankerrückwirkung auftritt und die Punkte 1) und 3) übersprungen werden können.

Die theoretische Vorgehensweise wird im nächsten Kapitel 8.1 durch den Vergleich mit einzelnen Meßwerten auf ihre Brauchbarkeit hin untersucht.

8. Überprüfung der vollständigen Theorie

8.1 Auswertung des magnetiachen Kreises

Nach den in Kapitel 7 angegebenen Verfahren kann über den magnetischen Kreis einer Wirbelstromkupplung der Luftspaltfluß berechnet werden in seiner Abhängigkeit vom Erregerstrom und über die Ankerrückwirkung auch von der Drehzahl. Die Luftspaltflußmessung erfolgt an den zum Luftspalt hin offenen Enden der Klauenpole, wie im Kapitel 6.2 dargelegt (s.a. Bild 6.1). Die gemessenen und berechneten Luftspaltflußwerte sind in Bild 8.1 aufgetragen:

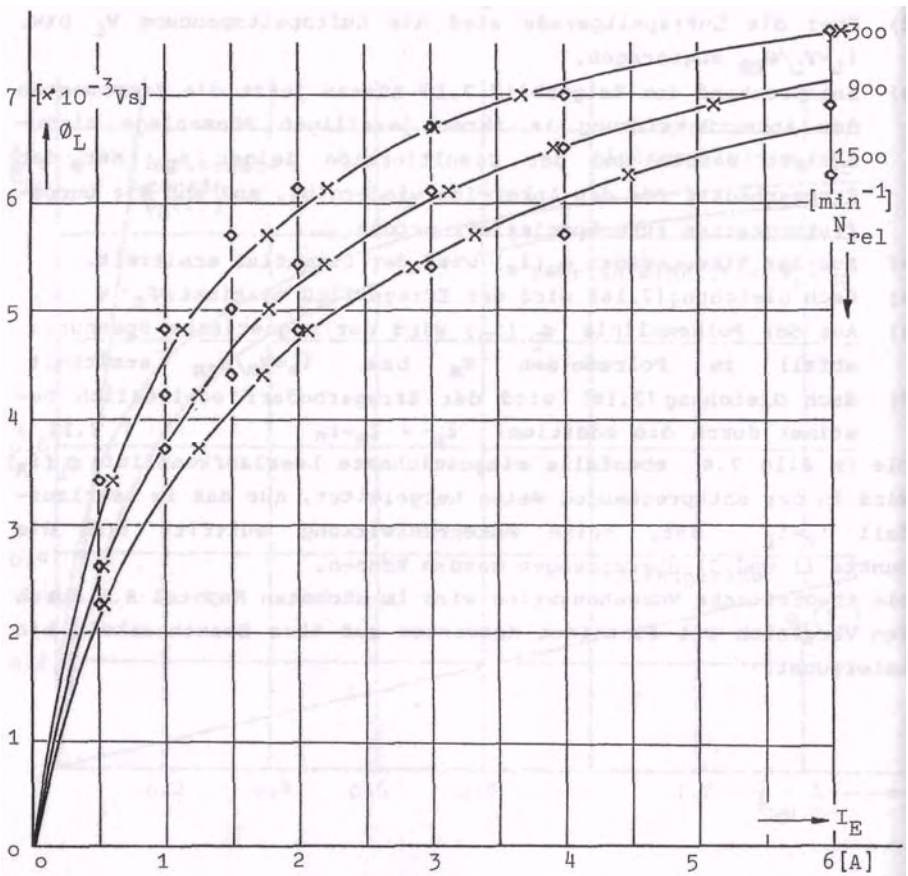


Bild 8.1: Der berechnete Luftspaltfluß (x) im Vergleich mit einzelnen Meßpunkten (◇), (Kupplung 2)

Der Vergleich wird bei den sehr unterschiedlichen Schlupfdrehzahlen: s =0,2; 0,6 und 1 durchgeführt. Die erzielte Übereinstimmung der gemessenen mit den gerechneten Werten ist bemerkenswert gut; sie unterscheiden sich um maximal 6%. Der von der Drehzahl abhängige, feldschwächende Einfluß der Ankerrückwirkung ist deutlich erkennbar.

8.2 Drehmomentauswertungen

Es können jetzt die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien mit dem Erregerstrom als Parameter berechnet werden, wie man sie üblicherweise für Wirbelstromkupplungen angibt. Die Meßmethode ist bereits in Kapitel 6.2 erklärt worden. Sie ist für alle fünf Kupplungen identisch. Die Berechnung, ob zwei- oder dreidimensional, richtet sich nach dem jeweiligen Untersuchungsobjekt.

8.2.1 Drei handelsübliche Kupplungen (Nr.1-3)

Wie für die drei handelsüblichen Kupplungen bereits in den Bildern 6.2 - 6.4 in Abhängigkeit vom Luftspaltfluß gezeigt, wird das Drehmoment jetzt abhängig vom Erregerstrom über der Drehzahl aufgetragen.

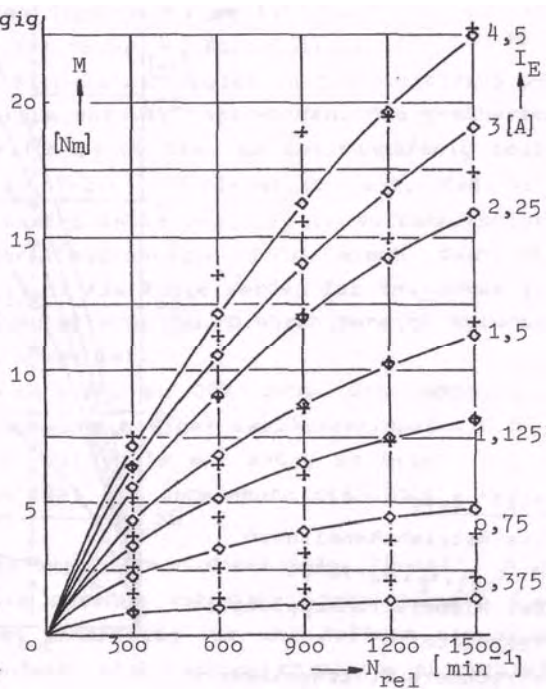


Bild 8.2:
Die Betriebskennlinien
$M\ (N_{rel},\ I_E,\ \vartheta_a=30°C)$
der Wirbelstromkupplung 1,
Meßpunkte: ◇
errechnete Stützstellen: +

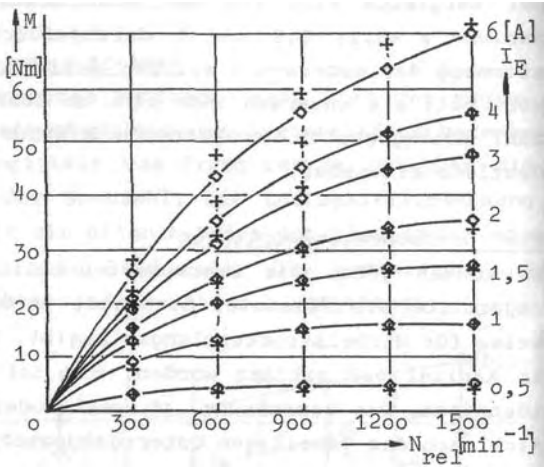


Bild 8.3:
Die Betriebskennlinien
$M(N_{rel}, I_E, \vartheta_a = 30°C)$
der Wirbelstromkupplung 2,
Meßpunkte: ◇
errechnete Stützstellen: +

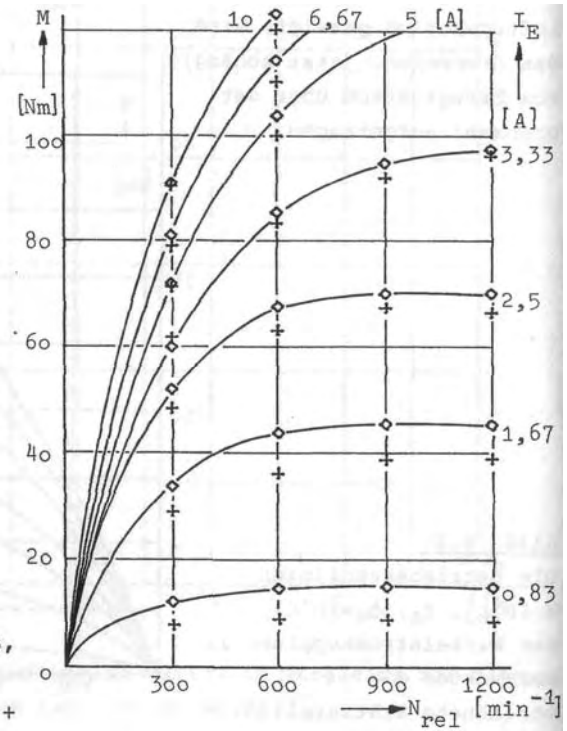


Bild 8.4:
Die Betriebskennlinien
$M(N_{rel}, I_E, \vartheta_a = 30°C)$
der Wirbelstromkupplung 3,
Meßpunkte: ◇
errechnete Stützstellen: +

Wie Kontrollrechnungen gezeigt haben, ist mit keiner der bekannten und bereits zitierten Theorien zur Berechnung von Wirbelstromkupplungen eine vergleichbar gute Übereinstimmung mit den Messungen handelsüblicher Kupplungen erzielt worden, wie mit dieser dreidimensionalen nichtlinearen Theorie. Ihre Allgemeingultigkeit soll mit Hilfe der Testkupplungen untersucht werden.

8.2.2 Testkupplungen ohne Endringe

Für Kupplungen, die sich durch eine parallelflankige, rein heteropolare Polanordnung auszeichnen, sind Berechnungsergebnisse bekannt, die auf zweidimensionalen Theorien basieren /30-32/. Den Autoren bereiten besonders für den Fall, daß der Ankerring keine Endringe besitzt, die sehr starken, von der axialen Richtung abweichenden Wirbelstromkomponenten Schwierigkeiten. Es werden hilfsweise - sogar noch in neuester Zeit /35,36/ - "Strombahnen" angegeben, auf denen die Ankerringströme angeblich fließen, um die Voraussetzung VII treffen und die zweidimensionale Theorie anwenden zu können. Aus der Bahnkurve wird die mittlere Weglänge und daraus ein "Korrekturfaktor" für die Ankerringlänge hergeleitet /6,32,35,36/. Eine derartige Vorgehensweise ist sehr willkürlich; sie widerspricht vor allem der Natur der Wirbelströme. Es sind auch für derartige Wirbelstromkupplungen die dreidimensionale Theorie und ihre Gleichungen(3.49) anzuwenden. Die genäherte Polbeschreibung kann natürlich nicht mehr so leistungsfähig sein wie bei den trapezförmigen Polen. Problematisch ist, daß die harmonischen Anteile für Laufvariable m=3,5,7,... vernachlässigt werden, die im Fall parallelflankiger Pole einen deutlich beobachtbaren Einfluß besitzen. Als Folge werden für m=l etwas zu kleine Drehmomentwerte im entsprechenden Drehzahlbereich berechnet, wie aus Bild 8.5 zu ersehen ist.

Die berechneten Werte können bis zu 20% unter den gemessenen liegen. Versucht man es dagegen mit einer zweidimensionalen Rechnung ohne Korrekturfaktoren (Gl. 5.19 mit m=0), so ergeben sich viel zu große, um mehr als 100% die gemessenen Drehmomente übersteigende Werte.

Damit ist die Notwendigkeit einer dreidimensionalen Theorie aufgezeigt ; oder physikalisch gesehen ist damit gezeigt, daß die Wirbelströmung im Ankerring unabhängig von der Polform nie rein axial gerichtet ist, sondern sich immer räumlich ausbreitet

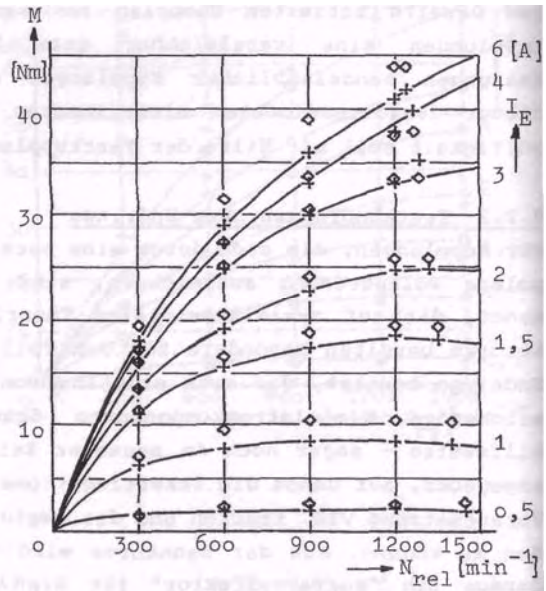


Bild 8.5:
Die Betriebskennlinien M (N_{rel}, I_E, ϑ_a=30°C) der Testkupplung 4 ohne Endringe. Meßpunkte: ◇ errechnete Stützstellen: +

und "Wirbel" bildet - wie ihr Name schon sagt.

8.2.3 Endringkupplung (Nr. 5)

Endringkupplungen hingegen, die wegen der Anhebung der axialen Wirbelstromkomponente naturgemäß ein höheres Drehmoment besitzen, werden zweidimensional ohne Korrekturfaktor berechnet. Die aus einer guten Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung so häufig hergeleitete Schlußfolgerung, die Wirbelströme wären in diesem Fall axial gerichtet, erweist sich bei genauerer Betrachtung auch hier als Irrtum. Von den im Ankerring induzierten Wirbelströmem werden sicherlich ein Teil die gut leitenden Endringe mitbenutzen. Ein kleiner Anteil von diesen wiederum wird tatsächlich den Ankerring auf direktestem Wege von einem Endring zum anderen, axial gerichtet durchqueren. Die Mehrheit fließt jedoch nach wie vor auf gekrümmten, räumlich verlaufenden Bahnkurven. Wird dieser Tatsache Rechnung getragen, so wird klar, daß die Endringkupplung sich dem Berechner nicht als einfachster, sondern ganz im Gegenteil als kompliziertester Kupplungstyp darstellt, da die Theorie für m=l nicht mehr und die für m=0 noch

nicht anwendbar ist.
In Bild 8.6 ist bei Nennerregung zu reinen Demonstrationszwecken gezeigt, wie die bereits in Bild 8.5 aufgetragenen Berechnungsergebnisse der dreidimensionalen Theorie (B) zu gering, die zweidimensional berechneten Werte (A) dagegen viel zu groß sind.

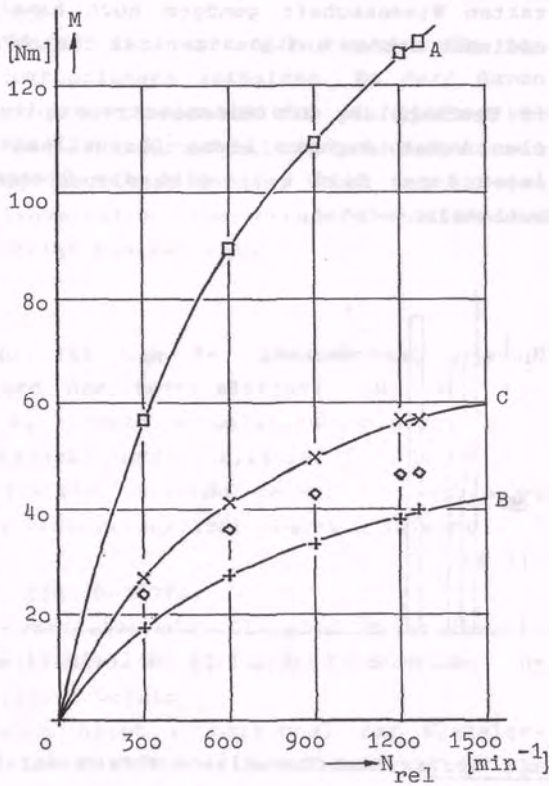


Bild 8.6:
Die Betriebskennlinien M (N_{rel}, I_E=4A, ϑ_a=30°C) der Testkupplung 5 mit Endringen.
Dargestellt sind die Berechnungen
A) nach der zweidimensionalen Theorie (m=0) :□
B) nach der dreidimensionalen Theorie (m=1) :+
C) nach der Grundwellentheorie /Davies: 31/:×
im Vergleich mit den Meßpunkten (◇).

Es wird darauf verzichtet, für Endringkupplungen eine Lösung der dreidimensionalen Beschreibung für m=1,3,5,... zu suchen oder eine Empfehlung abzuleiten, zwischen den beiden berechneten Ergebnissen in irgendeiner Form zu mittein, da dieser Kupplungstyp auch in Zukunft aus industrieller Sicht kaum Bedeutung erlangen dürfte.

Sollte sich dennoch die Notwendigkeit ergeben, Endringkupplungen berechnen zu müssen, kann die Grundwellenbeschreibung aus Gleichung (5.19) für n=1 und für den zweidimensionalen Fall, daß m=0 ist, zu Hilfe genommen werden. Die auf diese Weise gewonnene

mathematische Beschreibung entspricht weitgehend der von Davies angegebenen Grundwellentheorie /31/. Bild 8.6 zeigt deutlich, daß diese mit einem zweifachen Fehler behaftete Theorie für die Vorausberechnung der Endringkupplung die besten Ergebnisse zu liefern vermag. Diese Theorie kann aber weder den Ansprüchen einer exakten Wissenschaft genügen noch kann sie bedenkenlos verallgemeinert werden und als "General Theory" bezeichnet werden /31/.

Die Testkupplung mit ihren extrem spitzen und parallelflankigen Polen weist dagegen einen Oberwellengehalt aus, der über 50% liegen kann. Bild 8.7 gibt das Spektrum der Testkupplung bei Nennbetrieb wieder.

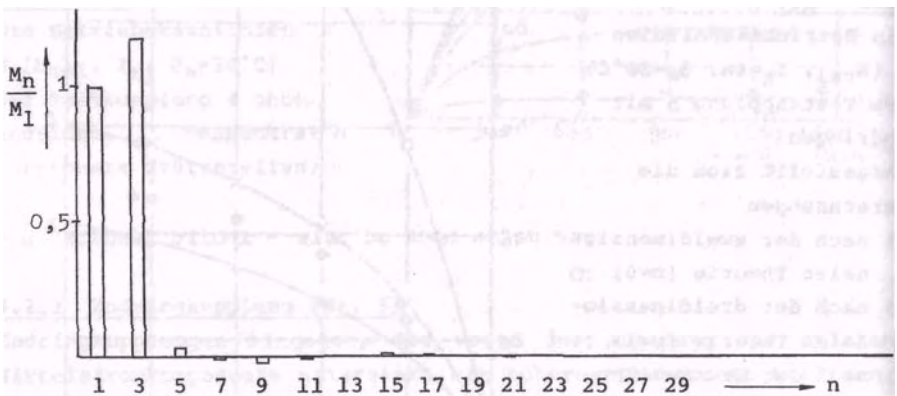


Bild 8.7: Das Oberwellenspektrum des Drehmoments der Testkupplung 5 bei Nennbetrieb ($\alpha = 1/\pi = 0{,}318$)

Der Oberwellengehalt wird weitgehend von der dritten Oberwelle bestimmt, und diese kann direkt beeinflußt werden über die Polbreite bzw. das Polbedeckungsverhältnis: $\alpha = b_p/\tau_p$
Beträgt bei $\alpha = 0{,}318$ der Oberwellengehalt noch 55%, so geht er bei $\alpha = 0{,}5$ auf 11% zurück. Bei $\alpha = 0{,}67$ verschwindet die dritte Oberwelle weitgehend, und der Oberwelleneinfluß ist kaum noch spürbar.
Abgesehen von diesen Überlegungen treten jedoch bei derartigen Polbreiten feldverzerrend wirkende und Oberwellen erzeugende

Einflüsse hinzu, die von der Ankerrückwirkung herrühren und deren genauere Betrachtung ausgesprochen schwierig ist, so daß eine Aussage darüber, bei welchem Polbedeckungsverhältnis der Oberwelleneinfluß minimal ist, sehr schwer zu treffen ist.

8.3 Konstruktionsrichtlinien

In der Drehmomentgleichung(5.19) sind wertvolle Hinweise für den Konstrukteur von Wirbelstromkupplungen enthalten. Es darf davon ausgegangen werden, daß sich dieser auschließlich für "Industrietypen" (m=l) interessiert. Bei einer Grundwellenbetrachtung können einige wichtige Zusammenhänge abgelesen werden, wobei das von dem proportional zum Grundwellenverhalten abweichende Verhalten der Oberwellen hier unberücksichtigt bleiben kann.

8.3.1 Betriebsverhalten

Von elektrischen Maschinen ist man den Zusammenhang gewohnt zwischen dem Drehmoment und dem Luftspaltfluß: $M \sim \Phi_L^2$ bzw. der Flußdichte: $M \sim B_a^2$. Auch Wirbelstromkupplungen sind bereits auf diese Weise berechnet worden /2,14,16/. Wird jedoch die vorliegende nichtlineare Theorie zugrunde gelegt, so wird das Betriebsverhalten durch die Proportionalität charakterisiert:

$$M \sim \Phi^{\frac{2b}{2b-1}} = \Phi_L^{2,825} \quad \text{(für b=0,774)} \tag{8.1}$$

Wegen der Gleichungen(2.14)und(2.17) gilt dieselbe Proportionalität auch für die Luftspaltinduktion B_a. Diese Auswirkung ist bereits in Bild 2.3 demonstriert worden.

Das Drehmoment verläuft auch nicht proportional zur Winkelgeschwindigkeit (0 /14,16/,vielmehr wird das Betriebsverhalten beschrieben durch:

$$M \sim \omega^{1/(4b-2)} = \omega^{0,9124} \quad \text{(für b=0,774)} \tag{8.2}$$

Oies gilt auch für die Relativdrehzahl N_{rel} (nach Gl.4.20).

8.3.2 Materialeigenschaften

Es erhebt sich die Frage, welche Materialeigenschaften der Ankerring besitzen soll: Für die elektrischen Eigenschaften ist der spezifische Widerstand verantwortlich:

$$M \sim \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{4b-2}} = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{0,9124} \tag{8.3}$$

Das Ankeifringmaterial sollte ausschließlich gute elektrische

Eigenschaften aufweisen. Diese Erkenntnis wird speziell bei der scheibenförmigen Wirbelstrombremse mit Kupferscheibe /1/ und auch bei kupferbeschichteten Ankerringen /4,29,34/ ausgenutzt. Die magnetischen Eigenschaften sind in erster Linie von der Materialkonstanten a abhängig:

$$M \sim \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{2b-1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{3,65} \qquad \text{(für } b=0,774\text{)} \qquad (8.4)$$

Dieses Ergebnis könnte zunächst etwas überraschen, denn es sagt aus, daß bei einer konstant gehaltenen Luftspalterregung das Drehmoment umso größer wird, je schlechter die magnetische Eigenschaft des Ankerringmaterials ist.
Die Ursache ist darin zu sehen, daß gute magnetische Eigenschaften nur zu einer starken Stromverdrängung führen, was sich auf die Verlustbildung der Wirbelströme aber ungünstig auswirkt. Um die Luftspaltflußdichte B_a aufrecht zu erhalten, sind in gewissem Maße aber trotzdem magnetische Eigenschaften erforderlich, da bei schlechtem magnetischem Rückschluß die dem Polrad abverlangte Amperewindungszahl unmäßig ansteigen würde.
Ferner muß das Ankerringmaterial wegen der auftretenden Schlupfverluste gute Wärmeleitungseigenschaften besitzen. Wegen der Fliehkräfte, in besonderem Maße aber wegen der hohen radialen Zugkräfte sind außerdem hohe mechanische Festigkeitseigenschaften erforderlich.

8.3.3 Abmessungen

Im Vordergrund jeder Konstruktion steht die Frage nach dem Einfluß der Geometrie und die daraus ableitbaren Forderungen nach der günstigsten Wahl der Abmessungen; beispielsweise der Ankerlänge L:

$$\text{Für } L \gg \tau_p \text{ ist } M \sim L^{\frac{2b+1}{2b-1}}$$
$$\text{und für } L \ll \tau_p \text{ ist } M \sim L^{\frac{2b+1}{2b-1}} = L^{4,65}$$

Für die Drehmomenterzeugung ist weitgehend das Verhältnis:

$$\beta = \tau_p / L \qquad (8.5)$$

von Bedeutung. Ist β sehr klein, so kann durch die Wahl einer größeren Länge L oder einer geringeren Polteilung τ_p sehr viel an Drehmoment gewonnen werden. Zu größeren Werten von β hin bringt diese Maßnahme jedoch immer weniger, bis schließlich nur noch die reine Proportionalität $M \sim L$ übrigbleibt. Vermutlich existiert ein bezüglich der Drehmomentbildung optimales Verhältnis β.

Die Maximierung erfordert, daß Gleichung (5.19):

$$M = K \cdot L^2 \cdot \beta(1+\beta^2) \cdot \left(\frac{B_a}{1+\beta^2}\right)^{\frac{2b}{2b-1}}$$

der Bedingung genügt:

$$\frac{dM}{d\beta} = 0 = K \cdot B_a^{\frac{2b}{2b-1}} \cdot L^2 \left((1+\beta^2)^{\frac{1}{1-2b}} + \beta \cdot 2 \cdot \beta \cdot \frac{1}{1-2b} \cdot (1+\beta^2)^{\frac{1}{1-2b}-1} \right)$$

also: $(2b-1) \cdot (1+\beta^2) = 2\beta^2$

Das Verhältnis von Polteilung zur Ankerringlänge ist optimal gewahlt, wenn

$$\beta = \frac{\tau_p}{L} = \sqrt{\frac{2b-1}{3-2b}} = 0{,}614 \quad \text{(bei } b=0{,}774\text{)} \qquad (8.6)$$

ist. War ß bisher rein intuitiv festgelegt worden (z.B. ß=0,582 bei der Kupplung 2), so haben Konstrukteure von nun an in der Gleichung(8.6) ein wertvolles Hilfsmittel. Der Durchmesser am Luftspalt ist dann gegeben durch:

$$D = \frac{p}{\pi}\lambda = \frac{p}{\pi} \cdot 2\, L\, \beta \quad , \qquad (8.7)$$

d.h. er ist durch die Polpaarzahl und durch die Ankerringlänge festgelegt. Aus dieser Gleichung wird auch die günstigste Polpaarzahl ermittelt, wenn das maximale Einbauvolumen vorgegeben ist, wie dies häufig von der maschinenbaulichen Praxis gefordert wird.

8.4 Wachstumsgesetze

Hat man eine Wirbelstromkupplung konstruktiv optimiert, so können weitere Baugrößen durch lineare Vergrößerung der geometrischen Abmessungen um den Vergrößerungsfaktor ε gewonnen werden. Diese Maßnahme ist jedoch nicht uneingeschränkt durchführbar, wie aus den Wachstumsgesetzen hervorgeht. Ist man bei elektrischen Maschinen den Zusammenhang für das Drehmoment: $M \sim \varepsilon^4$ und für die
Leistung pro Volumeneinheit $P/V \sim \varepsilon$ gewohnt, so gelten bei Wirbelstromkupplungen die Proportionalitäten:

$$M \sim \varepsilon^2 (\varepsilon)^{\frac{2b}{2b-1}} = \varepsilon^{\frac{6b-2}{2b-1}} = \varepsilon^{4{,}825}$$

und $$\frac{P_{VA}}{V} \sim \varepsilon^{\frac{1}{2b-1}} = \varepsilon^{1{,}825}$$,der spezifischen

Leistung, bei der die Wirbelstromverluste nach Gleichung(4.22) auf das Volumen $V \sim \varepsilon^3$ bezogen werden.
Diesem Ergebnis zufolge müßte es sinnvoll sein, besonders große Baugrößen zu fertigen, weil dadurch das Leistungs-Volumenverhältnis und die Materialausnutzung günstiger werden. In der Praxis

darf allerdings nicht unberücksichtigt bleiben, daß die höhere Maschinenleistung auch höhere Verluste nach sich zieht: Die maximale Übertemperatur beträgt:

$$\vartheta_{ü} = \frac{P_{VA}}{\alpha \cdot O} \sim \frac{\varepsilon^{\frac{6b-2}{2b-1}}}{\varepsilon^2} = \varepsilon^{\frac{2b}{2b-1}} = \varepsilon^{2,825}$$

Dieses Ergebnis ist insofern ernüchternd, als die Übertemperatur noch schneller steigt, als der Gewinn an spezifischer Leistung sich auswirken kann - sehr viel schneller als man dies üblicherweise bei elektrischen Maschinen ($\vartheta_{ü} \sim \varepsilon$) gewohnt ist. Bei großen Kupplungseinheiten tritt die Forderung nach einer Maximierung des Drehmoments hinter der Forderung nach einem optimalen Wärmeabfuhrvermögen zurück. Letzterem sind aber physikalisch und fertigungstechnisch Grenzen gesetzt. Eine überhitzung der Kugellager oder die Zerstörung der Wicklungsisolation kann in den meisten Anwendungsfällen nur durch eine sinnvolle Begrenzung der Verlustleistung P_{VA} verhindert werden. Betrachtungen zur Temperaturabhängigkeit des Drehmoments und zum Einfluß thermodynamischer Ausgleichsvorgänge sind für die Vorausberechnung von Wirbelstromkupplungen genauso wichtig wie die Drehmomentberechnung. Aus der einschlägigen Literatur sind jedoch keine entsprechenden Untersuchungen und Berechnungen bekannt, wie sie im nächsten Kapitel dargelegt werden.

9 Thermisches verhalten

Will man die Erkenntnisse dieser dreidimensionalen Theorie voll ausschöpfen und entsprechend der Konstruktionsrichtlinien das Drehmoment maximieren, so steigen dadurch auch die möglichen Schlupfverluste an. Die Verbesserung der Materialausnutzung geht also einher mit einer zusätzlichen Wärmebelastung wie dies an Hand der Wachstumsgesetze dargelegt worden ist.
Von den beiden für den Einsatz elektrischer Maschinen notwendigen Auslegungen, der Drehmoment- und der thermischen Auslegung, gewinnt letztere an Bedeutung.

9.1 Temperaturabhängigkeit des Drehmoments

In Kapitel 8.3.2 ist die Proportionalität (Gl. 8.3) hergeleitet worden:

$$M_1 \sim \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{4b-2}} = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{0{,}9124}$$

mit dem temperaturabhängigen spezifischen Widerstand ρ.
An dieser Stelle soll auch die Vernachlässigung IV aus Kapitel 2.1 fallen gelassen werden, wonach der Widerstand des Ankerrings konstant sein sollte. Der spezifische Widerstand ρ_m ist nach Hutte /28, S. 177/ von der Übertemperatur $(\vartheta_m - \vartheta_a)$ wie folgt abhängig:

$$\rho_m = \rho_a \left[1 + (\vartheta_m - \vartheta_a) \cdot \alpha\right] \qquad (9.1)$$

wenn ρ_a der spezifische Widerstand des Ankerringmaterials bei dar Außentemperatur ϑ_a ist und ρ_m bei der Betriebstemperatur ϑ_m.
Die Verringerung des Drehmoments bei heißem Ankerring (M_m) gegenüber einer auf die Umgebungstemperatur ϑ_a abgekühlten Kupplung (M_a) beträgt:

$$\frac{M_m}{M_a} = \frac{\hat{\theta}_{ARm}}{\hat{\theta}_{ARa}} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{4b-2}} = \left(\frac{1}{1+\alpha\cdot(\vartheta_m - \vartheta_a)}\right)^{\frac{1}{4b-2}} \qquad (9.2)$$

Die Ankerringdurchflutung nimmt in dem gleichen Maße ab. Für die Grundwellenberechnung ist im vorliegenden Fall b=0,774 und für die Oberwellen b=0,75 einzusetzen.
Eine Wirbelstromkupplung (m=l), deren Ankerring mit der Übertemperatur

$$\vartheta_ü = \vartheta_m - \vartheta_a \qquad (9.3)$$

betrieben wird, überträgt (nach Gl. 5.19 und 9.2) folglich das Drehmoment $(M_m(\vartheta_ü, \Phi_L, N_{rel})$.

$$M_m = \frac{L\cdot\lambda\cdot p^2}{4}\sqrt{\frac{\rho_a\cdot(1+\alpha\cdot\vartheta_ü)}{\pi\ p\ N_{rel}}}\cdot\left\{\frac{a^2}{2}(1+ß^2)\left[\frac{Ø_L}{pA_p}\cdot\frac{2\cdot b_{pi}}{\pi a^2\cdot(1+ß^2)}\cdot\sqrt{\frac{2\pi\ p\ N_{rel}}{\rho_a(1+\alpha\cdot\vartheta_ü)}}\right]^{\frac{2b}{2b-1}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=3,5,7,\ldots}^{\infty} \frac{n^2+ß^2}{2B_{dyn}}\left[\frac{Ø_L}{pA_p}\cdot\frac{2\cdot b_{pi}}{\pi\cdot(n^2+ß^2)}\cdot\sqrt{\frac{2\pi\ p\ N_{rel}}{\rho_a(1+\alpha\cdot\vartheta_ü)}}\right]^3\right\} \qquad (9.4)$$

mit $ß = \frac{\lambda}{2\cdot L} = \frac{\tau_p}{L}$

Der jeweilige Luftspaltfluß $Ø_L$ verlangt nach Gleichung (7.24) einen Erregerstrom:

$$I_E = \frac{Ø_L}{\mu_o\cdot\Lambda_m\cdot w_E} + \frac{1}{w_E}\left(1+\frac{\Lambda_\sigma}{\Lambda_m}\right)\sqrt{\left(\frac{Ø_L}{\mu_o\cdot\Lambda_L} - \hat{\theta}_{AR}\cdot\frac{C_d}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\hat{\theta}_{AR}\cdot\frac{C_q}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

wobei die Ankerringdurchf lutung (mit Gl. 7.14 und Gl. 9.2) beträgt:

$$\hat{\theta}_{AR} = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{Ø_L}{pA_p}\cdot\frac{2}{a^2\cdot\pi}\cdot\frac{b_{pi}}{(1+ß^2)}\sqrt{\frac{2\pi\ p\ N_{rel}}{\rho_a(1+\alpha\cdot\vartheta_ü)}}\right]^{\frac{1}{2b-1}} \qquad (9.5)$$

Dieses sind die vollständigen Gleichungen zur Berechnung des Drehmoments handelsüblicher Wirbelstromkupplungen in Abhängigkeit von der Relativdrehzahl N_{rel}, von dem Erregerstrom I_E und von der Übertemperatur $\vartheta_ü$.

9.2 Messung der Temperaturabhängigkeit

Der Einfluß der Ankerringtemperatur auf das Drehmoment ist beträchtlich. Er kann im üblichen Betriebsbereich zu Drehmomentschwankungen von ca. 30% führen. Der Vergleich bei unterschiedlicher Temperatur gemessener und gerechneter Drehmomente dient daher nicht nur der Ermittlung dieses wichtigen Zusammenhangs, sondern auch der Überprüfung der hergeleiteten Theorie. In Bild 9.1 ist für die Kupplung 1 und in Bild 9.2 für die Kupplung 2 das Drehmoment für zwei unterschiedliche Temperaturen bei Nennerregung i_E=l und bei halber Nennerregung i_E=0,5 in seiner Drehzahlabhängigkeit aufgetragen.

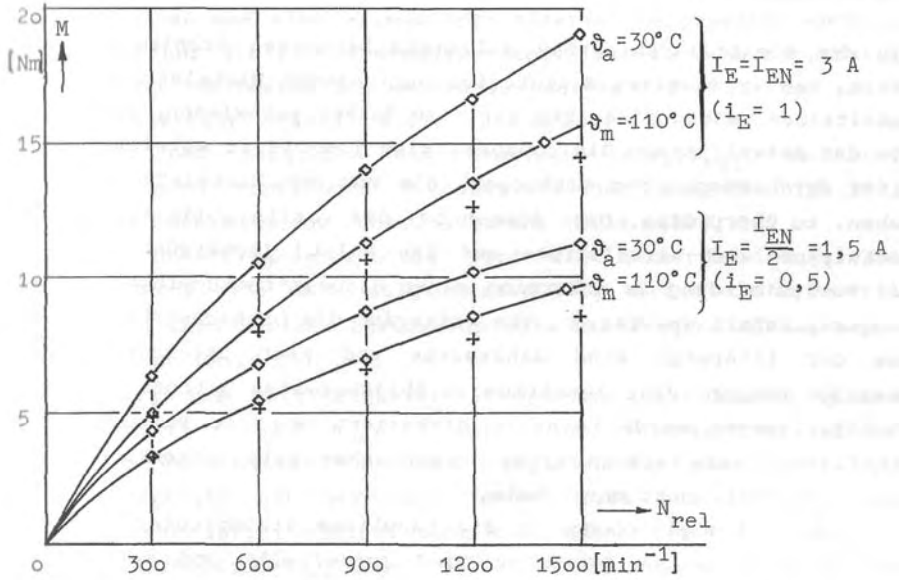


Bild 9.1: Die temperaturabhängigen Betriebskennlinien der Kupplung 1. Meßpunkte: ◇; berechnete Stützstellen: +

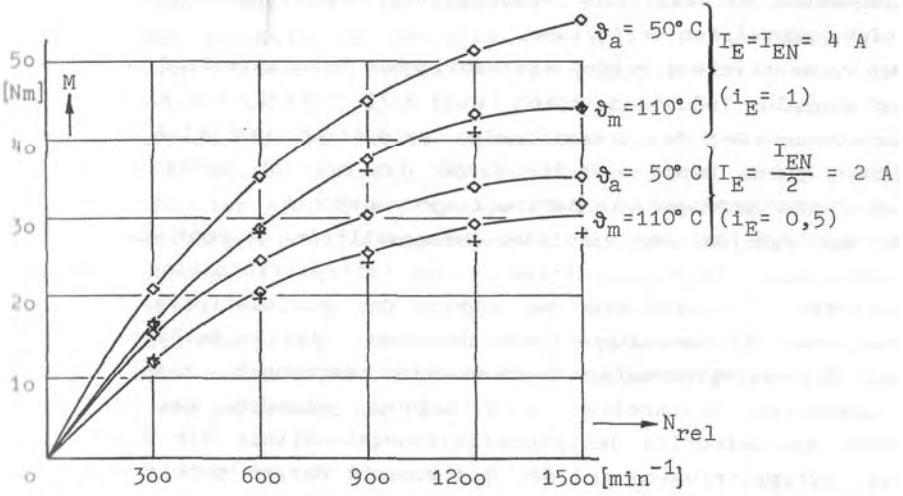


Bild 9.2: Die temperaturabhängigen Betriebskennlinien der Kupplung 2. Meßpunkte: ◇; berechnete Stützstellen: +

Zusammenfassung

Ein dem Elektromaschinenbau allgemein bekanntes Problem besteht darin, daß in massiven Eisenteilen auftretende Wirbelströme nicht unmittelbar meßbar sind. Man ist also darauf angewiesen, ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, eine Theorie zu entwickeln und diese durch Messen der Wirkungen, die von den Wirbelströmen ausgehen, zu überprüfen. Dazu dienen bei der vorliegenden Arbeit die Rückwirkung der Wirbelströme auf das Polrad (Ankerrückwirkung), die Verlustbildung im Ankerring einer Wirbelstromkupplung (Ankerringtemperatur) und das übliche Kriterium die Drehmomentbildung. Aus der Literatur sind zahlreiche und sehr unterschiedliche Theorien bekannt. Die Auswirkungen üblicherweise getroffener Vernachlässigungen werden einzeln diskutiert und die Notwendigkeit abgeleitet, zur Berechnung handelsüblicher Wirbelstromkupplungen eine neue Theorie zu entwickeln.

Die Differentialgleichung für die räumliche Stromdichteverteilung der Wirbelströme im Ankerring wird aufgestellt und auf analytischem Wege unter Berücksichtigung der Oberwelligkeit gelöst. Durch die Zerlegung in vier gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung und die Anbindung an die Randbedingungen erhält man die allgemeine mathematische Beschreibung des Stromdichtevektors in seiner räumlichen Verteilung.

Zur Verdeutlichung werden ein räumliches Feldlinienbild (Bild 3.2) und einzelne Induktionslinien (Bild 3.3) gezeigt, die sich aus der Berechnung der dreidimensionalen Feldstärke und Flußdichte ergeben. Durch Bezug auf die Größe der örtlich vorhandenen Permeabilität erfolgen die Darstellungen normiert.

Um dem Problem der variablen Permeabilität gerecht zu werden, werden über die Fourierzerlegung der Luftspaltinduktion der Luftspaltfluß und über die Berechnung der Wirbelstromverluste das Drehmoment in Abhängigkeit von der jeweiligen Feldstärkeamplitude und der entsprechenden Permeabilität berechnet. Eine passende nichtlineare Beschreibung wird dadurch gefunden, daß mit Hilfe einer Approximation der Magnetisierungskennlinie die Gleichungen des Luftspaltflusses und des Drehmoments derart miteinander verknüpft werden, daß sowohl die Feldstärkeamplitude als auch die Permeabilität eleminiert werden, das Resultat also für beliebige

Werte überall im Wirbelstromzylinder gültig ist.
Für Oberwellen muß eine eigene Approximation hergeleitet werden, da für sie nur die Oberlagerungspermeabilität wirksam ist. Unter Einbeziehung der Oberwellen werden der Betrag der Induktion räumlich dargestellt (Bild 4.4), Drehmoment und Eindringtiefe berechnet. Der Vergleich mit Messungen $M(\Phi_L, N_{rel})$ an drei handelsüblichen Kupplungen unterschiedlicher Baugröße (Nr.1-3) zeigt eine befriedigende Übereinstimmung (Bild 6.2-6.4). Uber die Ankerringdurchflutung wird die Ankerrückwirkung berechnet. Durch eine zweiachsige Darstellung wird die unsymmetrie des magnetischen Kreises berücksichtigt. Das Zeigerdiagramm macht dies deutlich (Bild 7.1).
Die magnetischen Leitfähigkeiten berechnet. Die Ermittlung des Erregerbedarfs $I_E(\Phi_L, N_{rel})$ wird auf analytische und graphische Weise vorgeführt. Der Vergleich mit einzelnen Flußmessungen zeigt, daß der magnetische Kreis ausreichend genau erfaßt worden ist, besonders wenn man bedenkt, daß bei handelsüblichen Wirbelstromkupplungen auch das Klauenpolrad bis in den Sättigungsbereich hinein ausgenutzt wird. Sowohl dieser Effekt als auch der Einfluß der Ankerrückwirkung sind deutlich erkennbar (Bild 8.1).
Zwei abgeänderte Bauformen der Kupplung 2 mit parallelflankigen, symmetrischen Erregerpolen anstelle der teilweise überlappenden trapezförmigen Klauenpole, deren Ankerring massiv (Nr.4) oder mit Kupferendringen (Nr.5) ausgebildet sind, dienen der Überprüfung der Allgemeingültigkeit dieser nichtlinearen, dreidimensionalen Theorie. Sie sollen helfen, die Grenzen dieser und bereits bekannter Theorien /30,31/ aufzuzeigen. Die Oberwellenspektren der Wirbelstromdichte, der Luftspaltinduktion und des Drehmoments werden angegeben.
Wachstumsgesetze und neue Richtlinien für konstruktive Optimierung von Wirbelstromkupplungen werden aus der Theorie abgeleitet. Zum Schluß werden noch die Abhängigkeit des Drehmoments von der Ankerringtemperatur berechnet und gemessen.

Literaturverzeichnis

/1/ Rüdenberg, R.
Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen. Stuttgart: Enke 1906 (Sammlung el. Vortr.).

/2/ Grün, A.
Feldverlauf und spezifische Bremskraft in Wirbelstrombremsen. Archiv für Elektrotechnik, Bd. 44 (1959) 3, S. 131-146.

/3/ Pelczewski, W.
Elektromagnetische Kupplungen. Braunschweig: Vieweg 1971.

/4/ Hansen,A and W.R Timmler
Theory for Eddy-Current Couplings. IEEE (1963), S. 436-442.

/5/ Malti, M.G. and R. Ramakumar
Three Dimensional Theory of the Eddy-Current Coupling. IEEE Trans. Pas-82 (1963), S. 793-799.

/6/ Gibbs, W.J.
Theory and Design of Eddy-Current Slip Couplings. Beama Journal, Bd. 53 (1946), S. 123ff., 172ff., 219ff.

/7/ Winther, J.B.
Electric Eddy Current Machinery. Electrical Engineering, Bd. 66 (1947), S. 643-646.

/8/ Erdelyi, E.A. and E.E. Kolatorowicz
Model Laws of Eddy-Current Couplings for Aircraft Alternator Drives. AIEE Trans. pt II, Bd. 79 (1961), S. 438-442.

/9/ Bähler, W. und W. van der Hoek
Anwendung einer Wirbelstromkupplung als regelbarer Antrieb. Philips Techn. Rundschau, Bd. 27 (1966), S.74-81.

/10/ Glazenko, T.A.
Some Problems in the Design of an Asynchronous Clutch with a Monolithic Rotor. Automation and Remote Control, (1959), S. 783-790 (Original: Avtomica, Moscow, 19 (1958) 8).

/ll/ Kundu, P.
Analysis of Torque-Speed-Curves of Wound Secondary Couplings in the Nonlinear Region of the Magnetization Curve. IEEE Trans. on PAS-90 (1971) 2, S. 541-547.

/12/ Riepe, F.
Beitrag zur Theorie der Drehstrom-Asynchronmaschine mit Massivläufer im stationären Betrieb. Diss. TU München 1977.

/13/ VEM-Handbuch
Die Technik der elektrischen Antriebe. Berlin: VEB-Verlag 1972, S. 168-171.

/14/ Ziesel, K.
Aufbau und Einsatz von Induktionskupplungen. Industrie-Anzeiger, Jg. 84, H 13 und 26 (1962).

/15/ Hagemeier,H.
Elektromagnetische Schlupfkupplung. Techn. Rundschau, Bd.47 (1971), S. 43-46.

/16/ Dittrich,O. und R. Schumann
Anwendungen der Antriebstechnik. Bd. 2: Kupplungen. Mainz: Krausskopf 1974, S. 279-303.

/17/ Bloxham, D.A. and M.T. Wright
Eddy-Current Coupling as an Industrial Variable-Speed Drive. Proc. IEE, Bd. 119 (1972) 8, S. 1149- 1154.

/18/ Trzynadlowski, A.
Antriebe mit Induktionskupplungen. Antriebstechnik, Bd. 18 (1979) 3, S. 102-106.

/19/ Stübner, K. und W. Rüggen
Kupplungen: Einsatz und Berechnung. München: Hanser 1961.

/20/ Sittner, J.
über die Theorie der elektromagnetischen Schlupfkupplung unter Berücksichtigung der spezifischen Eigenschaften ausgeprägter Pole. Dt. Elektrotechnik, (1958) H 11 , S. 399-405.

/21/ Kümmlee, H., W. Liebe und G. Woydt
Regelbare elektromagnetische Schlupfkupplung großer Leistung für Schiffe. Siemens Zeitschrift, Bd. 44 (1970) 2, S. 93- 103.

/22/ Klamt, J.
Die Berechnung und Bemessung elektrischer Maschinen. Berlin: Springer 1962, S. 262-281.

/23/ Riccius, E.
Das Drehmomentverhalten der elektromagnetischen Schlupfkupplung bei pulsierender Relativbewegung. Archiv für Elektrotechnik, Bd. 51 (1967), S. 201-212, 274-280.

/24/ Schalitz, A.
Kupplungs-Atlas. Ludwigsburg: A.G.T. 1974, S.246-249.

/25/ Spatz, G.
Statisches und dynamisches Betriebsverhalten eines über einen elektrischen Drehstromteller gespeisten Drehstrom-Asynchronmotors. Diss. Universität Karlsruhe 1970.

/26/ Bronstein, I.N. und K.A. Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik. Zürich: Deutsch 1973.

/27/ Rziha, E.v.
Starkstromtechnik. Teil 2, 8. Aufl., Berlin: Ernst 1952.

/28/ Hütte
Elektrische Energietechnik. Bd.l: Maschinen. 29. Aufl., Berlin: Springer 1978.

/29/ Gonen, D. and S. Stricker
Analysis of an Eddy-Current Brake. IEEE Trans. PAS, Vol. 84 (1965), S. 357-361.

/30/ Davies, E.J.
An Experimental and Theoretical Study of Eddy-Current Couplings and Brakes. IEEE Trans. PAS-82 (1963), S. 401-419.

/31/ Davies, E.J.
General Theory of Eddy-Current Couplings and Brakes. IEE Proc., Bd. 133 (1966), S. 825-837.

/32/ Davies, E.J. , B. James and M.T. Wright
Experimental Verification of the Generalised Theory of Eddy-Current Couplings. IEE Proc, Bd. 122 (1975), S. 67-73.

/33/ Davies, E.J., M.T. Wright and R.C. Johnson
Transient Performance of Eddy-Current Couplings. IEE. Proc, Bd. 122 (1975) 10, S. 1128-1135.

/34/ Davies, E.J., M.T. Wright, and H.Mc Kibbin
Three-Dimensional Theory of Eddy-Current Couplings with Copper-Faced Loss Drums. IEE Proc, Bd. 124 (1977) 12, S. 1187-1196.

/35/ Kundu, P.
Analysis of Saturation and End-Effects in Variable Speed Solid Secondary Couplings. IEEE Trans. PAS-90 (1971) 2, S. 548-555.

/36/ Venkataratnam,K, and A. Kadir
Analysis and Performance of Eddy-Current Brakes with Ferromagnetic Loss Drums. IEE Proc, Bd. 129 (1982) 3.
Part 1: Non Salient-Pole Brakes, S. 125-131.
Part 2: Salient-Pole Brakes, S. 132-142.

/37/ Meyl, K.
Untersuchung eines Drehzahlregelkreises mit einer Wirbelstrom-Schlupfkupplung in der Regelstrecke. Dipl.-Arb. TU München (Institut für elektrische Antriebstechnik) 1979.

/38/ Bolte, E. und D. Baukloh
Der asynchrone Linearmotor mit massiveisernem oder geschichtetem Sekundärteil. Archiv für Elektrotechnik, Bd. 66 (1983) S. 201-209.

/39/ Hannakam, L.
Wirbelströme im leitenden Halbraum bei beliebiger Form der erregenden Leiterschleife. Archiv für Elektrotechnik, Bd.54 (1972), S. 251-261.

/40/ Huttenloher, D.
Zur dreidimensionalen numerischen Berechnung des elektromagnetischen Feldes in Drehfeldmaschinen. Diss. TU München 1983.

Halb analytische, halb numerische, dreidimensionale und nichtlineare Berechnung der Wirbelströme, der Felder und der Wirbelstromverluste in Eisen.

Dr.-Ing. K. Meyl, Landsberg/Lech

Übersicht

Wird eine heteropolare Erregeranordnung an einem massiven Eisenstreifen unendlicher Länge, aber endlicher Breite mit konstanter Geschwindigkeit vorbeibewegt, so sollen die hier induzierten Wirbelströme und die elektromagnetischen Felder berechnet und raumlich dargestellt werden.
Gelöst wird die Differentialgleichung der räumlichen Stromdichteverteilung unter der Annahme einer örtlich und zeitlich konstanten Permeabilität durch Anbinden an die Randbedingungen und unter Berücksichtigung der Oberwellen auf analytischem Wege. In gleicher Weise werden die Zeiger der Feldstärke und Flußdichte ermittelt. Jeder Feldzeiger, der für einen beliebig gewählten, aber festen Punkt im Eisen berechnet wird, soll näherungsweise auch in seiner direkten Umgebung noch Gültigkeit besitzen; d.h. es darf ein Netz finiter Elemente über den Eisenstreifen gelegt werden und numerisch durch die Kontrolle über die Magnetisierungskennlinie iterativ für jedes einzelne Element die jeweilige Permeabilität gesucht werden.
Die Wirbelstromverluste werden zur meßtechnischen Überprüfung durch Aufsummieren über alle Elemente berechnet.

Zum Zeitpunkt der Manuskriptlegung war der Verfasser Dr.-Ing.K. Meyl noch als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für elektrische Maschinen und Antriebe der Universität Stuttgart angestellt. Die räumlich dargestellten Feldbilder wurden am regionalen Rechenzentrum der Universität Stuttgart mit Hilfe des Plottprogramms "Picasso" erstellt. In diesem Zusammenhang dankt der Verfasser dem Herrn Peter Abel für seine Unterstützung am Rechner.

Formelzeichen

A Fläche m^2 ; A_p: Poloberfläche

a,b Materialkonstanten (a=0,923 ; b=0,774)

B Flußdichte T ; B_L: Luftspaltinduktion;
B_a: Maximalwert der Luftspaltinduktion;
$\hat{B}_{L1}$, $\hat{B}_{Ln}$: Amplituden von B_L
b_{po}: Polbreite in Polmitte (bei z=0) m

d Eindringtiefe m (s. Gl. 34); d_a: Ankerdicke;

E Elektrische Feldstärke V/m ;
$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$: Einheitsvektoren

F Bremskraft N
f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_r, f_i: Substitutionen

H Magnetische Feldstärke A/m ; H_n, H_{xnm}, H_{ynm},
H_{znm}: Oberwellenamplituden des Feldstärkevektors

J Stromdichtevektor A/m ; $\hat{J}_n$, $\hat{J}_{xn}$, $\hat{J}_{xno}$,
$\hat{J}_{xnm}$,...: Oberwellenamplituden des Stromdichtevektors

L axiale Ankerlänge m

M Drehmoment Nm ; M_n: Oberwellenteildrehmomente
m: Laufvariable (m=1,3,5,7,...) (s.Gl. 29)

N Drehzahl; N_{rel}: Relativdrehzahl s^{-1} ;
n: Oberwellenzahl (n=1,3,5,7,...)

P Leistung W ; P_{VA}: Wirbelstromverluste im Anker (s.Gl.58)
p: Polpaarzahl

v Geschwindigkeit; v_{rel}: Relativgeschwindigkeit m/s

x,y,z Koordinaten; x',y',z': normierte Koordinaten
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: diskrete Elementabmessungen

ß Konstruktionsverhältnis ($ß = \tau_p/L$)

λ Wellenlänge m ($\lambda = 2 \cdot \tau_p$);
λ_w: Wirksame Wellenlänge (Gl.35)

μ Eisenpermeabilität Vs/Am ; ($\mu = \mu_o \cdot \mu_r$)

ρ Spezifischer Widerstand Ω m

τ τ_p: Polteilung m

ϕ Fluß Vs ; ϕ_p: Polfluß; ϕ_L: Luftspaltfluß ($\phi_L = p \cdot \phi_p$)

ω Winkelgeschwindigkeit s^{-1} ($\omega = 2\pi\, p \cdot N_{rel} = 2\pi \cdot v_{rel}/\lambda$)

Einleitung

Das zu berechnende Wirbelstromproblem tritt in der Magnetschwebetechnik auf, beim induktiven Bremsen linear gegeneinander bewegter Massen oder bei Wirbelstromkupplungen und Wirbelstrombremsen. Hei den Fällen linearer Bewegung (entsprechend dem einseitigen Kurzstator—Linearmotor) treten noch der die Bremswirkung herabsetzende Einlaufeffekt und der zusätzlich bremsend wirkende Auslaufeffekt, der sog. "magnetische Schweif" hinzu. Wird angenommen, daß beide Effekte sich in ihrer Wirkung gegenseitig kompensieren, so ist eine explizite Berechnung überflüssig. Diese Annahme ist umso zutreffender, je größer die Polzahl ist; d.h. bei der Kechnung soll von einer unendlich ausgedehnten aktiven Länge ausgegangen werden. Bei den rotierenden Anordnungen einer Wirbelstromkupplung oder —bremse treten die genannten Effekte logischer—weise nicht auf.

Die Anordnung besteht in allen in Betracht zu ziehenden Fällen aus einem Primär- und aus einem Sekundärteil, die nur durch einen sehr kleinen Luftspalt voneinander getrennt sind. Der Primärteil, eine heteropolare Polanordnung besteht aus Klauen- oder Schenkelpolen, deren Erregerspulen derart verschaltet sind, daß sie von Gleichstrom durchflössen abwechselnde Polarität aufweisen. Im massiveisernen Sekundärteil, im folgenden als Anker bezeichnet, werden Wirbelströme induziert, wenn die Polanordnung gegen den Anker bewegt wird.

Die Kraftlinien des magnetischen Erregerfeldes schließen sich über die ausgeprägten Pole, über den Luftspalt und über den Anker. Die im Anker induzierten Wirbelströme sind bestrebt durch Erzeugen eines sekundären Magnetfeldes der erregenden Ursache, also der Relativbewegung gegenüber der Polanordnung, entgegenzuwirken. Es bildet sich eine Bremskraft aus, die sowohl vom Erregerstrom als auch von der Relativgeschwindigkeit abhängig ist. Als dritte Einflußgröße tritt noch die Temperatur des Ankers hinzu, der durch die Schlupfverluste thermisch stark beansprucht wird.

Die Wirbelströmung im Anker verläuft auf räumlichen Bahnkurven, so daß eine dreidimensionale Theorie erforderlich wird. Gleichzeitig müssen der von der Stromverdrängung hervorgerufene nichtlineare Einfluß der variablen Permeabilität und der mit der Bauform der Erregerpole in Zusammenhang stehende Oberwelleneinfluß berücksichtigt werden.
Lineare Theorien /1-4/ reichen zur Lösung der vorliegenden Aufgabenstellung prinzipiell nicht aus.

Vernachlässigungen
im einzelnen sollen vernachlässigt werden:
I. Die Hystereseeffekte
II. Die endliche Ankerdicke
III. Die Ankerkrümmung
IV. Der Temperatureinfluß

ad I) Die Vernachlässigung (I) kann getroffen werden, da die Hystereseverluste des Ankers in allen Betriebspunkten wesentlich kleiner sind als die Wirbelstromverluste. Es ist weiterhin von Vorteil, zwischen der Induktion B und der Feldstärke H eine eindeutige Funktion angeben zu können.

ad II) Wenn der Anker die endliche, vom Luftspalt aus gemessene radiale Dicke d_a besitzt, so stellt es für die Berechnung sicherlich keine nennenswerte Fehlerquelle dar, wenn von einem Anker unendlicher Dicke ausgegangen wird, da im üblichen Betriebsbereich die Eindringtiefe der Wirbelströme d_1 :

$$d_1 = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega \mu}} \quad (1)$$

wesentlich kleiner ist als die praktisch ausgeführte Ankerdicke, da :

$$d_1 \ll d_a \quad (2)$$

ad III) Bei linearen Systemen entfällt diese Vernachlässigung. Bei rotierenden Anordnungen ist die Verwendung rechtwinkliger Koordinaten (III) damit gleichbedeutend, daß das Polrad-Ankerring-System in seiner Abwicklung betrachtet und die Krümmung des Ankers vernachlässigt wird. Dies ist erlaubt, da der Luftspaltdurchmesser in der Regel groß gegenüber der Ankerringdicke d_a und erst recht groß gegenüber der Luftspaltbreite ist.
Wie im Bild 1. gezeigt, werden die Koordinatenachsen festgelegt.

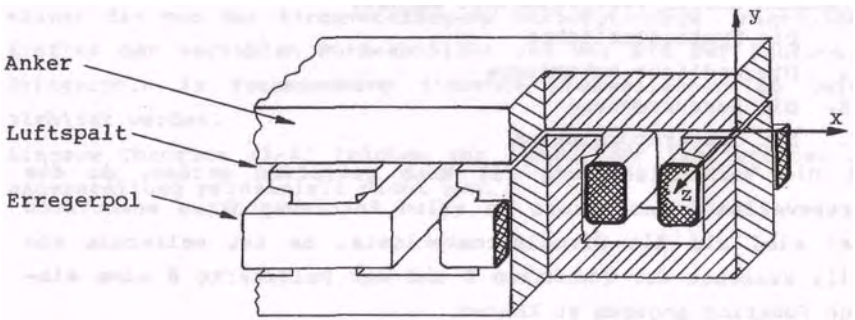


Bild 1; Die Koordinatenachsen im Wirbelstromanker.

Darin gibt x die Bewegungsrichtung und z die Achsrichtung an und y weist, vom Luftspalt ausgehend, wo y=0 ist, radial nach außen. Der ebene Anker des linearen Systems entspricht beim rotierenden dem gekrümmten Ankerring, wenn er in beiden x-Richtungen unendlich ausgedehnt ist.

ad IV) Wird dafür Sorge getragen, daß die Ankertemperatur während der Messungen im Labor konstant gehalten wird, so kann wie im vorliegenden Fall mit einem konstanten spezifischen Widerstand ρ gerechnet werden. Eine Erweiterung der vorliegenden Theorie zur Berücksichtigung des Temperatureinflusses ist aber nachträglich noch problemlos durchführbar /7/.

Feldgleichung der Wirbelströmung

Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld der Wirbelstöme gehorche den Maxwell'schen Gleichungen:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \qquad (3)$$

und:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

Das Ankerfeld ist quellenfrei:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \qquad (5)$$

Für seine elektrischen Eigenschaften gilt das Ohm'sche Gesetz

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J} \text{ mit } \rho = \text{const. nach Voraussetzung (IV)} \qquad (6)$$

und seine magnetischen Eigenschaften werden durch die Materialbeziehung

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad (7)$$

wiedergegeben. Obwohl die Permeabilität μ örtlich und zeitlich sehr stark schwankt, ist sie trotzdem lokal an einem beliebig gewählten aber festen Punkt im Anker zu einem bestimmten Zeitpunkt konstant. Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, die μ=konstant voraussetzen, liefern daher ein Ergebnis, das nur lokale Bedeutung besitzt unter der Voraussetzung, daß der richtige Permeabilitätswert eingesetzt wird. Das Auffinden eines solchen erfolgt, wie später noch gezeigt, numerisch auf iterativem Wege. Die Berechnung der lokalen Feldzeiger der Stromdichte, der Induktion und der Feldstärke wird hier allerdings analytisch durchgeführt, da die numerische Berechnung sehr viel aufwendiger, von geringerer Aussagekraft und mit einem prinzipiellen Fehler behaftet ist. Indem der Rotor nochmals auf das Induktionsgesetz (4) angewendet wird und die Beziehungen (6) und (7) eingesetzt werden, so erhält man über das Durchflutungsgesetz (3) die bekannte Feldgleichung:

$$\nabla^2 \vec{J} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \qquad (8)$$

der die Stromdichte der Wirbelströme in ihrer räumlichen und zeitlichen Verteilung genügen muß.

Dabei wird also davon ausgegangen, daß die Permeabilität dem jeweiligen Feldvektor entspricht, lokal als Konstante auftritt und keine Zeitabhängigkeit besitzt, so daß auch die Ableitung $\partial \mu / \partial t$ entfallen muß, die sonst noch als weiterer inhomogener Term in der Laplacegleichung (8) enthalten wäre.

Stromdichtevektor

Die Betrachtung der Stromdichteverteilung an der Ankeroberfläche, wo y=0 ist und wo wegen der Kontinuitätsbedingung keine y-Komponente auftreten kann: $J_y(x,y,z) = 0$ (9)
läßt die Vorstellung plausibel erscheinen, daß auch im Innern des Ankers keine y-Komponenten auftreten und die Wirbelströme auf in sich geschlossenen Bahnen in der x-z-Ebene fließen / 6 / und daß wegen der Symmetrieeigenschaft des Ankers in seiner Mitte bei z=0 der Stromdichtevektor in z-Richtung sein Maximum erreicht und die x-Komponente verschwindet: $J_x(x,y,z=0) = 0$ (10)
Schreitet man jedoch in beiden z-Richtungen fort, so wird man beobachten können, wie der Zeiger der Stromdichte aus der z- in die x-Richtung nach einer noch unbekannten Funktion dreht, um an den Rändern zu den umgekehrten Verhältnissen zu führen, daß räumlich die x-Komponente maximal und die z-Komponente zu Null wird:
$J_z(x,y,z= + L/2) = 0$ (11)
Betrachtet man nochmals den Stromdichtevektor in der Ankermitte $J_z(x,y=0,z=0)$, so wird dieser Zeiger bei einer Drehung des Ankers gegenüber dem Polsystem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω eine zeitabhängige Phasenverschiebung $\omega \cdot t$ erfahren.
Diese überlagert sich dem räumlichen Winkel, der in x-Richtung auftritt und bei der gegebenen heteropolaren Polanordnung von der Polteilung $\tau_p = \frac{\lambda}{2}$ (12)

abhängig ist, die vom Anker aus betrachtet unter der Wellenlänge $\frac{\lambda}{2\pi}$ erscheint:

$$\vec{J}(x,t) = \vec{J} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

Es ist bereits an dieser Stelle zu berücksichtigen, daß neben der Grund-

welle auch eine große Zahl an Oberwellen auftreten, deren Phasenwinkel ein ganzzahliges Vielfaches n bezüglich der Grundwelle betragen:

$$\vec{J}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{J}_n(x,n,t) \text{ mit } \vec{J}_n(x,n,t) = \vec{J}_n \cdot \cos\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right] \cdot n \qquad (13)$$

Für die Oberwellen gelten also die

Winkelgeschwindigkeit: $\omega_n = n \cdot \omega$ (14)

und die Wellenlänge: $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ (15)

Neben dieser räumlichen (in x-Richtung) und zeitlichen Abhängigkeit des Stromdichtevektors ist auch noch eine solche von der y- und z- Koordinate zu berücksichtigen:

$$\vec{J}_n = \vec{J}_n(y,z) = \vec{J}_{xn}(y,z) + \vec{J}_{yn}(y,z) + \vec{J}_{zn}(y,z) \qquad (16)$$

In y-Richtung tritt, wie bereits erwähnt/ 6/, keine Komponente der Stromdichte auf (nach Gleichung 9): $\vec{J}_{yn}(y,z) = 0$.
In exponentieller Form angeschrieben, lautet die allgemeine Beschreibung des Stromdichtevektors jetzt:

$$\vec{J}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Re\left\{ \vec{J}_n(y,z) \cdot e^{j(\omega nt - \frac{2\pi n x}{\lambda})} \right\} \qquad (17)$$

Dieser Vektor muß die Feldgleichung und die Randbedingungen erfüllen, wodurch dann im einzelnen die Amplituden bestimmbar werden. Sowohl die Grundwelle als auch alle Oberwellen des Stromdichtevektors in seiner x- und z- Komponente müssen der Feldgleichung (8) genügen:

$$\text{in x-Richtung:} \quad \frac{\partial^2 J_{xn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_{xn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_{xn}}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial J_{xn}}{\partial t}$$

$$\text{in z-Richtung:} \quad \frac{\partial^2 J_{zn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_{zn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J_{zn}}{\partial z^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial J_{zn}}{\partial t} \qquad (18)$$

Werden die Ableitungen gebildet und in die Gleichung 18 eingesetzt, so ergeben sich nach der Division durch die Winkelbeziehung und nach Einführen der Substitutionen:

$$\hat{J}_{xn}(y,z) = J_{xn}(y)\cdot J_{xn}(z)$$
$$\text{und} \qquad \hat{J}_{zn}(y,z) = J_{zn}(y)\cdot J_{zn}(z) \qquad (19)$$

mit der Abkürzung: $$f_1^2 = j\omega n\frac{\mu}{\rho} + \left[\frac{2\pi n}{\lambda}\right]^2 \qquad (20)$$

die Bestimmungsgleichungen für die Amplituden:

$$\frac{\partial^2 J_{xn}(y)}{\partial y^2}\cdot J_{xn}(z) + \frac{\partial^2 J_{xn}(z)}{\partial z^2}\cdot J_{xn}(y) = f_1^2\cdot J_{xn}(y)\cdot J_{xn}(z)$$

und in z-Richtung analog:

$$\frac{\partial^2 J_{zn}(y)}{\partial y^2}\cdot J_{zn}(z) + \frac{\partial^2 J_{zn}(z)}{\partial z^2}\cdot J_{zn}(y) = f_1^2\cdot J_{zn}(y)\cdot J_{zn}(z)$$

Die beiden Gleichungen sind in ihrer y- und z-Abhängigkeit separierbar. Es können dann die noch unbestimmten Funktionen abgekürzt angeschrieben werden durch:

$$\frac{\partial^2 J_{xn}(z)}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{J_{xn}(z)} = f_2^2 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2 J_{xn}(y)}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{J_{xn}(y)} = f_1^2 - f_2^2 = f_3^2 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial^2 J_{zn}(z)}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{J_{zn}(z)} = f_4^2 \qquad (23)$$

$$\frac{\partial^2 J_{zn}(y)}{\partial y^2}\cdot\frac{1}{J_{zn}(y)} = f_1^2 - f_4^2 = f_5^2 \qquad (24)$$

Werden die Funktionen f_1 bis f_5 in Bezug auf die jeweils zu berechnende Koordinatenabhängigkeit konstant gehalten, so hat man hier vier gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung mit "konstanten" Koeffizienten vorliegen.

Die Lösungen für die vier gefragten Amplituden lauten in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned} J_{xn}(z) &= Z_{xn}e^{f_2 z} + Z'_{xn}e^{-f_2 z} \\ J_{xn}(y) &= Y_{xn}e^{f_3 y} + Y'_{xn}e^{-f_3 y} \\ J_{zn}(z) &= Z_{zn}e^{f_4 z} + Z'_{zn}e^{-f_4 z} \\ J_{zn}(y) &= Y_{zn}e^{f_5 y} + Y'_{zn}e^{-f_5 y} \end{aligned} \qquad (25)$$

Die auftretenden Konstanten müssen mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

Randbedinqungen

Nach Voraussetzung (II) kann der Anker beliebig dick angenommen werden. Die Stromdichte muß aber einen endlichen Wert besitzen, auch wenn y gegen unendlich vergrößert würde. Diese Randbedingung verlangt, daß $Y_{xn} = 0$ und $Y_{zn} = 0$ sind.
Die Werte für $Y'_{xn} = Y_{xno}$ und $Y'_{zn} = Y_{zno}$
geben jeweils die Amplitude an, die an der Ankeroberfläche bei y=0 herrscht. Dadurch ergibt sich fürt

und für:

$$\begin{aligned} J_{xn}(y) &= Y_{xno}\, e^{-f_3 y} \\ J_{zn}(y) &= Y_{zno}\, e^{-f_5 y} \end{aligned} \qquad (26)$$

Da vereinbarungsgemäß keine y-Komponente der Stromdichte auftreten darf, muß die Abhängigkeit der x- und z-Komponenten von der radialen Tiefe y nach der gleichen Gesetzmäßigkeit erfolgen:

nach Gleichung 22 und 24 ergibt sich daraus:

$$f_3^2 = f_1^2 - f_2^2 = f_5^2 = f_1^2 - f_4^2$$

also: $f_2 = f_4$ (27)

Es ist angenommen worden, daß die Wirbelstrombahnen bezüglich der Mittellinie im Anker (d.h. der x-Achse bei z=0) symmetrisch verlaufen. Aus dieser Symmetriebedingung $J_{xn}(z) = -J_{xn}(-z)$ folgt $Z'_{xn} = -Z_{xn}$ und aus $J_{zn}(z) = J_{zn}(-z)$ folgt $Z'_{zn} = Z_{zn}$. (28)

Die Randbedingung nach Gleichung 11 , daß die z-Komponente an den beiden Enden des Ankers verschwinden muß, ist noch nicht ausgewertet worden: $J_{zn}(z=\pm L/2) = 0$ mit Gleichung 27 und 28 ist

$$J_{zn}(z=\pm L/2) = Z_{zn}(e^{f_2 L/2} + e^{-f_2 L/2}) = 0$$

Da die Amplitude $Z_{zn} \neq 0$ ist, solange Wirbelströme im Anker fließen, muß der Klammerausdruck die Bedingung erfüllen und verschwinden:

$$e^{f_2\cdot\frac{L}{2}} + e^{-f_2\cdot\frac{L}{2}} = 2\cos\frac{f_2 L}{2\cdot j} \stackrel{!}{=} 0$$

Die Bedingung erfüllt die Funktion $\cos(\frac{m\pi}{2})$ für alle Werte von m=1,3,5,7,... ; d.h.: $\frac{f_2 L}{2\cdot j} = \frac{m\pi}{2}$ bzw. $f_2 = j\frac{m\pi}{L}$ (29)

damit ergibt sich für

$$J_{znm}(z) = Z_{zn}\left(e^{j\frac{m\pi z}{L}} + e^{-j\frac{m\pi z}{L}}\right)$$

d.h.

$$J_{znm}(z) = Z_{zn}2\cdot\cos(\frac{m\pi z}{L}) \qquad (30)$$

und für

$$J_{xnm}(z) = Z_{xn}\left(e^{j\frac{m\pi z}{L}} - e^{-j\frac{m\pi z}{L}}\right)$$

d.h.

$$J_{xnm}(z) = Z_{xn}2\cdot j\cdot\sin(\frac{m\pi z}{L}) \qquad (31)$$

Der Zeiger nach Gleichung 17 mit seinen Amplituden (Gl.26,30 und 31 eingesetzt in G1.16 mit 19) lautet mittlerweile:

$$J_x(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{J_{xnm}\} \text{ mit: } J_{xnm} = \hat{J}_{xno} j e^{-f_3 y}\sin(\frac{m\pi z}{L}) e^{j(\omega t - \frac{2\pi n x}{\lambda})}$$

$$J_z(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Re}\{J_{znm}\} \text{ mit: } J_{znm} = \hat{J}_n e^{-f_3 y}\cos(\frac{m\pi z}{L}) e^{j(\omega t - \frac{2\pi n x}{\lambda})} \qquad (32)$$

mit der maximalen Amplitude bei x=0, y=0 und z=0:

$$\hat{J}_n = 2\cdot Z_{zn}\cdot Y_{zno}$$

und der Amplitude

$$\hat{J}_{xno} = 2\cdot Z_{xn}\cdot Y_{xno}$$

Als letzte Bedingung müssen die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt werden, also auch die Anwendung der Divergenz auf das Durchflutungsgesetz (Gl. 3) :

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$$

bzw. mit den x- und z-Komponenten des Stromdichtevektors ausgedrückt:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

Daraus folgt:

$$\hat{J}_{xno} = \hat{J}_n \cdot \frac{m\lambda}{L2n} \quad (33)$$

Räumliche Wirbelstromverteilung

Durch die Gleichungen 32 sind die Wirbelströme an sich schon beschrieben. Für das bessere Verständnis der Feldverteilung sind noch einige Umformungen zweckmäßig: Die Funktion f_3 wird komplex zerlegt: $f_3 = f_r + jf_i$ oder $f_3^2 = f_r^2 - f_i^2 + j2f_rf_i$ nach 61. 22 mit Gl. 20 und 61. 29 ist:

$$f_3^2 = f_1^2 - f_2^2 = j\cdot\omega\cdot n\,\frac{\mu}{\rho} + \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 - \left(j\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

durch Koeffizientenvergleich betragen

der Realteil:

$$f_r^2 - f_i^2 = \left[\frac{2\pi n}{\lambda}\right]^2 + \left[\frac{m\pi}{L}\right]^2 = \frac{1}{\lambda_w^2}$$

und der Imaginärteil:

$$2f_rf_i = \omega n\,\frac{\mu}{\rho} = \frac{2}{d^2}$$

mit der Eindringtiefe für die Grundwelle der Wirbelströme nach Gl, 1 und für alle Oberwellen, wenn Gl. 14 berücksichtigt wird:

$$d = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega n\mu}} \quad (34)$$

und mit der Abkürzung λ_w , einer sogenannten wirksamen Wellenlänge, die sich aus der Wellenlänge λ und der Ankerlänge L wie folgt zusammensetzt:

$$\lambda_w = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}} \quad (35)$$

d.h.:

$$f_r^2 = \frac{1}{2\cdot\lambda_w^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4\cdot\lambda_w^4} + \frac{1}{d^4}}$$

Es soll an dieser Stelle die sehr wichtige Vernachlässigung eingeführt werden:

$$d^2 \ll 2\,\lambda_w^2 \quad (36)$$

Sie bedeutet, daß die Eindringtiefe d sehr viel kleiner ist als die wirksame Wellenlänge λ_w

Es ist gezeigt worden / 7 /, daß in dem üblicherweise interessierenden Betriebsbereich der durch diese Näherung begangene Fehler maximal 2% beträgt.

Wenn also $\frac{1}{d^2} \gg \frac{1}{2\cdot\lambda_w^2}$ ist, so erst recht $\frac{1}{d^4} \ggg \frac{1}{4\cdot\lambda_w^4}$

d.h.

$$f_r^2 = \frac{1}{2\cdot\lambda_w^2} \pm \frac{1}{d^2} \approx \pm \frac{1}{d^2} \quad \text{mit:} \quad f_r = \frac{1}{d};\quad f_i = \frac{1}{d} \quad \text{ist:} \quad f_z = \frac{1+j}{d} \tag{37}$$

eingesetzt in Gleichung 32 gilt:

$$J_{xnm} = \hat{J}_n \cdot j \cdot \frac{m\cdot\lambda}{L2n} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot e^{j\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right)}$$

und

$$J_{znm} = \hat{J}_n \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot e^{j\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right)} \tag{38}$$

Wird die Eulersche Relation verwendet, wobei nach der Vereinbarung von Gleichung 17 nur der Realteil in Betracht zu ziehen ist, so lautet der Stromdichtevektor in seiner endgültigen Form:

$\vec{J} = \vec{e}_x J_x + \vec{e}_z J_z$ mit:

$$J_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\hat{J}_n \frac{m\lambda}{2Ln} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right)$$

$$J_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{J}_n e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) \tag{39}$$

Es ist jetzt leicht erkennbar, daß

(1.) der Stromdichtevektor der Wirbelströmung zeitlich und räumlich (in x und z) sinusförmig verteilt ist oder aus der Überlagerung entsprechender Stromoberwellen besteht, daß

(2.) seine beiden Komponenten gegeneinander um 90° phasenverschoben auftreten, daß

(3.) die Amplitude exponentiell mit zunehmender radialer Tiefe y abnimmt und

(4.) der Stromdichtevektor gleichzeitig proportional zur radialen Tiefe eine Phasendrehung vollzieht.

Damit ist der Stromverdrängungseffekt mathematisch beschrieben, der besagt, daß die Wirbelströme an die Ankeroberfläche zum Luftspalt hin drängen, um dort die bekannterweise sehr hohen Stromdichten zu verursachen. Dies gilt aber in besonderem Maße für die Oberwellen, deren Eindringtiefe (nach G1.34) mit steigender Ordnungszahl immer kleiner wird. Das bedeutet aber auch, daß der Oberwellengehalt der Stromdichte an der Ankeroberfläche am größten ist. Die Dämpfungseigenschaft der Wirbelströme ist daran erkennbar, daß die Eindringtiefe mit höheren Drehzahlen ebenfalls abnimmt und damit der Stromdichtevektor ins Ankerinnere hinein stärker abklingt.
Das Feldlinienbild der Wirbelströmung veranschaulicht diesen Zusammenhang (Bild 2). Der Übersichtlichkeit sowie der Allgemeingültigkeit halber ist nur die Grundwelle der Wirbelstromverteilung gezeigt. Bei der räumlichen Darstellung wird die im Innern des Ankers auftretende Phasenverschiebung sehr deutlich. Durch die Normierung auf die Eindringtiefe d erscheinen die Wirbelstromkonturen in y-Richtung unverhältnismäßig gestreckt.

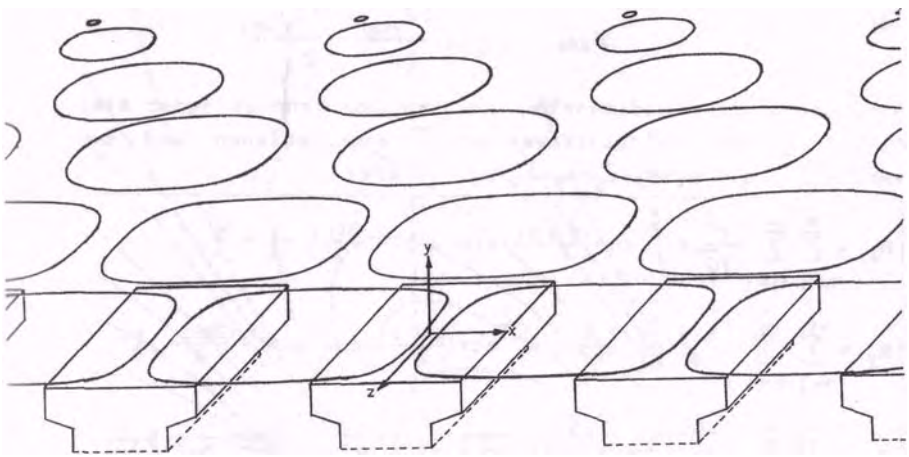


Bild 2: Die räumliche Ausbildung der Wirbelströme im Anker
(J(x',y',z') mit: x' = x $2/\lambda$; y' = y/d ; z'= z/L)

Dreidimensionale Feldstärkeverteilung

Der Zusammenhang zwischen der Stromdichte im Anker und der Feldstärke ist durch das Induktionsgesetz (Gl. 4 unter Berücksichtigung der Gleichungen 6 und 7) gegeben:

$$\rho \cdot \mathrm{rot}\,\vec{J} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (40)$$

Wird davon ausgegangen, daß jeder von einer Wechselinduktion $\mu \cdot \vec{H}$ induzierte harmonische Anteil des Stromdichtevektors ebenfalls sinusförmig ist und die gleiche Frequenz ωn besitzt wie die ihn erregende Feldharmonische, so läßt sich die zeitliche Abhängigkeit (von Gl. 40) bereits angeben:

$$\mathrm{rot}\,\vec{J}_n = -\frac{\mu}{\rho} \cdot j \cdot \omega n \cdot \vec{H}_n = -j\,\frac{2}{d^2} \cdot \vec{H}_n \qquad (41)$$

Die drei Bestimmungsgleichungen für je eine Komponente einer Feldharmonischen lauten:

$$H_{xnm} = j \cdot \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial J_{znm}}{\partial y} - \frac{\partial J_{ynm}}{\partial z}\right)$$

$$H_{ynm} = j\,\frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial J_{xnm}}{\partial z} - \frac{\partial J_{znm}}{\partial x}\right)$$

$$H_{znm} = j\,\frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial J_{ynm}}{\partial x} - \frac{\partial J_{xnm}}{\partial y}\right)$$

Als Lösung der dreidimensionalen Rechnung kann an jeder Stelle im Anker der Feldstärkevektor $\vec{H}$ angeschrieben und bestimmt werden: $\vec{H} = \vec{e}_x \cdot H_x + \vec{e}_y \cdot H_y + \vec{e}_z \cdot H_z$ mit:

$$H_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{J}_n \cdot d}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \sin\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$H_y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -\hat{J}_n \cdot \left(\frac{d}{\lambda_w}\right)^2 \cdot \frac{\lambda}{4\pi n} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d}\right) \qquad (42)$$

$$H_z = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{\hat{J}_n \cdot d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m\lambda}{2nL} \cdot e^{-\frac{y}{d}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \cos\left(\omega nt - \frac{2\pi nx}{\lambda} - \frac{y}{d} + \frac{\pi}{4}\right)$$

In Bild 3 sind mehrere Induktionslinien dargestellt, wie sie an beliebiger Stelle von z0 (z'<>0) im Anker in der x'-y'-Ebene verlaufen. Vergleicht man die Induktions- bzw. Feldstärkeverteilung (nach Bild 3) mit der entsprechenden Darstellung der Wirbelstromfeldlinien (Bild 2), so erkennt man deutlich einen Winkel von $\gamma = 45°$ in Bewegungsrichtung. Dieser Winkel ist bei Wirbelstromerscheinungen typisch. Es darf allerdings nicht ganz vergessen werden, daß ein Übergangsbereich (für $0 \leqq \gamma \leqq 45°$) existieren muß, da der Winkel bei Stillstand verschwindet. Kleinere Winkel als 45° treten aber nur bei extrem kleinen Relativgeschwindigkeiten auf, unter der Voraussetzung also, daß die Beziehung (Gl. 36) keine Gültigkeit mehr besitzt. In diesem Bereich ist jedoch die erzeugte Kraftwirkung derart gering, daß aus industrieller Sicht gesehen kein Interesse und auch keine Notwendigkeit für eine entsprechende Erweiterung der Theorie besteht.

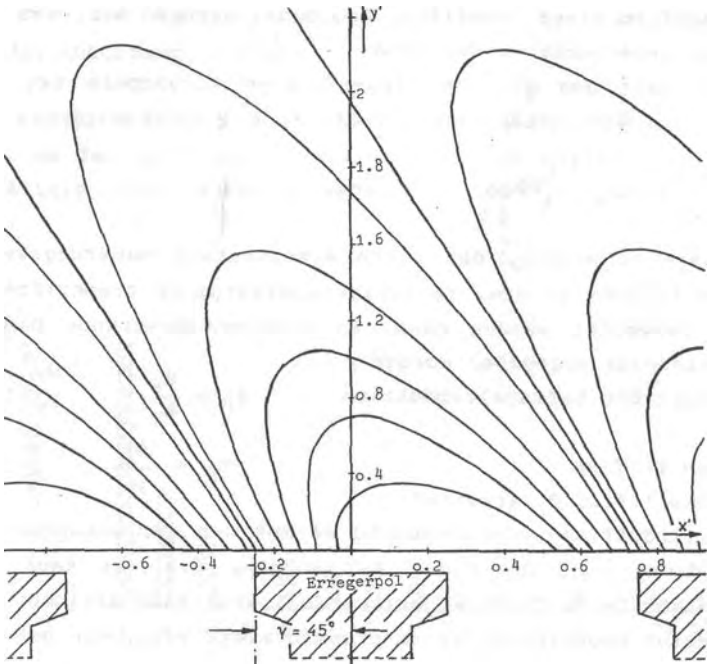


Bild 3: Induktionslinien im Ankereisen

Luftspaltinduktion

Die berechneten Vorgänge im Wirbelstromzylinder setzen eine entsprechende Luftspalterregung voraus. Ihre Induktionslinien durchsetzen die Ankeroberfläche senkrecht. Die an dieser Stelle (bei y=0) vorherrschende Feldstärke $H_y(y=0)$ läßt daher die Luftspaltinduktion erwarten (mit Gl. 42):

$$B_L = \mu \cdot H_y(y=0) \quad (43)$$

wobei nach Gl. 34 $\mu = \frac{2 \cdot \rho}{\omega \cdot n d^2}$ ist.

$$B_L = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \hat{J}_n \frac{\rho \lambda}{2\pi \cdot n^2 \cdot \omega \cdot \lambda_w^2} \cos\left(\frac{m \pi z}{L}\right) \cos\left(\omega nt - \frac{2 \pi nx}{\lambda}\right) \quad (44)$$

Einige noch unbekannte Größen in dieser aus der Wirbelstromverteilung im Anker hergeleiteten Gleichung sind bestimmbar, wenn die Randbedingung ausgewertet wird, daß die Gleichung 44 auch der speziellen Polform einer jeweiligen Anordnung genügen muß, wie sie in /7 / näher untersucht worden sind.

Für vom Luftspalt aus gesehen linsenförmige Klauenpole ist die Fourierzerlegung der Luftspaltflußdichte durchgeführt worden:

$$B_L = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} - B_a \frac{4 \, b_{p\varrho}}{n \, \lambda} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{2 \pi n x}{\lambda}\right) \quad (45)$$

Es konnte gezeigt werden, daß diese Beschreibung näherungsweise auch für dreieckförmige bzw. teilweise überlappende trapezförmige Erregerpole verwendet werden kann. Es sind entsprechende Dimensionierungshinweise angegeben worden /7/.

Der Maximalwert der Luftspaltinduktion

$$B_a = \frac{\Phi_p}{A_p} \quad (46)$$

wird über den Polfluß(47)

$$\Phi_p = \frac{\Phi_L}{p}$$

aus dem Luftspaltfluß Φ_L ermittelt.

Die Luftspaltinduktion nach Gleichung 44 muß nun der entsprechenden Polanordnung nach Gleichung 45 genügen; d.h. es kann der Koeffizientenvergleich durchgeführt werden, wenn auch Gleichung 44 in ein polfestes Koordinatensystem transformiert wird, von dem aus gesehen $\omega t=0$ ist:

1.) Der Vergleich der Winkel zeigt, daß m=l gewählt werden muß. Bei linsenförmigen Polen treten demnach keine harmonischen Anteile in axialer (z-)Richtung auf; auch bei geometrischer Ähnlichkeit der Pole sind die entsprechenden Anteile mehr oder weniger gut vernachlässigbar.
2.) Der Vergleich der Amplituden liefert für m=l den Zusammenhang:

$$J_n(m=1) = B_a \frac{8\pi n\omega \cdot \lambda_w^2 \cdot b_{po}}{\rho \cdot \lambda^2} \qquad (48)$$

wobei ist.

$$\lambda_w^2(m=1) = \frac{\lambda^2 \cdot L^2}{\pi^2 \cdot [(2nL)^2 + \lambda^2]} \qquad (49)$$

Bezogen auf die Amplitude der Grundwelle beträgt das Spektrum der Harmonischen:

$$\frac{\hat{J}_n}{\hat{J}_1} = \frac{1 + \beta^2}{n + \beta^2 \frac{1}{n}} \qquad (50)$$

mit der Abkürzung $\beta = \frac{\lambda}{2L}$ (51)

Für ß=0,58 ist das Oberwellenspektrum in Bild 4 gezeigt.Das Spektrum der Luftspaltinduktion wird nach Gleichung 45 durch das Verhältnis charakterisiert:

$$\frac{\hat{B}_{Ln}}{\hat{B}_{L1}} = \frac{1}{n} \qquad (52)$$

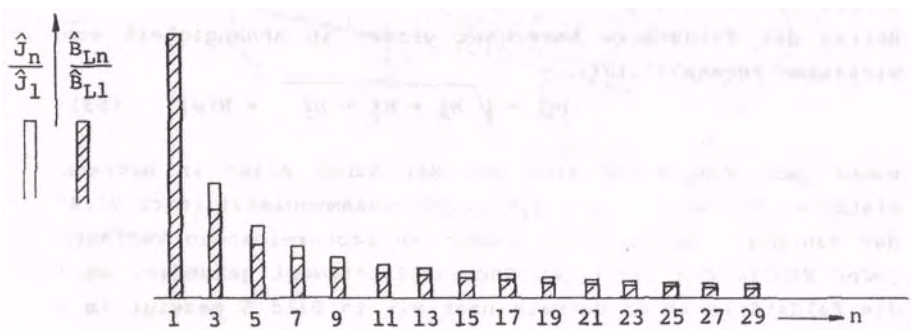


Bild 4: Das Oberwellenspektrum der Ankerstöme und der Luftspalt-Induktion

Finite Elemente

Die starke Stromverdrängung der Wirbelströme im Anker zum Luftspalt hin, findet in den Gleichungen 39 der Wirbelströmung ihren Niederschlag. Da die Induktion und die Feldstärke über das Induktionsgesetz fest mit der Wirbelströmung verkoppelt sind, tritt dieselbe Erscheinung hier wiederholt auf, wie die dreidimensionalen Feldgleichungen 42 zeigen. Die Materialkonstante μ hängt also nicht nur vom Erregungszustand ab, sondern variiert zusätzlich an einem fest eingestellten Arbeitspunkt mit der Eindringtiefe. Die Eindringtiefe ist nach Gleichung 34 selbst eine Funktion der Permeabilität. Dadurch kommt obendrein noch eine Abweichung der Induktionsabschwächung von der e-Funktion zustande.
Die an jedem Punkt im Anker wirksame Permeabilität soll jetzt auf numerischem Wege berechnet werden, indem ein Netz finiter Elemente über den Anker gelegt wird. Dazu wird der Anker in y-Richtung (für $0 <= y <= d_a$) nach einer quadratischen Funktion in 80 einzelne Abschnitte Δy eingeteilt, so daß durch die zum Luftspalt hin kleiner werdenden finiten Elemente die dort zu erwartende hohe Stromverdrängung ausreichend genau erfaßt werden kann, während in x- und in z-Richtung (für $0 \leqq x \leqq \lambda$ und für $-L/2<=z<=+L/2$) der Anker
linear in jeweils 40 Abschnitte $\Delta x, \Delta z$ unterteilt wird. Für jedes einzelne der $1{,}28*10^5 * p$ quaderförmigen Elemente wird angenommen, daß dort die Permeabilität konstant ist und die bereits analytisch berechneten Feldzeiger sich nicht ändern. Es kann also lokal der Betrag der Feldstärke berechnet werden in Abhängigkeit von der wirksamen Permeabilität:

$$|H| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} = H(\mu) \quad (53)$$

wobei jede Komponente sich aus der Summe aller in Betracht zu ziehenden Oberwellen (n=l,3,5,...25) zusammensetzt (nach G1.42). Hat man erst nach dem noch näher zu beschreibenden Verfahren an jeder Stelle den richtigen Permeabilitätswert gefunden, so tritt die Feldstärke ihrem Betrage nach wie in Bild 5 gezeigt im Anker auf.

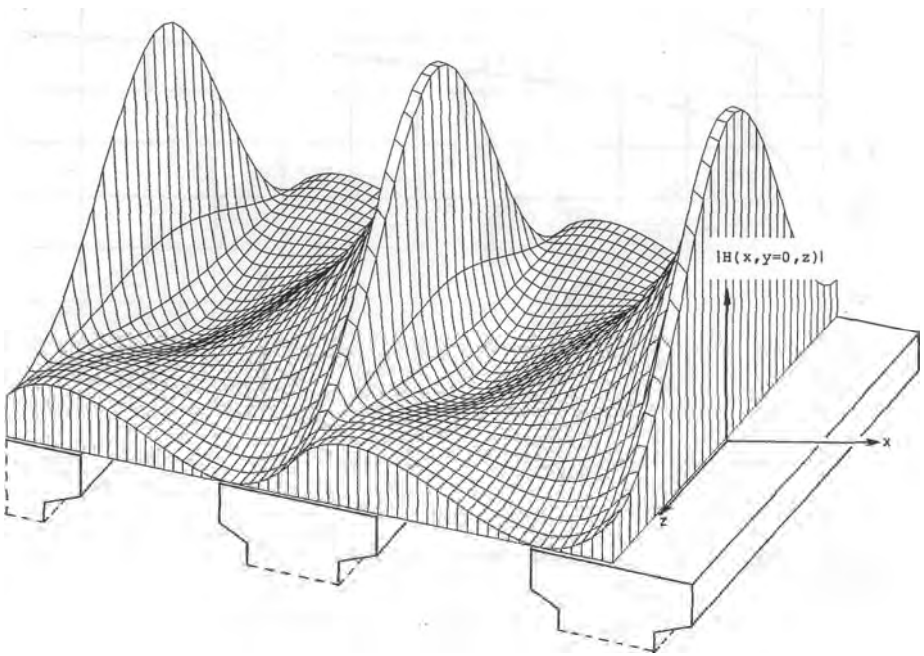


Bild 5: Der Betrag der Feldstärke |H(x,y=0,z)| im Anker.

Magnetisierungskennlinie

Zur Berechnung der örtlichen Permeabilität dient einerseits die Gleichung 53. Die zweite Bestinunungsgleichung folgt aus der Magnetisierungskennlinie (Bild 6) des verwendeten Ankermaterials, die meßtechnisch ermittelt worden ist.

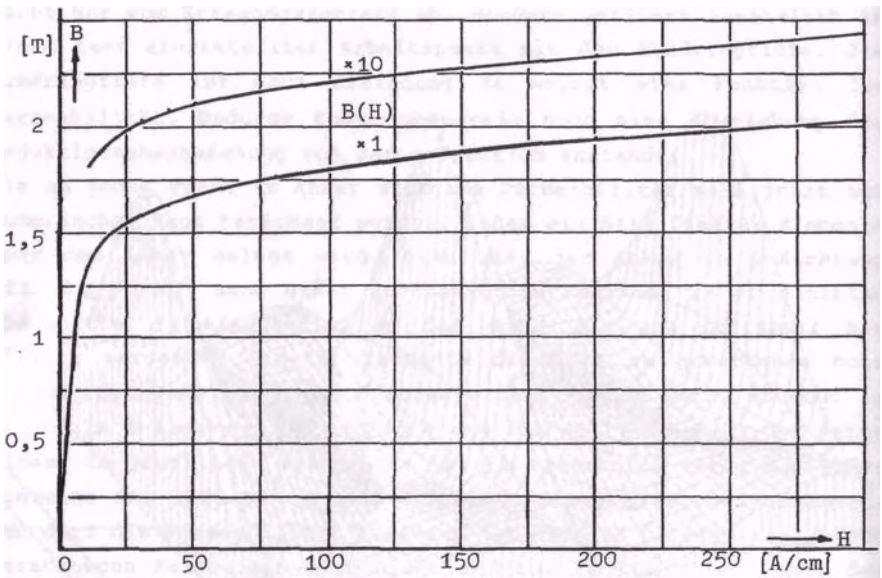


Bild 6 Magnetisierungskennlinie des Ankereisens

Aus dieser Kennlinie ist die Funktion p(H) ablesbar. Der Schnittpunkt beider Kennlinien liefert den korrekten Permeabilitätswert. Das iterative Aufsuchen des richtigen Wertes bereitet an manchen Punkten Schwierigkeiten, nicht wegen mangelhafter Konvergenz des Verfahrens, sondern wegen einer auf Grund von mehreren (3,5,7,...) Schnittpunkten auftretenden Mehrdeutigkeit. In diesem Fall ist darauf zu achten, daß nur der kleinstmögliche Permeabilitätswert die richtige Lösung darstellt, da er allein für die Höhe des Sättigungsgrades verantwortlich ist.

variable Permeabilität

An jedem Punkt im Anker wird in der beschriebenen iterativen Berechnungsweise die jeweilige Permeabilität ermittelt und in ihrer räumlichen Verteilung dargestellt (Bild 7).

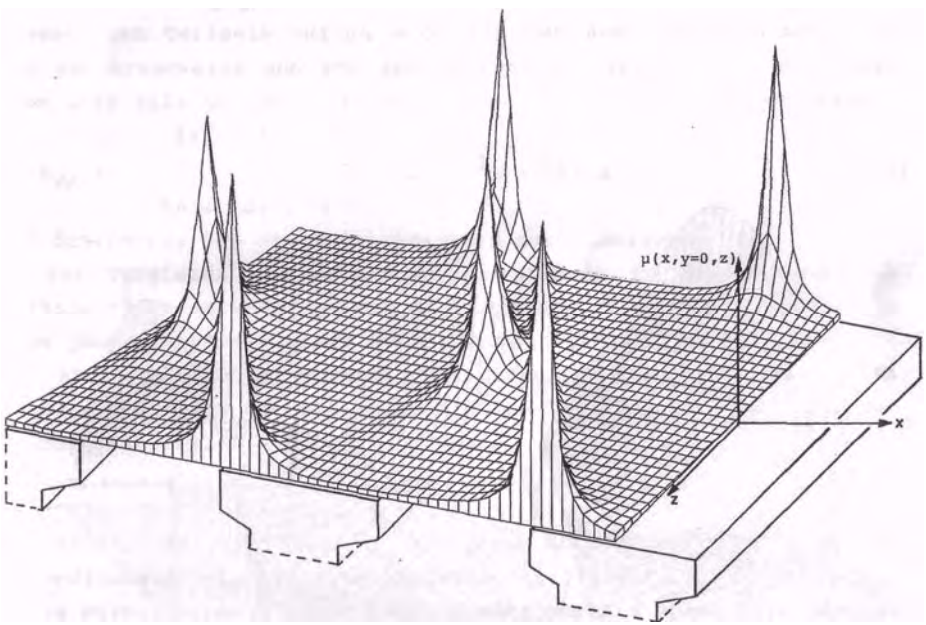


Bild 7; Die Permeabilität im Anker $\mu(x,y=0,z)$.

Man erkennt deutlich, daß die Permeabilität überwiegend sehr klein ist, der Anker also stark gesättigt betrieben wird.

Betrag der Wirbelströmung

Hat man für jedes finite Element die Permeabilität erst ermittelt, so kann man durch Einsetzen in die Gleichung der Stromdichte (39) den Betrag berechnen

$$|J| = \sqrt{J_x^2 + J_z^2} \quad (54)$$

und ebenfalls räumlich darstellen (Bild 8).

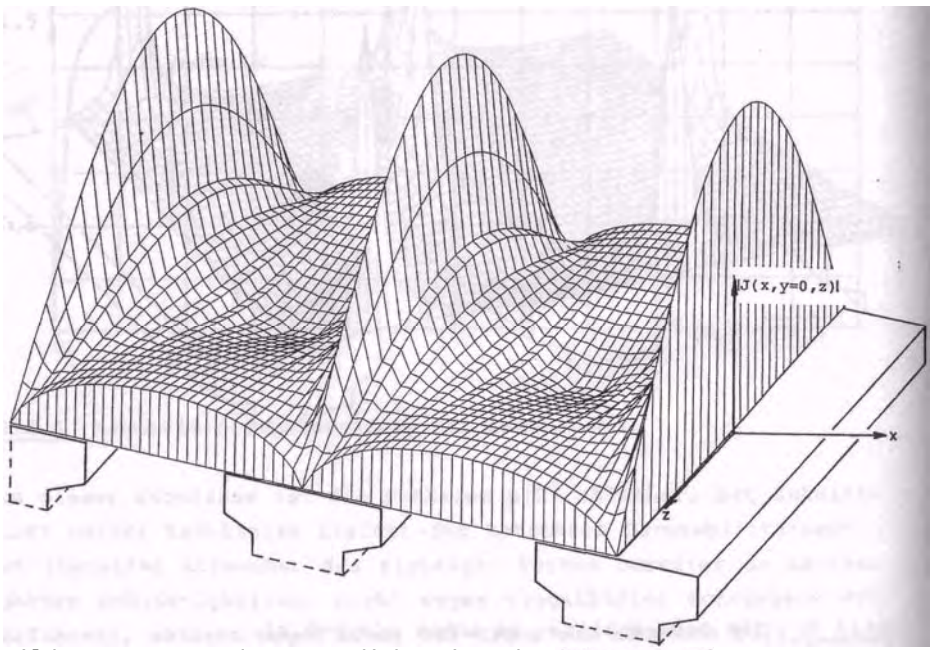


Bild 8: Betrag der Stromdichte im Anker $|J(x,y=0,z)|$

Wirbelstromverluste

Die Wirbelstromverluste sind für jeden einzelnen Ankerstrom - auch jeden Oberwellenanteil durch die Beziehung $I_A^2 * R^A$ GE- geben, wobei es sich bei R_A um den jeweiligen Bahnwiderstand handelt, der sich einem Wirbelstrom entgegenstellt. Der Anker wird als homogener Körper mit dem spezifischem Widerstand ρ angesehen. Die Wirbelströme und ihre Bahn sind durch die hergeleiteten Gleichungen 39 gegeben. Die gesamten im Ankerring in Stromwärme umgesetzten Verluste setzen sich aus den Anteilen zusammen, die von der Grundwelle und von den Oberwellen herrühren durch Summa— tion über alle in den einzelnen Elementen auftretenden Verluste:

$$P_{VA} = \sum_{\Delta x=1}^{40} \sum_{\Delta y=1}^{80} \sum_{\Delta z=1}^{40} p \cdot \rho \cdot |J|^2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (55)$$

mit den Betrag des Stromdichtezeigers nach Gleichung 54. Um den Vergleich mit Messungen durchführen zu können, muß der Luftspaltfluß entweder an den zum Luftspalt hin offenen Enden der Pole gemessen werden, oder über den magnetischen Kreis als den um die Ankerrückwirkung geschwächten Erregerfluß nach /7/ berechnet werden. Mit Hilfe der Gleichungen 46 und 47 wird die Amplitude der Luftspaltinduktion

(56) $$B_a = \frac{\Phi_L}{A_p \cdot p}$$

ermittelt, die eingesetzt in Gleichung 48 die zur Berechnung des Stromdichtezeigers gefragte Amplitude $\hat{J}_n$ liefert. Diese Wirbelstromverluste erwärmen entsprechend ihrem Entstehungs- ort den Anker ungleichmäßig. Die Beobachtung des lokalen Auf- tretens und sich Ausbreitens von Anlauffarben thermisch überbean- spruchter Wirbelstromkupplungen läßt dieses Ergebnis plausibel erscheinen. Als Temperaturverteilung ist die über eine Periode gemittelte Wirbelstromverteilung nach Bild 9 zu erwarten:

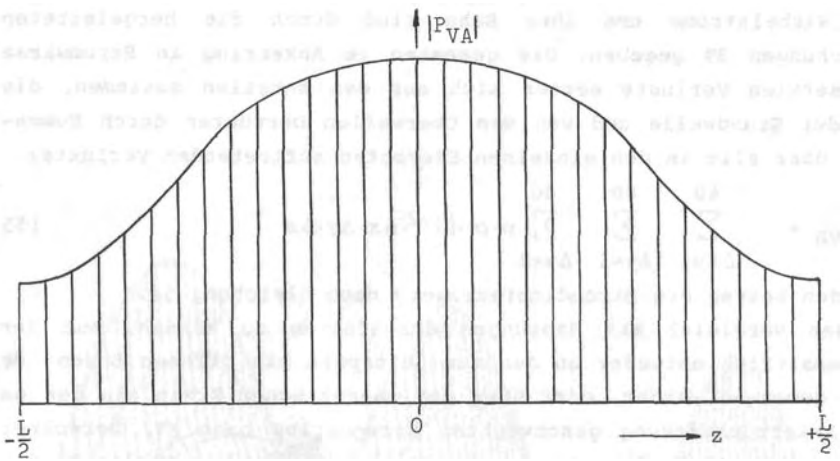


Bild 9: Verteilung der Wirbelstromverluste

Bremskraft

Die für den Anker aufgestellte Energiebilanz beinhaltet, daß die über die Bremskraft F und die Relativgeschwindigkeit

$$v_{rel} = \frac{\omega \tau p}{\pi} \quad (57)$$

bzw. über das Drehmoment M und die Relativdrehzahl

$$N_{rel} = \frac{\omega}{2\pi p} \quad (58)$$

mechanisch eingespeiste Leistung

$$P_m = F \cdot v_{rel} = M \cdot 2\pi \cdot N_{rel} \quad (59)$$

gleich der im Anker elektrisch erzeugten Wirbelstromleistung P_{VA} ist. Diese Leistung wird, wie bereits berechnet, in Wärme und damit in Verlustleistung umgewandelt.

$$P_m = P_{VA} \quad \text{und} \quad F = \frac{2\pi}{\omega \lambda} P_{VA} \; ; \; \text{bzw.} \; M = \frac{p}{\omega} P_{VA} \quad (60)$$

Der Vergleich mit Meßwerten an einzelnen Betriebspunkten wurde an handelsüblichen Wirbelstromkupplungen der Baureihe WEK der Firma Meyl+Ziesel Antriebstechnik GmbH Landsberg/Lech vorgenommen. Dabei ergeben sich auf dem hier beschrittenen halb numerischen Weg wie zu erwarten diesselben Ergebnisse wie auf dem rein analytischen Berechnungsgang /7/. Dies kann als Stützung des einen Rechengangs durch den anderen gewertet werden. Mit den Drehmomentmessungen besteht eine gute Übereinstimmung, wie schon in /7/ gezeigt.

Betrag der Induktion

Der Vollständigkeit halber soll nun noch der Betrag der Induktion

$$|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (61)$$

räumlich dargestellt werden (Bild 10).
Von einigen wenigen Einbrüchen einmal abgesehen, ist der bereits erwähnte hohe Sättigungsgrad deutlich zu beobachten.

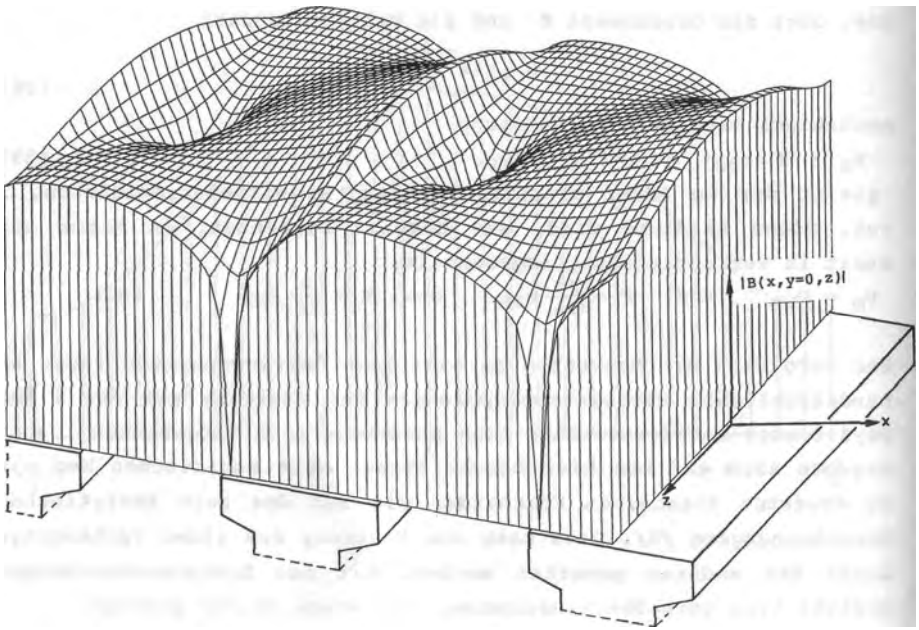


Bild 10: Betrag der Induktion an der Ankeroberfläche |B(x,y=0,z)|

Dringt man von der dem Luftspalt zugewandten Oberfläche ausgehend (Bild 10) ins Innere des Ankers vor, so nehmen der Betrag der Induktion und damit auch der Sättigungsgrad ab. Die Felder werden bei y=l,3 mm bereits weitgehend von der sinusförmigen Grundwelle bestimmt, da die Oberwellen ins Ankerinnere hinein schneller abklingen (Bild 11).

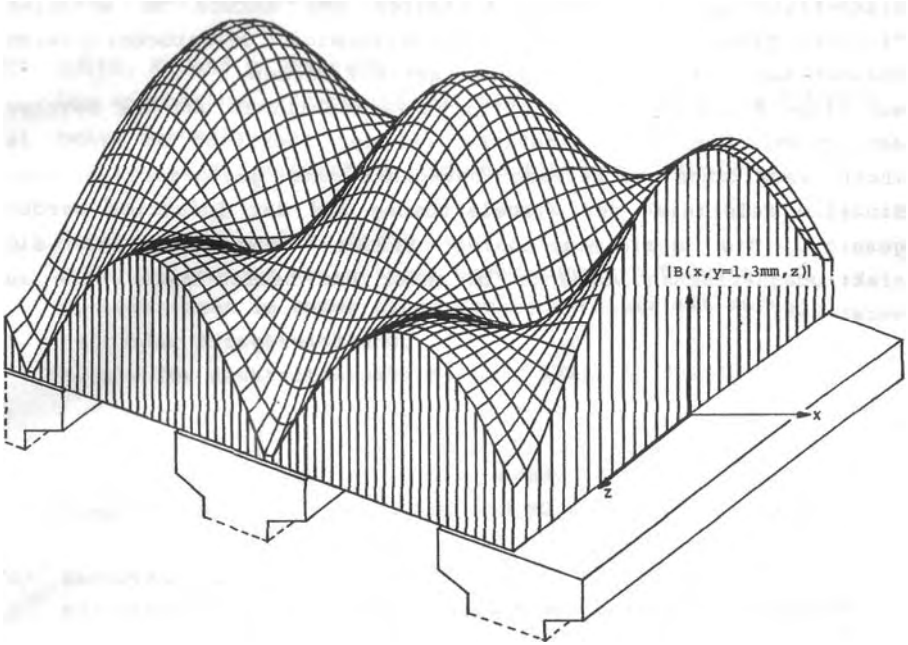


Bild 11: Betrag der Induktion im Anker bei y=l,3mm

Zusammenfassung

An jedem Punkt im Anker wird der Zeiger der Feldstärke bei quasi—stationärem Betrieb analytisch in Abhängigkeit von der örtlich vorhandenen Permeabilität berechnet. Diese wird ermittelt, indem der Schnittpunkt dieser Funktion $H(\mu)$ mit der Magnetisierungskennlinie $\mu(H)$ mit Hilfe einer iterativen Vorgehensweise gesucht wird.

Die für eine numerische Berechnung der Ankerfelder erforderliche Diskretisierung wird durch Aufteilen des Ankers in einzelne "finite Elemente" erreicht, quaderförmige Teilstücke, deren Volumen zum Luftspalt hin kleiner gewählt werden.

Auf diese Weise können die örtliche Permeabilität und die Beträge der Stromdichte, der Feldstärke und der Induktion im Anker in ihrer räumlichen Verteilung berechnet und geplottert werden. Einzelne Feldlinien der Wirbelströmung und der Induktion werden gezeigt. Die dreidimensionalen Bilder veranschaulichen die elektromagnetischen Vorgänge im Anker und helfen damit, sie zu verstehen.

Literatur

/l/ Rüdenberg, R.
Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen. Stuttgart: Enke 1906 (Sammlung el. Vortr.).

/2/ Malti, M.G. and R. Ramakumar
Three Dimensional Theory of the Eddy-Current Coupling. IEEE Trans. Pas-82 (1963), S. 793-799.

/3/ Bolte, E. und D. Baukloh
Der asynchrone Linearmotor mit massiveisernem oder geschichtetem Sekundärteil.
Archiv für Elektrotechnik, Bd. 66 (1983) S. 201-209.

/4/ Markus, H. v. und J. Sergl
Dreidimensionale analytische Berechnung von Feldern und Wirbelströmen im Rotor eines Turbogenerators mit supraleitender Erregerwicklung.
Archiv für Elektrotechnik, Bd.59 (1977), S. 329-336

/5/ Davies, E.J.
An Experimental and Theoretical Study of Eddy-Current Couplings and Brakes. IEEE Trans. PAS-82 (1963), S. 401-419.

/6/ Hannakam, L.
Wirbelströme im leitenden Halbraum bei beliebiger Form der erregenden Leiterschleife.
Archiv für Elektrotechnik, Bd.54 (1972), S. 251-261.

/7/ Meyl, K.
Dreidimensionale nichtlineare Berechnung von Wirbelstromkupplungen. Diss. Universität Stuttgart 1984