

LEHRBUCH

Georg Wolschin

# Hydrodynamik



Springer Spektrum

# Hydrodynamik

Georg Wolschin

# Hydrodynamik



**Springer** Spektrum

Prof. Georg Wolschin  
Institut für Theoretische Physik  
Universität Heidelberg  
Heidelberg, Deutschland

ISBN 978-3-662-48023-6

ISBN 978-3-662-48024-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-48024-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

*Planung:* Margit Maly

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

# Vorwort

Diese Vorlesung ist eine kurzgefasste Einführung in die Grundlagen der Hydrodynamik. Sie ist konzipiert als einsemestrige, zweistündige Veranstaltung für Bachelor- und Masterstudenten; einige der fortgeschritteneren Teile wie Hydrodynamik der Superfluide oder Diffusion in relativistischen Systemen sollten auch für Promovierende von Interesse sein. In diesem Vorwort werden manche Gebiete besonders betont.

Nach der Einordnung der Hydrodynamik als Teilgebiet der Kontinuumsmechanik folgt ein einleitendes Kapitel über ideale Fluide mit den Euler-Gleichungen als Grundgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld sowie der Kontinuitätsgleichung und der Gleichung für die Entropierhaltung. Die Nichtlinearität des konvektiven Terms in der Euler-Gleichung begründet ein im Vergleich zur Elastizitätstheorie wesentlich komplexeres Theoriegebäude, das nur in Spezialfällen analytische Lösungen hat.

Oft sind jedoch Linearisierungen möglich und zulässig, die dann beispielsweise Voraussetzung zur Ableitung der Schwingungsgleichung sind. Auch die Ausbreitung von Wasserwellen als Oberflächenwellen – je nach Wassertiefe mit oder ohne Dispersion oder im Fall von Kapillarwellen mit anomaler Dispersion – lässt sich so mit einfachen analytischen Methoden beschreiben.

Der Text zeichnet in manchen Passagen die historische Entwicklung der Hydrodynamik – eines der ältesten physikalischen Gebiete überhaupt – nach, und die Literaturverzeichnisse (jeweils am Kapitelende) enthalten dementsprechend auch einige der wissenschaftshistorisch interessanten Originalarbeiten, bilden aber die zeitliche Entwicklung nicht durchgängig ab. Ziel des Buches ist vielmehr, ausgehend von

der ursprünglichen Formulierung der Hydrodynamik zu aktuellen Forschungsfragestellungen zu kommen.

Der Hauptteil der Vorlesung beschäftigt sich mit viskosen Fluiden, und den entsprechend erweiterten Grundgleichungen. Die Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigen den Einfluss der dynamischen Viskosität (*shear viscosity*) und der Zähigkeit (*bulk viscosity*) auf das Geschwindigkeitsfeld. An festen Oberflächen verschwinden hier nicht nur die normalen, sondern – als Folge der Viskosität – auch die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten; im Euler-Fall gibt es dagegen nur eine Randbedingung.

Aus Viskosität folgt Energiedissipation, die Umwandlung von Energie in Wärme. Für inkompressible Fluide lässt sich die dissipierte Energie relativ leicht berechnen, ebenso die Durchflussmenge und das Strömungsprofil bei einer Rohrströmung (Poiseuille-Strömung) in linearer Näherung.

Von besonderem Interesse, und nach wie vor Gegenstand aktueller Forschung in zahlreichen physikalischen Teildisziplinen wie etwa kalten Quantengasen, ist der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung. Die kritische Reynolds-Zahl liefert nur ein erstes, grobes Kriterium für den Umschlag zur Turbulenz – eine genaueres Kriterium ist die doppelte Schwelle, bei der sowohl die Reynoldszahl, als auch die Störung eine kritische Größe überschreiten müssen. Unterschiedliche Szenarien zum Turbulenzeinsatz werden in der Vorlesung diskutiert, und die Stabilitätstheorie von Landau wird dargestellt. Besonders einprägsame Beispiele zur entwickelten Turbulenz findet man in astrophysikalischen Umgebungen.

Die vor mehr als hundert Jahren (1904) von Prandtl entwickelte theoretische Beschreibung des Fluidverhaltens in der Nähe fester Wände – der Grenzschicht – ist ein besonders interessanter Spezialfall des Gleichungssystems der Hydrodynamik, einschließlich des Umschlags von einer laminaren in eine turbulente Grenzschicht bei umströmten Körpern.

Berücksichtigt man Viskosität und Wärmetransport, besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus der Navier-Stokes-Gleichung, der – im Vergleich zu idealen Fluiden unveränderten – Kontinuitätsgleichung, und einer fünften, thermodynamischen Gleichung; sie ersetzt die Adiabatengleichung bei idealen Fluiden. Aufgrund der irreversiblen Energiedissipation wächst die Entropie bei viskosen Fluiden an. Die

Änderung der Gesamtenergie ist gleich dem Energiestrom, der jetzt auch Terme aufgrund innerer Reibung und Wärmeleitung enthält. Die entsprechende Wärmetransportgleichung lässt sich für inkompressible Fluide wieder stark vereinfachen, in einem ruhenden Fluid wird sie zur Fourier'schen Gleichung. Auch andere Spezialfälle ermöglichen analytische Lösungen.

Ist das Fluid nicht homogen, sondern beispielsweise ein Gemisch aus zwei Komponenten, kommen Diffusionsprozesse als zusätzliche Quelle von Energiedissipation hinzu. Auch Vorgänge wie die erstmals 1905 von Einstein beschriebene Brown'sche Bewegung von Teilchen, die in einer Flüssigkeit suspendiert sind, lassen sich in einer Diffusionstheorie modellieren, wie sie inzwischen in vielen Wissenschaftsbereichen angewandt wird.

Ein Beispiel sind Diffusionsvorgänge in der Teilchenerzeugung bei relativistischen Schwerionenreaktionen, wie man sie am Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) in Brookhaven und am Large Hadron Collider (LHC) in Genf experimentell untersucht. Der LHC nahm 2015 seinen Betrieb wieder auf, um Kollisionen zwischen Protonen bei einer Schwerpunktsenergie von 13 TeV und zwischen Bleiionen bei 5.1 TeV pro Teilchenpaar zu untersuchen.

Wenn die Geschwindigkeit der makroskopischen Fluidströmung – oder die der Fluidteilchen – mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar werden, müssen relativistische Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, die den Euler-Gleichungen bzw. den Navier-Stokes-Gleichungen im nichtrelativistischen Fall entsprechen; dabei geht man vom Energie-Impuls Tensor einer Flüssigkeit aus. Für ideale Fluide diskutieren wir auch die relativistische Verallgemeinerung der Bernoulli-Gleichung und den nichtrelativistischen Grenzfall.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Hydrodynamik ist die Astrophysik, da Sterne und andere kosmische Materieansammlungen wie Galaxien und Galaxienhaufen auf bestimmten Längen- und Zeitskalen durch die hydrodynamische Approximation beschrieben werden können. Zwar würde eine ausführliche Darstellung den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, aber Beispiele wie die Ausbreitung von Schockwellen im interstellaren Medium sollen exemplarisch zeigen, welche Probleme sich im Rahmen der Hydrodynamik behandeln lassen.

Das abschließende Kapitel über die Hydrodynamik der Superfluide behandelt die von Tisza (1940) und Landau (1941) aufgestellte Theorie von Helium II im Rahmen eines Zwei-Fluid-Modells, das sich insbesondere durch eine korrekte Beschreibung der Schallausbreitung in Superflüssigkeiten auszeichnet (zweiter Schall). Hier wie auch in anderen Teilen greift die Vorlesung nicht nur auf die Originalliteratur, sondern auch auf die vorhandenen Lehrbücher zurück (s. Bibliographie), vor allem auf das Lehrbuch von Landau und Lifschitz, das sich zum vertieften Studium und auch als Nachschlagwerk eignet. Die anderen in der Bibliographie genannten Bücher sind ebenfalls empfehlenswert; wenn man sich z. B. in ein neues Gebiet wie die astrophysikalische Hydrodynamik einarbeiten möchte, sind die Werke von Shore oder Choudhuri ein guter Einstieg.

Einige Testaufgaben am Ende des Buches sollen als Anreiz dienen, den Stoff dieses Kurses beispielhaft auch selbst nachzurechnen: Die Mehrzahl der Lösungen ist bereits im vorhergehenden Text versteckt.

Zahlreichen Studierenden bin ich für Fragen und Verbesserungsvorschläge dankbar. Das sorgfältige L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Skript hat Moritz Beutel erstellt und auch aus meinen Abbildungsskizzen satzfertige Druckvorlagen gemacht. Ihm und Wasilij Barsukow danke ich außerdem für viele gründliche Korrekturgänge und Manuela Wirschke für das Einfügen der Abbildungsbezüge im Text. Für die engagierte Betreuung des Projekts danke ich Bianca Alton, Margit Maly und Dr. Vera Spillner vom Springer-Verlag. Hinweise auf dennoch verbleibende Ungenauigkeiten und Fehler – für die ich zuständig bin – bitte direkt an mich senden.

Heidelberg, im Mai 2015

Georg Wolschin

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	1
	1.1 Strömungslehre .....	1
	1.2 Hydrodynamische Beschreibung .....	3
<b>2</b>	<b>Ideale Fluide</b> .....	5
	2.1 Kontinuitätsgleichung .....	5
	2.2 Euler'sche Gleichungen .....	8
	2.3 Bernoulli'sche Gleichung .....	13
	2.4 Euler-Gleichungen im linearisierten Fall .....	17
	2.5 Hydrostatik .....	22
	2.6 Energie- und Impulsstrom im Fluid .....	25
	2.7 Zirkulation, Thomson'scher Satz .....	28
	2.8 Potenzialströmungen .....	30
	2.9 Inkompressible Fluide .....	35
	2.10 Stromfunktion .....	39
	2.11 Wellen .....	46
<b>3</b>	<b>Viskose Fluide</b> .....	53
	3.1 Navier-Stokes-Gleichungen .....	53
	3.2 Energiedissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid .....	56
	3.3 Hagen-Poiseuille'sches Gesetz .....	58
	3.4 Reynolds'sche Zahl; Turbulenzkriterium .....	61
	3.5 Strömungen mit kleinem $Re$ : Stokes'sche Formel ..	67
	3.6 Laminarer Nachlauf .....	69

<b>4</b>	<b>Turbulenz</b> . . . . .	75
	4.1 Übergang zur Turbulenz und doppelte Schwelle . . .	75
	4.2 Turbulenzeinsatz über Instabilität . . . . .	79
	4.3 Stabilität stationärer Strömungen . . . . .	81
	4.4 Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Grenzschichten</b> . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Wärmetransport</b> . . . . .	93
	6.1 Die Wärmetransportgleichung . . . . .	94
	6.2 Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden . . . .	95
	6.3 Wärmeleitung in einem unbegrenzten Medium . . .	98
	6.4 Konvektion . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Diffusion</b> . . . . .	105
	7.1 Flüssigkeitsgemische . . . . .	105
	7.2 Brown'sche Bewegung . . . . .	109
	7.3 Diffusion in relativistischen Systemen . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Relativistische Hydrodynamik</b> . . . . .	121
	8.1 Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit . . . . .	122
	8.2 Relativistische Bewegungsgleichungen . . . . .	124
<b>9</b>	<b>Astrophysikalische Hydrodynamik</b> . . . . .	129
	9.1 Schockwellen . . . . .	130
	9.2 Rankine-Hugoniot-Bedingungen . . . . .	134
<b>10</b>	<b>Hydrodynamik der Superflüssigkeiten</b> . . . . .	141
	10.1 Grundlagen . . . . .	141
	10.2 Hydrodynamische Gleichungen für He II . . . . .	146
	10.3 Schallausbreitung in Superfluiden . . . . .	148
<b>11</b>	<b>Testaufgaben</b> . . . . .	153
	11.1 Kontinuitätsgleichung für die Entropie . . . . .	153
	11.2 Schwingungsgleichung . . . . .	153
	11.3 Hydrostatik . . . . .	154
	11.4 Inkompressible Fluide . . . . .	155

---

11.5	Wasserwellen . . . . .	156
11.6	Poiseuille-Strömung . . . . .	158
11.7	Laminarer Nachlauf . . . . .	159
11.8	Stabilität stationärer Strömungen . . . . .	160
11.9	Wärmeleitung . . . . .	160
11.10	Diffusion . . . . .	161
11.11	Energie-Impuls-Tensor . . . . .	162
11.12	Entropieerhaltung in idealer relativistischer Hydro- dynamik . . . . .	163
<b>Literatur</b>	. . . . .	<b>165</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	. . . . .	<b>167</b>

Die Hydrodynamik ist ein Gebiet der Kontinuumsmechanik, der Mechanik der deformierbaren Medien, das sich auf die Betrachtung von Fluiden mit bestimmten Eigenschaften konzentriert. Die folgende Abb. 1.1 stellt den Zusammenhang zwischen der Hydrodynamik und den verwandten und übergeordneten Disziplinen dar.

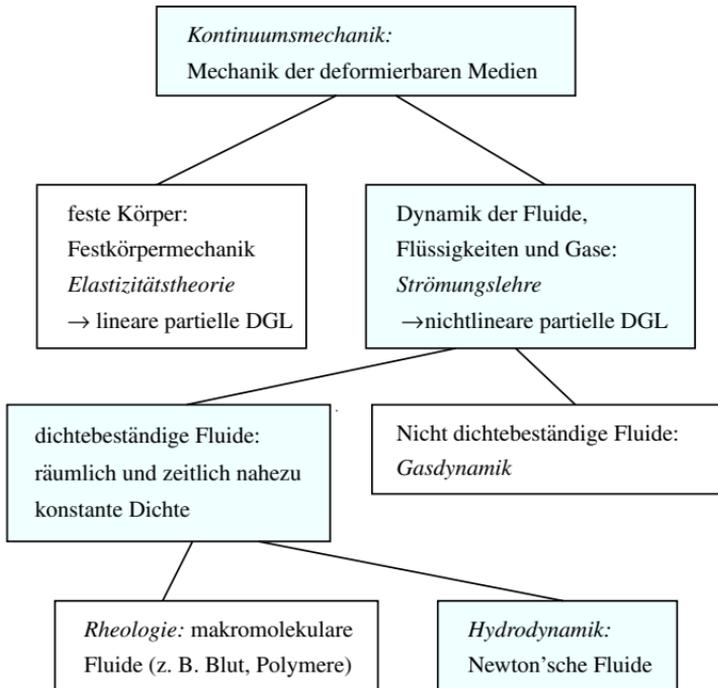
---

## 1.1 Strömungslehre

Die *Strömungslehre* (Dynamik der Fluide) umfasst mehrere Gebiete der Physik:

1. *Hydrodynamik* für einfache (Newton'sche) Fluide wie Wasser,
2. *Rheologie*: makromolekulare Fluide wie polymere Flüssigkeiten, Blut usw., die sich wegen der komplizierten Struktur der Moleküle anders als einfache Fluide verhalten,
3. *Gasdynamik*: nicht dichtebeständige Fluide.

Während sich die *Thermodynamik* vor allem mit Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht beschäftigt (Gleichgewichtsthermodynamik), ist in der *Strömungslehre* der räumliche und zeitliche Verlauf von Prozessen in Systemen von Interesse, die sich nicht im Gleichgewicht befinden. Infolgedessen sind die globalen Zustandsgrößen der Gleichgewichtsthermodynamik wie *Druck*  $p$  und *Temperatur*  $T$  nicht mehr ausreichend, um Strömungsprozesse zu beschreiben.



**Abb. 1.1** Übersicht über die Gebiete der Kontinuumsmechanik

### Beispiel

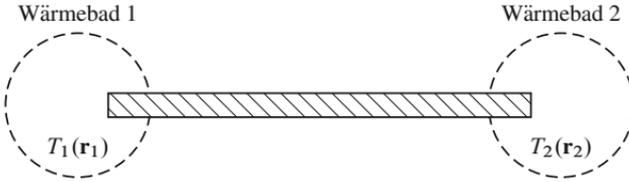
Ein Stab wird an beiden Enden durch Eintauchen in Wärmebäder auf unterschiedliche Temperaturen gebracht (s. Abb. 1.2); die Temperatur ist also ortsabhängig:

$$T = T(\mathbf{r})$$

Nun wird der Stab von den Wärmebädern isoliert. Die Temperatur verändert sich durch den Angleichungsprozess und wird also auch eine Funktion der Zeit:

$$T = T(\mathbf{r}, t).$$

Dabei sind kleine, aber makroskopische Teilsysteme zur Zeit  $t$  in einer Umgebung des Ortes  $\mathbf{r}$  im *lokalen Gleichgewicht*.



**Abb. 1.2** Stab in zwei Wärmebädern

Wird der Stab (oder ein anderes abgeschlossenes Makrosystem) sich selbst überlassen, geht er schließlich in ein *globales* Gleichgewicht über. Bis es dazu kommt, gelten zwischen den Zustandsfeldern dieselben Zusammenhänge wie in der Gleichgewichtsthermodynamik.

## 1.2 Hydrodynamische Beschreibung

Für ein *ideales Gas* im lokalen Gleichgewicht gilt die Zustandsgleichung

$$p(\mathbf{r}, t)V(\mathbf{r}, t) = k_B T(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

mit dem lokalen Druck  $p(\mathbf{r}, t)$  und dem spezifischen Volumen  $V(\mathbf{r}, t)$ .

Gibt es *Bewegungen* im Inneren des Systems, so ist zur Zustandsbeschreibung auch ein *Geschwindigkeitsfeld*  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  bzw. ein *Stromdichtefeld*  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  erforderlich.

Die Darstellung eines räumlich und zeitlich unveränderlichen Systems auf der Basis der Annahme des *lokalen Gleichgewichts* nennt man die hydrodynamische Beschreibung. Auf der Basis dieser Beschreibung soll in dieser Vorlesung die Hydrodynamik im engeren Sinne (für *Newton'sche Fluide*) dargestellt werden. Die Substanzen werden dabei – anders als in der kinetischen Gastheorie und der molekularen Hydrodynamik – als *Kontinuum* angesehen, d. h., ihre detaillierte molekulare Struktur ( $\rightarrow$  *Rheologie*) wird dabei nicht berücksichtigt.

Dies bedeutet wiederum, dass ein *infinitesimales Volumenelement* in der Hydrodynamik gegenüber dem Volumen des betrachteten Körpers klein sein muss, jedoch groß im Vergleich zu den zwischenmolekularen

Volumina. Dies entspricht der Forderung, dass jedes Volumenelement  $\Delta V$  hinreichend viele Moleküle für eine Kontinuumsbeschreibung enthalten muss.

Der *Zustand einer bewegten Flüssigkeit* wird dann durch fünf Größen vollständig festgelegt:

- die drei Komponenten der Geschwindigkeitsverteilung  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  und
- zwei beliebige *thermodynamische Größen*, die über die Zustandsgleichung der Substanz alle anderen thermodynamischen Größen festlegen. Wir wählen hier den *Druck*  $p(\mathbf{r}, t)$  und die *Dichte*  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .

Also wird das vollständige Gleichungssystem der Hydrodynamik *fünf Gleichungen* enthalten. Für eine *ideale Flüssigkeit* (keine Viskosität, keine Wärmeleitfähigkeit) sind dies:

- die *Euler'schen Gleichungen* (drei Komponenten),
- die *Kontinuitätsgleichung*,
- die *Adiabatengleichung* (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung für  $S = \text{const}$ ).

Während in der *Elastizitätstheorie* für Festkörper die Probleme oft mit *linearen partiellen Differenzialgleichungen* formulierbar und exakt lösbar sind, ist dies in der *Hydrodynamik* nicht der Fall: die Gleichungen sind *nichtlinear*, exakte Lösungen existieren nur selten. Die Entwicklung der Hydrodynamik erfolgte auch deshalb in engem Kontakt zum Experiment.

Bereits im vorigen Kapitel wurden die Charakteristika idealer Fluide erwähnt: sie haben *keine Viskosität* und *keine Wärmeleitfähigkeit*. Im Folgenden werden die Grundgleichungen der Hydrodynamik für ideale Fluide abgeleitet.

---

## 2.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung drückt die Erhaltung der Masse in der Hydrodynamik aus und gilt auch für viskose Fluide.

Die relevanten Größen sind die Dichte  $\rho$ , das Volumen  $V_0$  und die Masse  $m = \int \rho dV$  als Integral der Dichte über  $V_0$ . Das Differenzial des Flusses durch die Oberfläche  $\partial V_0$  des Volumens ist gegeben durch

$$d\Phi = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.1)$$

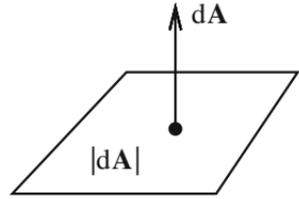
wobei  $|d\mathbf{A}|$  die Größe des Flächenelements angibt und der Vektor  $d\mathbf{A}$  in Richtung der äußeren Normalen zeigt (Abb. 2.1). Demnach gilt hinsichtlich des Vorzeichens:

$$d\Phi > 0 \quad \text{für Fluss aus } dV \text{ heraus,} \quad (2.2)$$

$$d\Phi < 0 \quad \text{für Fluss in } dV \text{ hinein.} \quad (2.3)$$

Der Fluss – die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit aus  $V_0$  herausfließt – ist also gegeben durch das Integral des differenziellen Flusses über die

**Abb. 2.1** Oberflächeninfinitesimal



geschlossene Oberfläche von  $V_0$ :

$$\Phi = \oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.4)$$

Die gleichzeitige Abnahme der Flüssigkeitsmenge in  $V_0$  ist

$$\Phi' = -\partial_t \int_{V_0} \rho dV . \quad (2.5)$$

Gleichsetzen von  $\Phi$  und  $\Phi'$  ergibt

$$-\partial_t \int_{V_0} \rho dV = \oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.6)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung können wir den *Gauß'schen Integralsatz* anwenden, der für ein kompaktes Volumen  $V$  und ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{a}$  einen allgemeinen Zusammenhang zwischen einem Volumenintegral und einem Oberflächenintegral über den Rand des Volumens herstellt:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.7)$$

Aus (2.6) folgt also

$$-\partial_t \int_{V_0} \rho \, dV = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] \, dV = 0, \quad (2.9)$$

was für jedes beliebige Volumenelement  $V_0$  gelten muss, so dass für den Integranden die *Kontinuitätsgleichung* folgt:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.10)$$

Unter Zuhilfenahme des Zusammenhanges

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (2.11)$$

aus der Vektoranalysis lässt sich die Kontinuitätsgleichung auch schreiben als

$$\partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.12)$$

oder als

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.13)$$

mit der totalen Ableitung

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \partial_{\mathbf{r}} \quad (2.14)$$

$$= \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2.15)$$

Alternativ kann die Kontinuitätsgleichung mit dem Stromdichtevektor  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  formuliert werden:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.16)$$

Der Stromdichtevektor weist in die Richtung des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$ , und sein Betrag  $|\mathbf{j}|$  gibt die Flüssigkeitsmenge an, die pro Zeiteinheit durch eine zur Geschwindigkeit orthogonale Flächeneinheit fließt.

## 2.2 Euler'sche Gleichungen

Auf die geschlossene Oberfläche eines Flüssigkeitsvolumens  $V_0$  wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = - \oint_{\partial V_0} p \, d\mathbf{A} \quad (2.17)$$

$$= - \int_{V_0} \nabla p \, dV, \quad (2.18)$$

die wir erneut mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes als Volumenintegral ausgedrückt haben. Auf jedes Volumenelement  $dV$  wirkt die Kraft  $-\nabla p \, dV$ .

Die *Bewegungsgleichung* für ein Volumenelement folgt aus dem zweiten Newton'schen Gesetz, das die Kraft pro Volumeneinheit mit dem Produkt aus Dichte und Beschleunigung gleichsetzt:

$$-\nabla p = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.19)$$

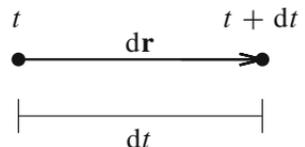
Dabei ist  $d\mathbf{v}/dt$  nicht allein die (lokale) Geschwindigkeitsänderung des Fluids in einem festen Raumpunkt, sondern diejenige eines sich im Raum bewegendes Fluidteilchens im Zeitintervall  $dt$  (Abb. 2.2). Folglich hat  $d\mathbf{v}$  zwei Anteile:

1. Änderung im Raumpunkt  $\mathbf{r}$  während  $dt$ : lokale Ableitung

$$\partial_t \mathbf{v} \, dt \quad (2.20)$$

bei konstantem  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

**Abb. 2.2** Infinitesimale Verschiebung eines Teilchens



2. Differenz der Geschwindigkeiten zum gleichen Zeitpunkt in zwei Raumpunkten mit Abstand  $d\mathbf{r}$  ( $\equiv$  dem in  $dt$  zurückgelegten Weg):

$$dx\partial_x\mathbf{v} + dy\partial_y\mathbf{v} + dz\partial_z\mathbf{v} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \quad (2.21)$$

auch *konvektive Ableitung* genannt.

Die Summe aus (1) und (2) ergibt die infinitesimale Geschwindigkeitsänderung

$$d\mathbf{v} = \partial_t\mathbf{v} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \quad (2.22)$$

aus der wir per Division durch  $dt$  die *substantielle Ableitung* gewinnen:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (2.23)$$

Die substantielle Ableitung ist ein physikalischer Begriff; aus mathematischer Sicht ist sie identisch mit dem totalen Differenzial (2.14). Substantiell wird sie genannt, da sie die Änderung der Größe entlang der Bewegung der Substanz, also des bewegten Fluids, beschreibt.

Die Bewegungsgleichung (2.19) kann also ausgeschrieben werden zu [1]

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (2.24)$$

Dies sind die *Euler'schen Gleichungen für ideale Fluide*<sup>1</sup>.

Die *Nichtlinearität* im Konvektionsglied erschwert die Integration erheblich, denn das Superpositionsprinzip hat hier keine Gültigkeit mehr. Gerade die Nichtlinearität der Gleichungen zeichnet verantwortlich für die Vielzahl hydrodynamischer Phänomene, und – unter bestimmten Bedingungen – für den Übergang zu *chaotischem* (turbulentem) Verhalten.

Im *Schwerefeld* wirkt auf jede Volumeneinheit zusätzlich die Kraft  $\rho \mathbf{g}$ ; die *Euler-Gleichungen im Schwerfeld* lauten also

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (2.25)$$

<sup>1</sup> Die Gleichungen wurden von Leonhard Euler (\*1707 Basel, †1783 St. Petersburg) im Jahr 1755 gefunden und 1757 veröffentlicht.

Diese Gleichungen gelten für *ideale Fluide*, bei denen Wärmeleitung und Zähigkeit vernachlässigbar sind. Beide Prozesse erzeugen *Energie-dissipation*. Ohne sie ist die Bewegung in jedem Teil der Flüssigkeit *adiabatisch*: Die Entropie jedes Flüssigkeitselements bleibt bei der Bewegung im Raum konstant.

Mit

$$s = \frac{\text{Entropie}}{\text{Masseneinheit}} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad (2.26)$$

analog zu  $d\mathbf{v}/dt$  gilt hier für die totale Zeitableitung, also die Entropieänderung eines sich bewegenden Fluidelements, die *Adiabatengleichung*

$$\frac{ds}{dt} = \partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (2.27)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (2.10) lässt sie sich als Kontinuitätsgleichung für die Entropie schreiben,

$$\partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad (2.28)$$

mit der Entropiestromdichte  $\rho s \mathbf{v}$ .

Oft vereinfacht sich die Adiabatengleichung: Ist die Entropie anfangs in allen Punkten des Flüssigkeitsvolumens gleich, so bleibt sie auch während der weiteren Bewegung der Flüssigkeit zeitlich unverändert:

$$S(\mathbf{r})|_{t=0} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad S(\mathbf{r}, t) = \text{const} \quad \forall t. \quad (2.29)$$

Dieser Fall heißt *isentrop*e (oder *homentrop*e) *Bewegung*.

Für isentrop

e Bewegung lassen sich mit der *Enthalpie*  $w$  (pro Masseneinheit), die auch bei der Beschreibung isobarer Prozesse wichtig ist, die Euler-Gleichungen (2.24) vereinfachen, indem man vom Differenzial der Enthalpie ausgeht:

$$dw = \underbrace{T ds}_{\text{innere Energie}} + \underbrace{V dp}_{\text{Verdrängungsarbeit}}, \quad (2.30)$$

wobei  $V = 1/\rho$  das spezifische Volumen und  $T$  die Temperatur angeben. Falls die Entropie konstant ist,  $s = \text{const} \Rightarrow ds = 0$ , vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$dw = V dp = \frac{dp}{\rho}. \quad (2.31)$$

Also folgt für den Gradienten der Enthalpie

$$\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.32)$$

Damit werden die Euler-Gleichungen (2.24) zu

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w, \quad (2.33)$$

und im Schwerfeld

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w + \mathbf{g}. \quad (2.34)$$

Nun bildet man die Rotation auf beiden Seiten und macht sich zunutze, dass nach den Resultaten der Vektoranalysis

$$\nabla \times \nabla = 0 \quad (2.35)$$

und

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (2.36)$$

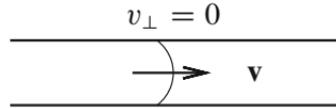
gilt. Damit werden im *isentropen Fall* die Euler-Gleichungen zu den *Euler-Gleichungen für isentrope Bewegung*, die nur das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  enthalten<sup>2</sup>:

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]. \quad (2.37)$$

---

<sup>2</sup> Dies ist nicht möglich, wenn  $s$  nicht konstant ist, da dann im Allgemeinen  $\nabla \times \frac{\nabla p}{\rho} \neq 0$ .

**Abb. 2.3** Geschwindigkeitsprofil eines umgrenzten Fluids



Dazu folgt bei *inkompressiblen* Fluiden (also für  $\rho = \text{const}$ ) aus der Kontinuitätsgleichung (2.3) die Bedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.38)$$

(Der Unterschied zwischen kompressiblen und inkompressiblen Fluiden fällt allerdings erst ins Gewicht, wenn sich  $|\mathbf{v}|$  in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit bewegt.)

Außerdem können wir die *Randbedingung*

$$v_{\perp} = 0 \quad \text{am Rand des Fluids} \quad (2.39)$$

aufstellen, die einfach besagt, dass das Fluid nicht in die Wand eindringen kann (Abb. 2.3). Bei zwei sich nicht mischenden Fluiden lautet die Randbedingung

$$v_{\perp}^1 = v_{\perp}^2 = v_{\perp}^{\text{Grenzfläche (1-2)}}. \quad (2.40)$$

In den Euler-Gleichungen für die isentrope Bewegung (2.37) fällt der Gravitationsterm weg, da Gravitation eine konservative Kraft ist – d. h., sie lässt sich als Gradient eines Potentials darstellen – und da  $\nabla \times \nabla = 0$ :

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -\nabla U. \quad (2.41)$$

In der nur durch das Geschwindigkeitsfeld bestimmten Form der Euler-Gleichungen gibt es also keine Abhängigkeit von konservativen äußeren Kräften mehr. Der Einfluss einer äußeren Kraft kann sich jedoch in den *Randbedingungen* beim Lösen der Differenzialgleichung bemerkbar machen.

## 2.3 Bernoulli'sche Gleichung

Bei einer *stationären Strömung* ist die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Raumpunkt, den das Fluid einnimmt, zeitlich konstant:

$$\partial_t \mathbf{v} = 0. \quad (2.42)$$

Die isentropen Euler'schen Gleichungen (2.37) in der Form

$$\partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \left( w + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \quad (2.43)$$

werden dann zu

$$\nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla w. \quad (2.44)$$

Daraus lässt sich die *Bernoulli'sche Gleichung*<sup>3</sup> ableiten [2]:

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w = \text{const}. \quad (2.45)$$

Der Wert der Konstanten ist dabei unterschiedlich für verschiedene *Stromlinien*.

Bei *stationären Strömungen* stimmen *Stromlinien* und *Bahnkurven* der Flüssigkeitspartikel überein. Bei einer nichtstationären Strömung ist das nicht der Fall (Abb. 2.4).

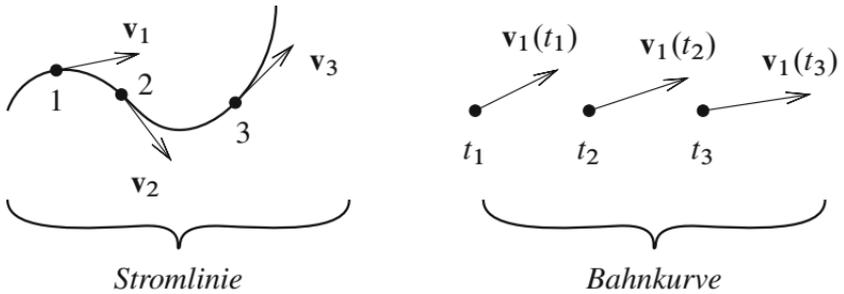
Die Tangenten der *Stromlinien* geben die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu einem gegebenen Zeitpunkt an (für *verschiedene* Fluidteilchen in aufeinanderfolgenden Raumpunkten).

Die Tangenten der *Bahnkurven* geben die Richtungen der Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  bestimmter Fluidteilchen zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten an.

Im Schwerfeld muss in der Euler-Gleichung – und dementsprechend in der Bernoulli-Gleichung – die Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}$  ergänzt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir dafür die  $z$ -Richtung:

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w + gz = \text{const}. \quad (2.46)$$

<sup>3</sup> Daniel Bernoulli (\*1700 Groningen, †1782 Basel), 1738.



**Abb. 2.4** Bahnkurven und Stromlinien

Daniel Bernoulli fand die Gleichung jedoch nicht als Ableitung aus der (damals noch unbekannt) Euler-Gleichung, sondern direkt aus dem Energiesatz als

$$\underbrace{\rho \frac{v^2}{2}}_{\text{kinetische Energie pro Volumeneinheit}} + \underbrace{p}_{\text{Druck: potenzielle Energie der inneren Kräfte}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{potenzielle Energie der äußeren Kraft pro Volumeneinheit}} = \text{const.} \quad (2.47)$$

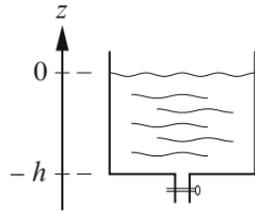
Die Bernoulli'sche Gleichung hat wichtige Anwendungen im Turbinenbau, der Aerodynamik etc. Obwohl ihre Ableitung aus den Euler'schen Gleichungen zunächst nur für stationäre Strömungen gilt, lässt sich die Bernoulli'sche Gleichung auch auf nichtstationäre Strömungen verallgemeinern.

### Beispiel 1

Aus der Bernoulli'schen Gleichung folgt das *Torricelli'sche Theorem*, das Torrcelli<sup>4</sup> – ein Schüler Galileis – etwa 100 Jahre vor Bernoulli fand.

Ein Gefäß ist bis zu einer Höhe  $h$  mit einem Fluid gefüllt (Abb. 2.5). Der Auslass ist geschlossen, so dass im ganzen Gefäß  $v = 0$  gilt. Außerdem ist der der Druck (relativ zum Atmosphärendruck)  $p = 0$  an der Oberfläche bei  $z = 0$ . Aus der Bernoulli'schen Gleichung folgt

<sup>4</sup> Evangelista Torricelli (\*1608 Faenza, †1647 Florenz).

**Abb. 2.5** Gefäß mit Hahn

daher für  $z = 0$ , dass  $\text{const} = 0$ . Also gilt am Boden

$$p = \rho gh . \quad (2.48)$$

Das ist der *hydrostatische Druck*.

Wird der Hahn geöffnet, so herrscht an der Öffnung Atmosphärendruck, also  $p = 0$ . Dies reduziert die Bernoulli'sche Gleichung auf

$$\frac{v^2}{2} = gh . \quad (2.49)$$

Für die Ausflussgeschwindigkeit  $v$  gilt also

$$v = \sqrt{2gh} , \quad (2.50)$$

was eine einfache Anwendung des Energiesatzes mittels der Bernoulli'schen Gleichung ist.

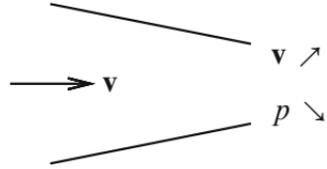
### Beispiel 2

Die Änderung des Drucks in einer stationären Strömung von veränderlichem Querschnitt ist der Änderung von  $|\mathbf{v}|$  entgegengesetzt: bei Inkompressibilität ist die Druckflussmenge in jedem Querschnitt dieselbe, so dass  $v$  bei abnehmendem Querschnitt zunimmt, bei zunehmendem Querschnitt aber geringer wird. Nach der Bernoulli'schen Gleichung (2.6) bei gleichbleibendem  $z$ ,

$$\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const} , \quad (2.51)$$

verhält sich der Druck umgekehrt (Abb. 2.6).

**Abb. 2.6** Horizontale Röhre von veränderlichem Querschnitt



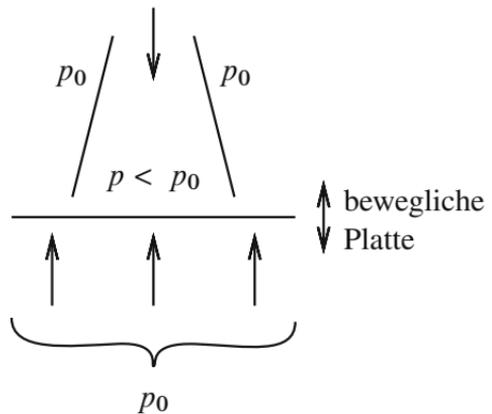
(Eine Menschenmenge in einer sich verengenden Passage verhält sich gegensätzlich: die Geschwindigkeit nimmt ab, der Druck aber nimmt zu.)

### Beispiel 3

Pressluft strömt durch einen Kanal mit zunehmendem Querschnitt gegen eine beweglich gelagerte Platte. In der Folge wird die Platte angehoben.

Der Grund dafür ist, dass im Kanal die Geschwindigkeit der Luft abnimmt; der Druck nimmt also wegen der Bernoulli'schen Gleichung bzw. des Energiesatzes zu. Am Kanalende herrscht aber Atmosphärendruck  $p_0$ , kurz davor im Kanal muss also  $p < p_0$  gelten – es entsteht also eine Sogwirkung von oben, und die Platte wird angehoben (Abb. 2.7, die Darstellung ist stark vereinfacht).

**Abb. 2.7** Pressluft in vertikaler Röhre



## 2.4 Euler-Gleichungen im linearisierten Fall

Wir erinnern uns an die Euler-Gleichungen (2.24),

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (2.52)$$

und die Kontinuitätsgleichung (2.10),

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.53)$$

In idealen *kompressiblen* Fluiden ist  $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$ .

Um kleinere harmonische Luftschwingungen beschreiben zu können, suchen wir eine lineare Lösung dieser Gleichungen. Wir nähern also

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \approx \partial_t \mathbf{v} \quad (2.54)$$

und eliminieren damit die quadratischen Anteile in der Gleichung. Dadurch können wir akustische Schwingungen in Fluiden analytisch beschreiben.

Es sei  $p$  die Druckabweichung vom Atmosphärendruck  $p_0$  und  $\rho$  die Dichte. Wir entwickeln  $\rho$  räumlich um die Dichte der ungestörten Atmosphäre  $\rho_0$ :

$$\rho = \rho_0 + \xi \underbrace{\partial_x \rho|_{x_0}}_{=0} + \frac{\xi^2}{2} \partial_x^2 \rho|_{x_0} + \dots \quad (2.55)$$

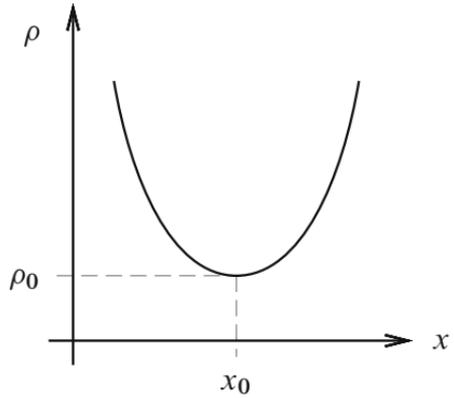
Größen der zweiten Ordnung und höher vernachlässigen wir, so dass sich als Linearisierung der Dichte  $\rho \approx \rho_0$  ergibt (Abb. 2.8). Wir erhalten also aus (2.24) und (2.10) vier lineare Gleichungen:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad (2.56)$$

$$\partial_t \rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.57)$$

Die Beschreibung wird also auf zeitliche Änderungen der Dichte an einem festen Ort  $x_0$  konzentriert.

**Abb. 2.8** Quasiharmonische Dichteverteilung



Der Zusammenhang von *Druck*  $p$  und *Dichte*  $\rho$  lässt sich über die *Thermodynamik* herstellen: Bei isothermen Zustandsänderungen ist

$$\nabla p = c^2 \nabla \rho, \quad (2.58)$$

was uns ermöglicht, die Schallgeschwindigkeit anzunähern als

$$c \approx \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (2.59)$$

Auf Meereshöhe ist

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1,928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ p_0 &= 101\,325 \text{ Pa} \approx 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1013,25 \text{ hPa} \\ \Rightarrow c &= \sqrt{\frac{101\,325}{1,928} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 279,96 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Tabelle 2.1 gibt experimentelle Werte von  $c$  in Luft an. Offenbar ist der isotherme Wert von  $280 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  wesentlich zu klein, da bei einem schnellen Wechsel der Luftschwingungen kein Wärmeausgleich möglich ist

**Tab. 2.1** Experimentelle Werte für  $c$  bei verschiedenen Temperaturen

$T$ [°C]	0	10	20	30
$c$ [m/s]	332	338	344	350

und deshalb die Zustandsänderung bei der Schallausbreitung nicht isotherm, sondern adiabatisch ist. Es gilt also die *adiabatische Zustandsgleichung*

$$pV^\kappa = \text{const} . \quad (2.61)$$

Der *Adiabatenkoeffizient*  $\kappa$  ist der Quotient der spezifischen Wärmekapazitäten,

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{f} , \quad (2.62)$$

wobei  $f$  die Zahl der Freiheitsgrade angibt. Für zweiatomige Gase ist  $f = 5$ , da sie drei Translations- und zwei Rotationsfreiheitsgrade besitzen; also ist  $\kappa_2 = 7/5 \approx 1.4$ . Für einatomige Gase ohne Rotationsfreiheiten (in der klassischen Anschauung) ist  $f = 3$  und also  $\kappa_1 = 5/3$ . Außerdem gilt

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} = c^2 \quad (2.63)$$

und also

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \approx \sqrt{1,4} \cdot 279,96 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 331,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \end{aligned} \quad (2.64)$$

was wiederum in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten ist.

(Für polytrophe Prozesse gilt allgemein

$$pV^n = \text{const} , \quad (2.65)$$

wobei  $n = 0$  einer isobaren,  $n = 1$  einer isothermen,  $n = \kappa$  einer adiabatischen und  $n = \infty$  einer isochoren Zustandsänderung entspricht.)

In den linearisierten Euler-Gleichungen kann nun über die Schallgeschwindigkeit  $c$  der Druck  $p$  über die Dichte  $\rho$  ausgedrückt werden:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + c^2 \nabla \rho = 0. \quad (2.66)$$

Wir eliminieren  $v$ , indem wir die linearisierte Kontinuitätsgleichung (2.57) partiell nach  $t$  ableiten,

$$\partial_t^2 \rho + \nabla (\rho_0 \partial_t \mathbf{v}) = 0, \quad (2.67)$$

und die Euler-Gleichungen einsetzen:

$$\partial_t^2 \rho = c^2 \Delta \rho. \quad (2.68)$$

Dieselbe Gleichung gilt für  $p$ , da  $\nabla p$ ,  $\Delta p$  und  $\partial_t^2 p$  bis auf  $c^2$  gleich den mit  $\rho$  gebildeten Größen sind:

$$\partial_t^2 p = c^2 \Delta p. \quad (2.69)$$

Dies ist die *Schwingungsgleichung*. Sie kann im Eindimensionalen ( $\Delta = \partial_x^2$ ) eine schwingende *Saite* beschreiben oder im Zweidimensionalen ( $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ ) eine schwingende *Membran*.

Die Lösung der Gleichung im Eindimensionalen,

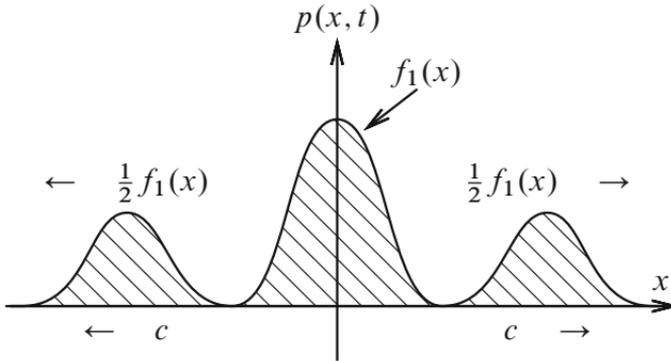
$$\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p, \quad (2.70)$$

ist möglich durch den sogenannten *d'Alembert'schen Ansatz*:

$$p(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \quad (2.71)$$

mit willkürlichen reellen Funktionen  $F_1, F_2$ . Mit den Anfangsbedingungen

$$p = f_1(x), \quad \partial_t p = f_2(x) \quad (2.72)$$



**Abb. 2.9** Zeitliche Ausbreitung einer Druckstörung

für  $t = 0$  wird

$$F_1(x) + F_2(x) = f_1(x), \quad (2.73)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x). \quad (2.74)$$

Integration ergibt

$$F_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(\xi) d\xi \right]. \quad (2.75)$$

Für  $f_2 \equiv 0$  wandert eine anfängliche Druckstörung  $f_1(x)$  zur Hälfte nach rechts, zur Hälfte nach links, jeweils mit Geschwindigkeit  $c$  und ohne Änderung der Form (Abb. 2.9). Das entspricht der Ausbreitung eines Geräusches mit Schallgeschwindigkeit  $c$  (analog zur Saite, die bei  $t = 0$  angezupft und dann sich selbst überlassen wird). Die Fortpflanzung erfolgt *longitudinal*: Transversalwellen gibt es in idealen Fluiden nicht.

Bei *periodischen Luftschwingungen* ist  $\omega = 2\pi/T$  die Kreisfrequenz,  $\nu = \omega/(2\pi) = 1/T$  die Frequenz (Zahl der Schwingungen pro Sekunde, *Tonhöhe*). Also sind  $F_1, F_2$  trigonometrische Funktionen mit Pha-

sen  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$F_1(x + ct) = b \cos(kx + \omega t + \beta) \quad \text{in } -x\text{-Richtung,} \quad (2.76)$$

$$F_2(x - ct) = a \cos(kx - \omega t + \beta) \quad \text{in } x\text{-Richtung.} \quad (2.77)$$

Bei  $a = b$  ergibt die Überlagerung eine *stehende Welle*. Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch die *Dispersionsrelation*

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}. \quad (2.78)$$

## 2.5 Hydrostatik

Für eine ruhende Flüssigkeit ohne äußere Kräfte werden die Euler-Gleichungen (2.24) wegen  $\mathbf{v} \equiv 0$  zu

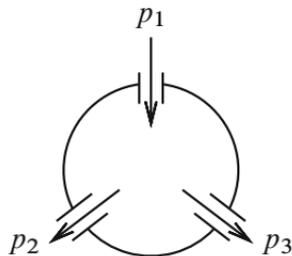
$$\nabla p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{const.} \quad (2.79)$$

Der Druck ist in allen Punkten der Flüssigkeit in jede Raumrichtung gleich stark (im Inneren und am Rand): Das ist das *Pascal'sche Gesetz*<sup>5</sup> (Abb. 2.10). Es gilt unter der Voraussetzung, dass die Schwerkraft gegenüber den äußeren Drücken vernachlässigt werden kann und sich die Teilchen leicht gegeneinander verschieben lassen.

Im Schwerfeld wird die Euler-Gleichung hingegen zu

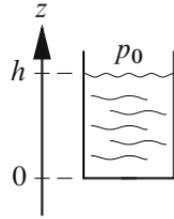
$$\nabla p = \rho \mathbf{g}. \quad (2.80)$$

**Abb. 2.10** Zum Pascal'schen Gesetz



<sup>5</sup> Blaise Pascal (\*1623 Clermont-Ferrand, †1662 Paris).

**Abb. 2.11** Ruhendes Fluid  
im Schwerfeld



Für inkompressible Fluide ( $\rho = \text{const}$ ) lässt sich die Gleichung integrieren:

$$\partial_x p = \partial_y p = 0 \quad (2.81)$$

$$\partial_z p = -\rho g \quad (2.82)$$

$$\Rightarrow p = -\rho g z + \text{const} \quad (2.83)$$

An der Oberfläche ist  $z = h$  und  $p = p_0$  (Abb. 2.11)

$$\Rightarrow \text{const} = p_0 + \rho g h \quad (2.84)$$

$$\Rightarrow p = p_0 + \rho g (h - z) . \quad (2.85)$$

Im Allgemeinen – und besonders für Gase – ist  $\rho$  jedoch nicht konstant; für Fluide im thermischen Gleichgewicht lässt sich die Euler-Gleichung dennoch integrieren.

### Beispiel

Rotation eines Zylinders. Wir betrachten eine flüssigkeitsgefüllte *Zentrifuge*, die mit  $\omega = \text{const}$  um die Vertikale rotiert. Die Zentrifugalkraft hat ein Potenzial und ermöglicht ein Gleichgewicht, es handelt sich also um ein *quasi-statisches Problem*.

Die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit ist

$$F_r = \rho r \omega^2 , \quad (2.86)$$

also ist das Zentrifugalpotenzial

$$U_r = -\frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = -\nabla U . \quad (2.87)$$

Das Gesamtpotenzial von Gravitation und Rotation ist also

$$U = \rho g z - \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 \quad (2.88)$$

$$= \rho g \left( z - \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right). \quad (2.89)$$

Die mechanische Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\nabla p = \mathbf{F} = -\nabla U \quad (2.90)$$

$$\Rightarrow \nabla (p + U) = 0 \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow p + U = \text{const} \quad (2.92)$$

$$\Leftrightarrow p = \rho g \left( \frac{r^2 \omega^2}{2g} - z \right) + \text{const}. \quad (2.93)$$

Die Konstante können wir bestimmen anhand der Wasserstandshöhe  $z_0$  bei  $r = 0$ .  $p$  ist der Überdruck ausgehend vom äußeren Atmosphärendruck, also muss an der Oberfläche  $p = 0$  sein.

$$\Rightarrow 0 = -\rho g z_0 + \text{const} \quad (2.94)$$

$$\Rightarrow \text{const} = \rho g z_0. \quad (2.95)$$

Das Druckprofil ist also

$$p = \rho g \left( \frac{r^2 \omega^2}{2g} + z_0 - z \right). \quad (2.96)$$

Daraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche mit  $p = 0$ :

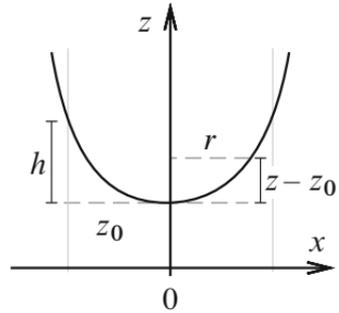
$$z - z_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad (2.97)$$

und mit der Auftriebshöhe  $h$  des Wassers am Rand:  $r = R \Rightarrow h = z - z_0$ .

Die Bahngeschwindigkeit ist  $v = \omega r$ , so dass die Höhe durch ein Oberflächenparaboloid beschrieben wird (Abb. 2.12):

$$h = \frac{v^2}{2g}. \quad (2.98)$$

**Abb. 2.12** Oberflächenparaboloid in der Zentrifuge



Die Niveauflächen konstanten Drucks sind kongruente Paraboloiden, die gegen das Oberflächenparaboloid nach unten verschoben sind.

## 2.6 Energie- und Impulsstrom im Fluid

Die Energie des Fluids pro Volumenelement ist

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon = \text{kinetische Energie} + \text{innere Energie}, \quad (2.99)$$

wobei  $\varepsilon$  die innere Energie pro Masseneinheit angibt. Bei Bewegung folgt die zeitliche Änderung der partiellen Ableitung

$$\partial_t \left[ \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right], \quad (2.100)$$

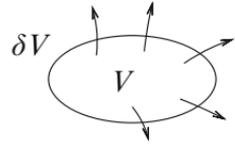
die sich aus der Kontinuitätsgleichung (2.10), den Euler-Gleichungen (2.24) und der thermodynamischen Relation

$$d\varepsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (2.101)$$

berechnen. Man erhält

$$\partial_t \left[ \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] = -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right] \quad (2.102)$$

**Abb. 2.13** Energieänderung eines Fluids



mit der Enthalpie pro Masseneinheit

$$w = \varepsilon + pV = \varepsilon + \frac{p}{\rho}. \quad (2.103)$$

Die *Energieänderung* des Fluids pro Zeiteinheit in einem gegebenen Volumen  $V$  (Abb. 2.13) ergibt sich durch die Integration über dieses Volumen:

$$\partial_t \int_V \left[ \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] dV = - \int_V \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right] dV. \quad (2.104)$$

Dieses Integral können wir mit dem Gauß'schen Integralsatz (2.7) in ein Oberflächenintegral umformen:

$$\partial_t \int_V \left[ \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right] dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.105)$$

$$= - \oint_{\partial V} \mathbf{j} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.106)$$

Dies ist die Energiemenge, die pro Zeiteinheit aus dem betrachteten Volumen  $V$  durch dessen Begrenzungsfläche  $A \equiv \partial V$  herausfließt. Also ist

$$\rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) = \mathbf{j} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \quad (2.107)$$

der *Vektor der Energiestromdichte*.

Das Fluid mit Stromdichte  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$  führt pro Masseneinheit bei der Bewegung die Energie  $v^2/2 + w$  mit sich: Hier steht die *Enthalpie* anstelle der inneren Energie  $w = \varepsilon + p/\rho$ . Wir können also schreiben:

$$\partial_t \int_V \left[ \rho \frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon \right] dV = - \oint_{\partial V} \rho\mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \cdot d\mathbf{A} - \oint_{\partial V} p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.108)$$

wobei das erste Integral die kinetische und innere Energie ist, die pro Zeiteinheit *durch die Oberfläche* transportiert wird, und das zweite Integral die Arbeit angibt, die von den Druckkräften an der Flüssigkeit innerhalb der geschlossenen Oberfläche geleistet wird.

Der Impulsstrom folgt analog dazu aus der Kontinuitätsgleichung, den Euler-Gleichungen und thermodynamischen Relationen:

$$\rho\mathbf{v} = \text{Impuls pro Volumeneinheit} \quad (2.109)$$

$$\partial_t (\rho\mathbf{v}) = \text{Geschwindigkeit der Impulsänderung.} \quad (2.110)$$

Vereinfachend läßt sich die totale zeitliche Änderung des Impulses pro Volumeneinheit schreiben als

$$\partial_t \int_V \rho\mathbf{v} dV = - \int_V \nabla [p + \rho v^2] dV \quad (2.111)$$

$$= - \oint_A [p + \rho v^2] d\mathbf{A}. \quad (2.112)$$

Die *Dichte des Impulsstromes durch die Oberfläche* ist also

$$p + \rho v^2, \quad (2.113)$$

wobei es sich hier eigentlich um eine *tensorielle Größe* handelt, die durch einen Skalar nur unzureichend beschrieben werden kann.

## 2.7 Zirkulation, Thomson'scher Satz

Die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve ist definiert als

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.114)$$

wobei  $d\mathbf{l}$  ein Linienelement auf der Kurve  $C$  angibt. Bei Bewegung des Fluids ändern sich  $\mathbf{v}$  und die Gestalt der Kurve. Die Veränderung der Zirkulation bestimmen wir durch die totale Zeitableitung

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.115)$$

Dadurch erhalten wir die Änderung der Zirkulation längs einer *sich bewegend*en Flüssigkeitskurve.

Wir wollen die Differenziation nach den Ortskoordinaten durch ein  $\delta$  ausdrücken, die Differenziation nach der Zeit hingegen durch ein  $d$ .  $d\mathbf{r}$  ist also ein Linienelement auf der Kurve, das wir als Differenz zweier Ortsvektoren  $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  schreiben können:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}. \quad (2.116)$$

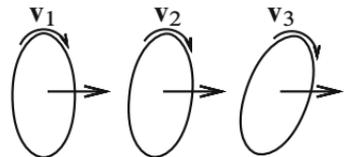
Die zeitliche Ableitung der Zirkulation (Abb. 2.14) ist dann

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.117)$$

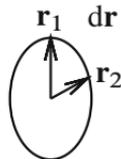
Es ist

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = \delta \frac{v^2}{2} \quad (2.118)$$

**Abb. 2.14** Änderung der Zirkulation



**Abb. 2.15** Linienelement auf der Kurve



und

$$\oint \delta \frac{v^2}{2} = 0, \quad (2.119)$$

da ein Integral über ein vollständiges Differenzial längs einer geschlossenen Kurve (Abb. 2.15) verschwindet. Also ist

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta \mathbf{r}. \quad (2.120)$$

Für isentrope Bewegungen ist die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w \quad (2.121)$$

und mit dem Satz von Stokes lässt sich das Kurvenintegral in ein Flächenintegral überführen,

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.122)$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_A \left( \nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.123)$$

$$= 0 \quad (2.124)$$

wegen  $d\mathbf{v}/dt = -\nabla w$  und  $\nabla \times \nabla = 0$ . (Wegen  $\nabla \times \mathbf{g} = 0$  gilt dies auch im Schwerfeld.)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.125)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} . \quad (2.126)$$

Dies ist der *Thomson'sche Satz*<sup>6</sup>, der Erhaltungssatz für die Zirkulation: In einer idealen Flüssigkeit ist die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve bei isentroper Strömung konstant.

Auf eine unendlich kleine geschlossene Kurve  $\delta C$  angewandt, ergibt der Satz mithilfe des Stokes'schen Integralsatzes die Erhaltung der *Wirbelung*<sup>7</sup>  $\nabla \times \mathbf{v}$  der Fluidströmung:

$$\oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\delta A} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} \approx (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{A} \quad (2.127)$$

$$\stackrel{!}{=} \text{const} . \quad (2.128)$$

---

## 2.8 Potenzialströmungen

Potenzialströmungen sind Strömungen, für die *im ganzen Raum*

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.129)$$

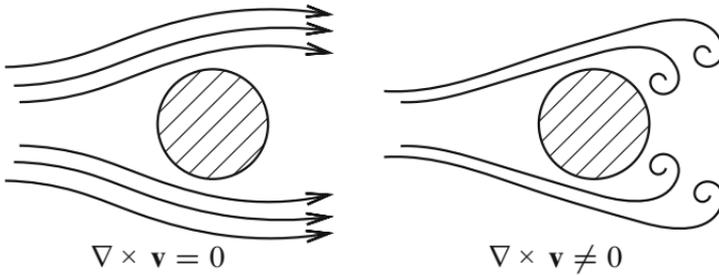
gilt, d. h., sie sind *wirbelfrei* bis auf singuläre Punkte oder Linien. Bei *Wirbelströmungen* hingegen gilt im Allgemeinen (Abb. 2.16)

$$\nabla \times \mathbf{v} \neq 0 . \quad (2.130)$$

---

<sup>6</sup> Aufgestellt 1869 von William Thomson, 1. Baron Kelvin (\*1824 Belfast, †1907 Netherhall).

<sup>7</sup> Auch *Wirbelstärke*; *vorticity* in englischsprachiger Literatur.



**Abb. 2.16** Wirbelfreie und nicht wirbelfreie Strömungen

Aus der Erhaltung der Zirkulation folgt – zunächst für stationäre Strömungen – die Wirbelfreiheit: Sei  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  auf einem Punkt der Stromlinie. Eine infinitesimale geschlossene Kurve  $\delta C$  umschlieÙe die Stromlinie und bewege sich mit dem Fluid. Also wird mit dem Satz von Stokes:

$$\oint_{\delta C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.131)$$

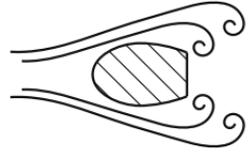
Daraus folgt, dass

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.132)$$

entlang der gesamten Stromlinie; die Rotation verschwindet auch in allen anderen Punkten der Stromlinie. Bei *nicht stationären* Strömungen gilt das auch, nur betrachtet man hier anstelle der Stromlinie die in der Zeit von einem bestimmten Fluidteilchen zurückgelegte *Bahnkurve* (die nur bei stationären Strömungen mit der Stromlinie übereinstimmt).

Ist der von  $-\infty$  auf einen Körper einströmende Strom homogen ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ), so ist die stationäre Strömung um einen beliebigen Körper eine Potenzialströmung mit  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . Dennoch unterscheidet sich das wahre Strömungsbild beim Umströmen eines Körpers von einer Potenzialströmung, denn die Strömung längs der Wand ermöglicht keine geschlossenen Kurven um Stromlinien. Das führt dazu, dass die Stromlinien sich ablösen und im Inneren der Flüssigkeit verlaufen: es gibt einen Sprung in der tangentialen Geschwindigkeitskomponente (Abb. 2.17).

**Abb. 2.17** Turbulenzen an tangentialer Unstetigkeit



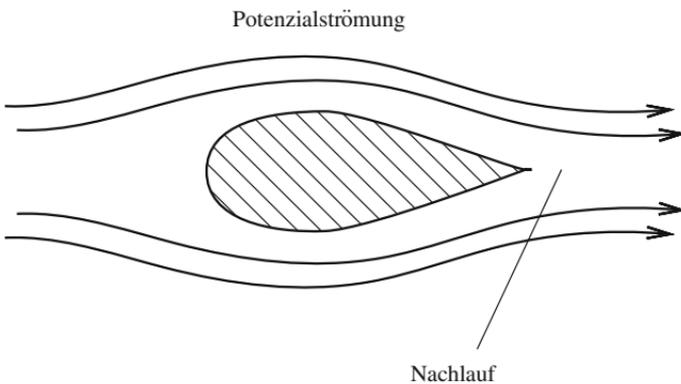
Für *ideale* Fluide gibt es also eine *unendliche Mannigfaltigkeit* von Lösungen mit Flächen tangentialer Unstetigkeiten. Da sie instabil sind, wird die Strömung *turbulent*. Bei *realen* (viskosen) Fluiden ist die Lösung jedoch als Folge der Zähigkeit im Allgemeinen eindeutig; entscheidend ist dabei das Verhalten der *Grenzschicht*.

Bei *stromlinienförmigen* Körpern ist die Strömung nur in einer dünnen Flüssigkeitsschicht in der Nähe der Oberfläche des Körpers und im schmalen Bereich des *Nachlaufs* (Abb. 2.18) keine Potenzialströmung.

### Beispiel

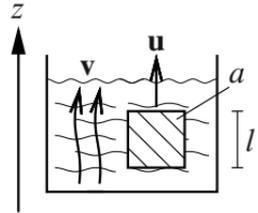
für eine Potenzialströmung: kleine Schwingungen eines eingetauchten Körpers (Abb. 2.19).

Für kleine Amplituden  $a \ll l$  (wobei  $l$  die lineare Dimension des Körpers angibt) ist die Strömung um den schwingenden Körper eine Potenzialströmung. Die Größenordnung der Glieder in den Euler-



**Abb. 2.18** Nachlauf in einer Potenzialströmung

**Abb. 2.19** Schwingender Körper in einem Fluid



Gleichungen schätzen wir ab:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla w. \quad (2.133)$$

Für den schwingenden Körper gilt:

$$z(t) = a \cos \omega t \quad (2.134)$$

$$u(t) = -\omega a \sin \omega t \quad (2.135)$$

$$\partial_t u(t) = -\omega^2 a \cos \omega t \quad (2.136)$$

$$|u_{\max}| = \omega a \quad (2.137)$$

$$|\partial_t u|_{\max} = \omega^2 a. \quad (2.138)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  wird durch die Schwingungen des Körpers (mit  $u$ ) in Abständen der Größenordnung  $l$  geändert. Für die Ableitung von  $v$  gilt also

$$\partial_t v \sim \frac{u}{l}. \quad (2.139)$$

In der Nähe des Körpers wird die Größe von  $v$  durch  $u$  bestimmt,

$$v \sim u \quad \Rightarrow \quad |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \sim \frac{u^2}{l}. \quad (2.140)$$

Wegen  $\omega \sim u/a$  ist dort mit  $v \sim u$

$$|\partial_t \mathbf{v}| \sim \omega u \sim \frac{u^2}{a}. \quad (2.141)$$

Für kleine Schwingungen,  $a \ll l$ , folgt

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll |\partial_t \mathbf{v}| \quad (2.142)$$

$$\Rightarrow \partial_t \mathbf{v} \simeq -\nabla w, \quad (2.143)$$

d. h., der konvektive Teil wird vernachlässigt.

Bilden wir die Rotation von (2.143), so folgt

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.144)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.145)$$

Da der zeitliche Mittelwert von  $\mathbf{v}$  verschwindet,  $\langle \mathbf{v} \rangle_t = 0$ , gilt

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (2.146)$$

Die Strömung einer Flüssigkeit, die kleine Schwingungen ausführt, ist also in erster Näherung eine *Potenzialströmung*.

Eigenschaften von Potenzialströmungen sind:

- a) Die Zirkulation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist 0:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \underbrace{=} \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (2.147)$$

Es existieren also keine geschlossenen Stromlinien in einer Potenzialströmung, denn die Richtung der Stromlinie stimmt mit der Richtung der Geschwindigkeit überein, und die Zirkulation längs einer geschlossenen Linie wäre  $\neq 0$ .

- b) Wegen  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  kann bei *Potenzialströmungen*  $\mathbf{v}$  als Gradient eines Skalars – des Geschwindigkeitspotenzials  $\Phi$  – dargestellt werden:

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi, \quad (2.148)$$

so dass die Euler-Gleichungen für die Geschwindigkeit

$$-\partial_t \mathbf{v} + \frac{\nabla \mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla w \quad (2.149)$$

sich mit dem Geschwindigkeitspotenzial als *Potenzialgleichung* schreiben lässt:

$$\nabla \left( \partial_t \Phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w \right) = 0. \quad (2.150)$$

Also muss gelten, dass

$$\partial_t \Phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w = f(t) \quad (2.151)$$

mit einer beliebigen Zeitfunktion  $f(t)$ ; mit  $w = p/\rho$  verknüpft diese Gleichung Geschwindigkeit und Druck.

Für eine *stationäre Strömung* ist  $\Phi$  zeitunabhängig,

$$\partial_t \Phi = 0, \quad (2.152)$$

und also bleibt

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + w = \text{const}, \quad (2.153)$$

worin wir die Bernoulli'sche Gleichung wiedererkennen, die für stationäre Strömungen offenbar direkt folgt.

Man beachte, dass für eine Potenzialströmung die Konstante in der Bernoulli'schen Gleichung im *gesamten Fluidvolumen* konstant ist, in einer beliebigen Strömung jedoch nur längs einer einzelnen Stromlinie.

## 2.9 Inkompressible Fluide

Ein Fluid ist inkompressibel für

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1, \quad (2.154)$$

also wenn keine merkliche Kompression oder Ausdehnung während der Bewegung stattfindet.

Für das Vorliegen von *Inkompressibilität* ist erforderlich, dass die Abschätzung der Dichteänderung  $\delta\rho$  bei einer adiabatischen Druckänderung  $\delta p$  möglich ist als

$$\delta\rho = \partial_\rho \rho|_{s=\text{const}} \delta p. \quad (2.155)$$

Nach Bernoulli sind die Druckschwankungen in einer stationär strömenden Flüssigkeit von der Größenordnung

$$\delta p \sim \rho v^2. \quad (2.156)$$

Ferner ist mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  im Fluid

$$\partial_\rho p|_s = c^2 \quad (2.157)$$

$$\Rightarrow \delta\rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2} \quad (2.158)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \quad (2.159)$$

und also

$$v \ll c. \quad (2.160)$$

Dies ist eine notwendige Bedingung für Inkompressibilität. Für eine *stationäre* Strömung ist sie auch hinreichend. Für *nicht stationäre* Strömungen muss eine weitere Bedingung erfüllt sein: die Zeit  $s/c$ , in der ein Schallsignal die Entfernung  $s$  zurücklegt, muss klein sein gegenüber der Zeit  $\tau$ , in der sich die Strömung merklich ändert – dann lässt sich die Ausbreitung von Wechselwirkungen in der Flüssigkeit als momentaner Prozess beschreiben:

$$\frac{s}{c} \ll \tau. \quad (2.161)$$

Zur Herleitung gehe man aus von den Euler-Gleichungen (2.24) ohne Konvektionsterm,

$$|\partial_t \mathbf{v}| = \left| \frac{\nabla p}{\rho} \right|, \quad (2.162)$$

woraus man ableitet, dass

$$\frac{v}{\tau} \sim \frac{\delta p}{s\rho} \quad (2.163)$$

$$\Rightarrow \delta p \sim \frac{s}{\tau} \rho v . \quad (2.164)$$

Die zugehörige Änderung von  $\rho$  mit  $\delta\rho \sim \delta p/c^2$  ist

$$\delta\rho \sim \frac{s\rho v}{\tau c^2} . \quad (2.165)$$

Nun vergleiche man in der Kontinuitätsgleichung (2.10)  $\partial_t \rho$  mit  $\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$ ; es zeigt sich, dass  $\partial_t \rho$  vernachlässigbar ist, da  $\rho \sim \text{const}$  für  $\delta\rho/\tau \ll \rho v/s$  oder  $\delta\rho/\rho \sim sv/(\tau c^2) \ll \tau v/s$ . Dies ist der Fall für  $\tau \gg s/c$ .

Für  $\rho \simeq \text{const}$  ändern die Euler'schen Gleichungen ihre Gestalt nicht; man kann jedoch  $\rho$  in den Gradienten ziehen:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g} . \quad (2.166)$$

Die *Kontinuitätsgleichung* wird für  $\rho = \text{const}$  zu

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (2.167)$$

Da die Dichte bekannt (konstant) ist, wählt man als System von Grundgleichungen am besten solche, die nur Geschwindigkeiten enthalten, also die *isentropen Euler-Gleichungen* (2.37),

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] . \quad (2.168)$$

Da in den Euler-Gleichungen  $\nabla(p/\rho)$  statt  $\nabla w$  steht, lässt sich die Bernoulli-Gleichung angeben in der Form

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} , \quad (2.169)$$

und die Energiestromdichte wird zu

$$\rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) = \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) . \quad (2.170)$$

Für die *Potenzialströmung* eines inkompressiblen Fluids werden die Gleichungen besonders einfach: Mit  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  sind die Euler-Gleichungen (2.37) identisch erfüllt. Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  wird mit

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi \quad (2.171)$$

zur *Laplace-Gleichung* für das Geschwindigkeitspotenzial<sup>8</sup>  $\Phi$ ,

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2.172)$$

Die *Randbedingungen* am Kontaktflächenrand des Fluids sind

1. für eine feste Wand:  $v_{\perp} = 0$ ;
2. für eine bewegliche Wand:  $v_{\perp} =$  Projektion der Wandgeschwindigkeit auf die Normalenrichtung;

und es ist

$$v_{\perp} = \partial_{e_{\perp}}\Phi \quad (2.173)$$

eine vorgegebene Funktion der Koordinaten und der Zeit, wobei  $e_{\perp}$  die Normalenrichtung angibt. Die Randbedingungen hängen also nur von der Richtung des Geschwindigkeitsvektors ab.

Wegen der Bernoulli-Gleichung (2.51),

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (2.174)$$

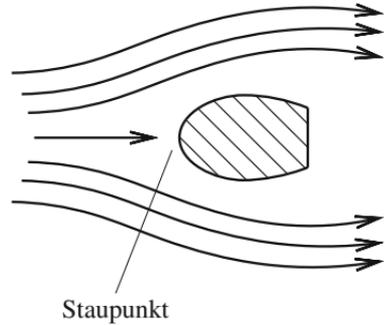
ist der *Druck* bei einer stationären Strömung eines inkompressiblen Fluids ohne Schwerfeld dort am größten, wo die Geschwindigkeit verschwindet. Dieser Punkt heißt *Staupunkt* (Abb. 2.20). Sei  $\mathbf{u}$  die Geschwindigkeit,  $p_0$  der Druck des Fluids im Unendlichen. Dann folgt für den Druck im Staupunkt:

$$p_{\max} = p_0 + \rho \frac{u^2}{2}. \quad (2.175)$$

---

<sup>8</sup> Auch diese Gleichung hatte Leonhard Euler als Erster eingeführt; sie enthält die Zeit nicht explizit, sondern nur über die Randbedingungen.

**Abb. 2.20** Staupunkt in stationärer Strömung



## 2.10 Stromfunktion

Bei *zweidimensionaler (ebener)* Strömung (d. h.,  $\mathbf{v}$  hängt nur von zwei Koordinaten ab) können die Geschwindigkeitskomponenten als Ableitung einer *Stromfunktion*  $\psi(x, y)$  geschrieben werden:

$$v_x = -\partial_y \psi, \quad v_y = +\partial_x \psi, \quad (2.176)$$

so dass die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (2.177)$$

Die Gleichung für die *Stromfunktion*  $\psi$  folgt durch Einsetzen in die Euler-Gleichungen für die Geschwindigkeit (2.37),

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]. \quad (2.178)$$

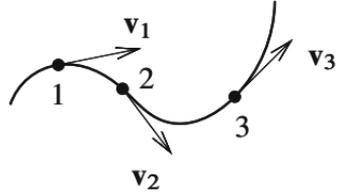
Die Rotation der Geschwindigkeit im Dreidimensionalen ist

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{e}}_x \partial_z v_y + \hat{\mathbf{e}}_y \partial_z v_x + \hat{\mathbf{e}}_z (\partial_x v_y - \partial_y v_x). \quad (2.179)$$

Im Zweidimensionalen, d. h., ohne Veränderungen in  $z$ -Richtung, reduziert sie sich zu

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_z \Delta \psi, \quad (2.180)$$

**Abb. 2.21** Tangenten an einer Stromlinie



wobei der Laplace-Operator  $\Delta$  definiert ist als

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (2.181)$$

Für die Zeitableitung von  $\Delta\psi$  gilt

$$\partial_t \Delta\psi = -(\partial_x \psi) \partial_y \Delta\psi + (\partial_y \psi) \partial_x \Delta\psi. \quad (2.182)$$

Aus der Stromfunktion lässt sich die Form der Stromlinien für eine stationäre Strömung unmittelbar bestimmen. Dazu stellt man die Differenzialgleichung für die Stromlinien bei ebener Strömung ( $v_z = 0$ ) auf:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (2.183)$$

$$\Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0, \quad (2.184)$$

d. h., die Richtung der Tangente an eine Stromlinie (Abb. 2.21) stimmt in jedem Punkt mit der Richtung der Stromlinie überein. Setzt man nun  $v_x(\psi)$  und  $v_y(\psi)$  ein, so erhält man

$$\partial_x \psi dx + \partial_y \psi dy = d\psi = 0 \quad (2.185)$$

$$\Rightarrow \psi = \text{const} : \quad (2.186)$$

Die Stromlinien bilden eine Kurvenschar, die man erhält, wenn man die Stromfunktion  $\psi(x, y)$  gleich einer beliebigen Konstanten setzt.

Mit  $v_{\perp}$ , der Projektion von  $\mathbf{v}$  auf die Normale der Kurve in einem gegebenen Punkt, ist der Flüssigkeitsstrom

$$Q = \rho \int_1^2 v_{\perp} dl = \rho \int_1^2 (-v_y dx + v_x dy) \quad (2.187)$$

$$= \rho \int_1^2 d\psi . \quad (2.188)$$

In der  $x$ - $y$ -Ebene ist der Flüssigkeitsstrom  $Q$  durch eine Kurve zwischen zwei Punkten also unabhängig von der Form der Kurve durch die Differenz der Werte der Stromfunktion in diesen Punkten bestimmt:

$$Q = \rho (\psi_2 - \psi_1) . \quad (2.189)$$

Die *Funktionentheorie* liefert leistungsfähige Methoden zur Berechnung der Potenzialströmung um verschiedenartige Profile. Die Grundlagen dieser Anwendungen sollen im Folgenden kurz erläutert werden:

Das *Potenzial* und die *Stromfunktion* hängen mit den Geschwindigkeitskomponenten zusammen über

$$v_x = -\partial_x \phi = -\partial_y \psi, \quad v_y = -\partial_y \phi = +\partial_x \psi , \quad (2.190)$$

woraus sich die Beziehungen zwischen den Ableitungen der Funktionen  $\phi$  und  $\psi$  ergeben,

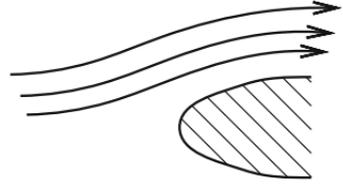
$$\partial_x \phi = \partial_y \psi, \quad \partial_y \phi = -\partial_x \psi , \quad (2.191)$$

die mit den *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen* übereinstimmen. Sie sind Bedingung dafür, dass das *komplexe Potenzial*

$$w = \phi + i \psi , \quad (2.192)$$

das sich aus dem Geschwindigkeitspotenzial (im Realteil) und der Stromfunktion (im Imaginärteil) zusammensetzt, eine analytische Funktion des komplexen Arguments  $z = x + iy$  ist, bzw. dass  $w(z)$  in jedem

**Abb. 2.22** Stromlinien an Kontur



Punkt  $z$  differenzierbar ist als

$$\frac{dw}{dz} = \partial_x \phi + i \partial_x \psi = v_x - i v_y \quad (2.193)$$

$$= \text{komplexe Geschwindigkeit} \quad (2.194)$$

mit dem *Betrag*

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v. \quad (2.195)$$

Das *Argument* der komplexen Geschwindigkeit  $w' \equiv dw/dz$  ist der Winkel  $\vartheta$  zwischen der Geschwindigkeit und der x-Richtung,

$$w' = \frac{dw}{dz} = v e^{-i\vartheta}. \quad (2.196)$$

An der Oberfläche einer umströmten festen Kontur muss die Geschwindigkeit tangential gerichtet sein. Die Kontur muss mit einer Stromlinie übereinstimmen (Abb. 2.22), und auf ihr muss  $\psi = \text{const}$  sein; die Konstante kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit null gesetzt werden. Für eine vorgegebene Kontur wird das Strömungsproblem so auf die *Bestimmung einer analytischen Funktion*  $w(z)$  zurückgeführt, die auf dieser Kontur reelle Werte annimmt.

Nach den Resultaten der Funktionentheorie ist das Integral über eine analytische Funktion längs eines (beliebigen) geschlossenen Weges  $C$  gleich der mit  $2\pi i$  multiplizierten Summe der Residuen der einfachen Pole innerhalb von  $C$ :

$$\oint_C \frac{dw}{dz} dz = \oint_C w' dz = 2\pi i \sum_k A_k, \quad (2.197)$$

wobei  $A_k$  die Residuen der komplexen Geschwindigkeit  $w'$  sind.  
Andererseits gilt

$$\oint_C w' dz = \oint_C (v_x - i v_y) (dx + i dy) \quad (2.198)$$

$$= \underbrace{\oint_C (v_x dx + v_y dy)}_{=: \Gamma} + i \oint_C (v_x dy - v_y dx) . \quad (2.199)$$

Der *Realteil* ist die *Zirkulation*  $\Gamma$  längs der Kurve  $C$ . Der *Imaginärteil*  $\rho$  gibt den Flüssigkeitsstrom (2.189) durch die Kurve  $C$  an. Sind innerhalb der Kurve keine Flüssigkeitsquellen, so ist dieser Strom = 0. Also folgt

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k . \quad (2.200)$$

Alle Residuen  $A_k$  sind rein imaginär, so dass die Zirkulation  $\Gamma$  reelle Werte annimmt.

Die Theorie der *analytischen Funktionen* einer *komplexen Variable* entspricht demnach der zweidimensionalen Potenzialtheorie der Hydrodynamik, und die Methoden aus der Funktionentheorie können unmittelbar auf die Lösung zweidimensionaler Strömungsprobleme übertragen werden.

*Eindimensionale* Strömungsprobleme lassen sich in manchen Fällen – ohne Rückgriff auf die Funktionentheorie – exakt lösen, wie das folgende Beispiel einer radialsymmetrischen Strömung zeigt:

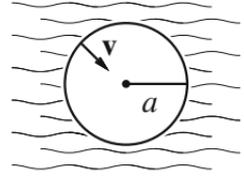
### Beispiel

(Rechnung von Lord Rayleigh, 1917 [3]): Eine inkompressible Flüssigkeit füllt den Raum; ein kugelförmiges Volumen mit Radius  $a$  wird entfernt. Nach welcher Zeit ist der Hohlraum mit Flüssigkeit gefüllt?

Die Strömung in den Hohlraum ist kugelsymmetrisch (Abb. 2.23). Für die *radiale Geschwindigkeit* gilt die Euler'sche Gleichung

$$\partial_t v + v \partial_r v = -\frac{1}{\rho} \partial_r p \quad (2.201)$$

**Abb. 2.23** Hohlraum in inkompressibler Flüssigkeit



mit  $v_r \equiv v < 0$ . Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ist

$$\partial_t \rho = 0 \quad (2.202)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 v_r) = 0, \quad (2.203)$$

was bedeutet, dass  $r^2 v \equiv F(t)$  eine beliebige Funktion der Zeit ist ( $\partial_r v = 0$ ). Das Flüssigkeitsvolumen, das durch eine Kugel mit beliebigem Radius fließt, hängt wegen seiner Inkompressibilität also nicht vom Radius ab.

Wir schreiben mit der Kontinuitätsgleichung also  $\partial_t v = F'(t)/r^2$  und setzen dies in die Euler-Gleichungen ein:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v \partial_r v = -\frac{1}{\rho} \partial_r p. \quad (2.204)$$

Integrieren wir dies über den Radius  $r$  von  $R(t) \leq a$  bis  $\infty$ , wobei  $a$  der Radius des Hohlraumes ist, so erhalten wir

$$-\frac{F'(t)}{R} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad (2.205)$$

mit der Änderungsgeschwindigkeit des Hohlraum-Radius  $V = dR(t)/dt$  und dem Druck  $p_0$  bei  $R \rightarrow \infty$ . (Die Geschwindigkeit des Fluids bei  $R \rightarrow \infty$  und der Druck auf die Oberfläche des Hohlraumes seien  $= 0$ .) Mit  $r^2 v = F(t)$  für Punkte auf der Oberfläche des Hohlraumes gilt

$$R^2(t)V(t) = F(t), \quad (2.206)$$

dessen Ableitung wir schreiben als

$$F'(t) = 2R \underbrace{R'}_{=V} V + R^2 \frac{dV}{dt} = 2RV^2 + R^2 \frac{dV}{dt} \quad (2.207)$$

und in die Euler-Gleichungen einsetzen:

$$\frac{p_0}{\rho} = -\frac{2RV^2}{R} - R \frac{dV}{dt} + \frac{V^2}{2} \quad (2.208)$$

$$= -\frac{3}{2}V^2 - R \frac{dV}{dR} \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=V} \quad (2.209)$$

$$= -\frac{3}{2}V^2 - \frac{R}{2} \frac{dV^2}{dR}. \quad (2.210)$$

Wir separieren die Variablen,

$$V = \frac{dR}{dt} = \overset{(+)}{\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho} \left( \frac{a^3}{R^3} - 1 \right)}} \quad (2.211)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dR}{-\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho} \left( \frac{a^3}{R^3} - 1 \right)}}, \quad (2.212)$$

und integrieren mit der Anfangsbedingung  $V = 0$  für  $R = a$ . Dadurch erhalten wir die Zeit  $\tau$ , in der der Hohlraum gefüllt wird:

$$\tau = \int_0^\tau dt = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}} \quad (2.213)$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0,915 a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}. \quad (2.214)$$

Für  $a = 0,1 \text{ m}$ ,  $p_0 = 1000 \text{ hPa} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$  und  $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  wird

$$\tau \approx 0,915 \cdot 10^{-2} \text{ s} \approx 9 \text{ ms}. \quad (2.215)$$

Man beachte, dass  $\tau$  proportional zu  $a$ ,  $\sqrt{\rho}$  und zu  $1/\sqrt{p_0}$  ist.

## 2.11 Wellen

*Wasserwellen* [4, 5] sind komplizierter als akustische oder optische Wellen: Als *Oberflächenwellen* sind sie an die Grenze zweier Medien gebunden; akustische und optische Wellen sind dagegen *Raumwellen*.

*Wellen* und *Wirbel* unterscheiden sich darin, dass *Wirbel* Materie mit sich forttragen, wohingegen bei *Wellen* alle Flüssigkeitsteilchen im Mittel an ihrem Ort bleiben – es pflanzt sich nicht Materie, sondern *Energie* und *Phase* fort.

Wellen können nach ihrer Symmetrieform eingeteilt werden (Abb. 2.24):

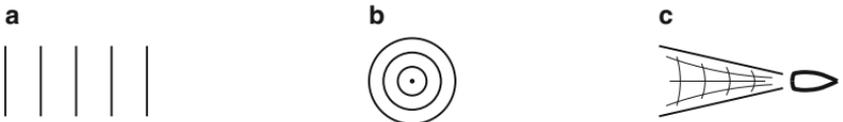
- *Ebene Wellen*, z. B. durch eine Windfront ausgelöst.
- Bei *Ringwellen* nimmt die Amplitude mit der Entfernung ab. Ihre mathematische Beschreibung ist kompliziert (sie erfordert Bessel-Funktionen und Fourier-Integrale).
- *Tiefseewellen* haben Dispersion:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad (2.216)$$

wobei  $v = v(k) = v(\lambda)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ .

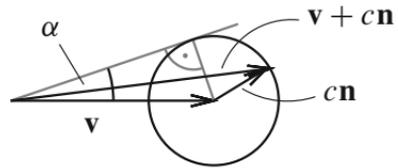
- *Schiffswellen* sind Längswellen, die sich an den Schiffskörper schmiegen; Querwellen durchsetzen sie. Das Gesamtsystem schreitet mit dem Schiff fort, ist also stationär.
- *Mach-Wellen* sind Stoßwellen bei Überschallströmungen mit  $v > c$ . Der *Mach'sche Winkel*  $\alpha$  (Abb. 2.25) ist dabei gegeben durch

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}. \quad (2.217)$$



**Abb. 2.24** Verschiedene Wellenformen: **a** Ebene Wellen, **b** Ringwellen, **c** Schiffswellen

**Abb. 2.25** Mach'scher Winkel  $\alpha$



Die Störung breitet sich in Strömungsrichtung innerhalb eines *Kegels* mit Öffnungswinkel  $2\alpha$  aus.

Zur Beschreibung *ebener Wasserwellen (Oberflächenwellen)* nehmen wir an, dass die Ausbreitung in  $x$ -Richtung erfolgt und die Welle in Tiefenrichtung  $y$  weggedämpft wird. Also kann die Amplitude einer ebenen Welle beschrieben werden als

$$A(x, y, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{-ky}, \quad (2.218)$$

wobei  $k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl,  $\omega = 2\pi/T$  die Kreisfrequenz,  $v = \lambda/T = \omega/k$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und  $A_0$  die maximale Amplitude der Wasserwelle angibt. Es sind demnach *drei Parameter*,  $A$ ,  $\omega$  und  $k$ , zur Beschreibung der Wellenausbreitung erforderlich.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  ist die *Phasengeschwindigkeit* der Welle, d. h., die Phase  $\varphi$  im Exponenten  $e^{i\varphi}$ , schreitet mit der Geschwindigkeit  $v$  fort. Dies wird deutlich, wenn man den veränderlichen Teil der Phase, gegeben durch  $\varphi = kx - \omega t$ , konstant setzt und also den Ort gleicher Phase zu verschiedenen Zeiten betrachtet:

$$k dx - \omega dt = 0. \quad (2.219)$$

Damit folgt direkt die *Phasengeschwindigkeit*

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (2.220)$$

Für *monochromatische Wellen* (Wellen fester Frequenz) ist nur die Phasengeschwindigkeit von Bedeutung. Bei Überlagerung von Wellen verschiedener (vor allem benachbarter) Frequenzen zu einem Wellenpa-

ket oder einer Wellengruppe ist dessen *Gruppengeschwindigkeit*<sup>9</sup>  $u$  im Allgemeinen von  $v$  verschieden:

$$u = \frac{d\omega}{dk} . \quad (2.221)$$

Nur bei *dispersionsloser* Wellenausbreitung (wenn  $v$  unabhängig von  $\lambda$  und  $k$  ist) fallen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zusammen, und eine Wellengruppe kann ohne Formänderung fortschreiten:

$$\omega = vk \quad (2.222)$$

$$\Rightarrow d\omega = vdk \quad (2.223)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v \equiv u . \quad (2.224)$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit ist jedoch

$$d\omega = vdk + kdv \quad (2.225)$$

$$= vdk + k \frac{dv}{dk} dk \quad (2.226)$$

$$\Rightarrow u = v + k \frac{dv}{dk} , \quad (2.227)$$

da  $u = d\omega/dk$ . Außerdem ist  $k = 2\pi/\lambda$  und also  $dk/d\lambda = -2\pi/\lambda^2$ , weshalb

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{dv}{d\lambda} \frac{\lambda^2}{2\pi} \quad (2.228)$$

$$\Rightarrow k \frac{dv}{dk} = -\lambda \frac{dv}{d\lambda} , \quad (2.229)$$

was schließlich den allgemeinen Zusammenhang zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit – ausgedrückt über die Wellenlänge  $\lambda$  –

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (2.230)$$

<sup>9</sup> Die Gruppengeschwindigkeit ist auch in der *Quantenmechanik* eine wichtige physikalische Größe: Nach de Broglie ist  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$  und also  $u = \frac{h}{m\lambda}$ .

ergibt. Der Differenzterm klassifiziert die Dispersion wie folgt:

- *keine* Dispersion:  $\frac{dv}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = v$ ,
- *normale* Dispersion:  $\frac{dv}{d\lambda} > 0 \Rightarrow u < v$   
(Gruppen- < Phasengeschwindigkeit),
- *anomale* Dispersion:  $\frac{dv}{d\lambda} < 0 \Rightarrow u > v$ .

Man findet für *Schwerewellen* in *Tiefwasser*,  $h \gg \lambda$ , dass

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (2.231)$$

wobei

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2\lambda}v \quad (2.232)$$

so dass *normale* Dispersion folgt,

$$u = v - \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}v < 0. \quad (2.233)$$

Im *flachen Wasser*,  $h \ll \lambda$ , findet man

$$v = \sqrt{gh} \quad (2.234)$$

also *keine* Dispersion.

Bei *Schwerewellen* wird die Ausbreitung am besten über die Euler'sche Gleichung mit Geschwindigkeitspotenzial beschrieben,

$$-\partial_t \Phi + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho}(\rho + U) = F(t) \quad (2.235)$$

mit  $\mathbf{v} = -\nabla\Phi$  und einer beliebigen Zeitfunktion  $F(t)$ . Für kleine Amplituden wird das quadratische Glied vernachlässigt. An der freien Oberfläche herrscht Atmosphärendruck ( $p \equiv 0$ ); die einzige Zeitfunktion, die

periodisch fortschreitende Wellen nicht stört, ist aber

$$F(t) \equiv \text{const} \quad (2.236)$$

$$\equiv 1 \quad \text{ohne Beschränkung der Allgemeinheit} \quad (2.237)$$

$$\Rightarrow \partial_t \Phi = \frac{u}{\rho} = -\frac{\rho g y}{\rho} \quad (2.238)$$

$$= -g y . \quad (2.239)$$

Die Welle breitet sich aus wie das Geschwindigkeitspotenzial, woraus sich die Dispersion, der Zusammenhang zwischen  $v$  und  $\lambda$  ergibt.

Wird  $\lambda$  immer kleiner, ist nicht mehr die Schwere, sondern die Oberflächenspannung  $\sigma$  für die Wellenausbreitung maßgebend, so dass sich die Dispersionsverhältnisse komplett ändern. Die Oberfläche ist nicht mehr kräftefrei, sondern einem aus  $\sigma$  hervorgehenden Normaldruck ausgesetzt:

$$-\partial_t \Phi + \frac{p}{\rho} = 0 . \quad (2.240)$$

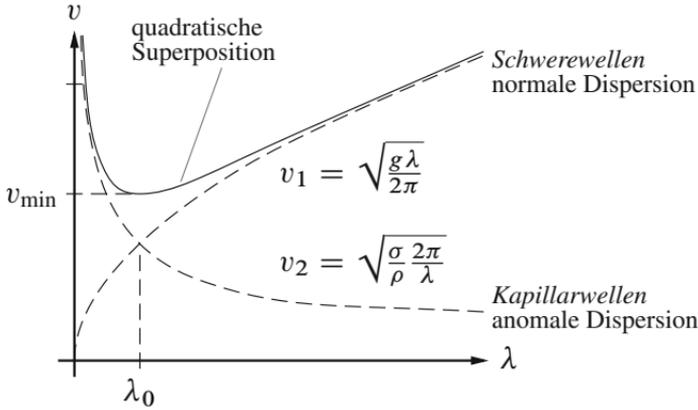
Man findet für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}} , \quad (2.241)$$

d. h., sie wächst mit abnehmendem  $\lambda$ , umgekehrt wie bei Schwerewellen in tiefem Wasser: dies ist *anomale Dispersion* und führt zu *ebenen Kapillarwellen* (Abb. 2.26).

Die Dispersionskurven für Schwere- und Kapillarwellen schneiden sich bei  $\lambda = \lambda_0$ . Es gilt dabei

- für  $\lambda < \lambda_0$ : die vorwärtstreibende Kraft der Kapillarwellen hängt von der Krümmung des Oberflächenprofils ab;
- für  $\lambda > \lambda_0$ : die Kapillarität ist bei großen Wellenlängen unbedeutend.



**Abb. 2.26** Dispersionsverhalten von Kapillar- und Schwerewellen

Der Schnittpunkt errechnet sich durch das Gleichsetzen der beiden Dispersionsrelationen:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda_0}}}_{\text{Kapillarwellen}} = \underbrace{\sqrt{\frac{g\lambda_0}{2\pi}}}_{\text{Schwerewellen}} \quad (2.242)$$

$$\Rightarrow \lambda_0^2 = \frac{\sigma (2\pi)^2}{\rho g} \quad (2.243)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (2.244)$$

Bei quadratischer Superposition,  $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ , finden wir das Minimum bei  $\lambda = \lambda_0$  aus

$$v_1 = v_2 \quad (2.245)$$

$$\Rightarrow v_{\min}^2 = 2v_1^2 = 2v_2^2 = 2\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}} \quad (2.246)$$

$$\Rightarrow v_{\min} = \sqrt{2\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}}. \quad (2.247)$$

**Beispiel**

Am Übergang von Wasser zu Luft ist die Oberflächenspannung  $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = 72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Wenn man durch eine Stimmgabel Kapillarwellen anregt, ist der Schnittpunkt mit  $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 17,02 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,702 \text{ cm} , \quad (2.248)$$

$$v_{\min} = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}} = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \sqrt{72 \cdot 9,81}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2.249)$$

$$\approx 0,231 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 23,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (2.250)$$

$$\equiv \text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen mit } \lambda = \lambda_{\min} . \quad (2.251)$$

Demnach können sich Wellen auf Wasser nicht mit Geschwindigkeiten kleiner als  $v_{\min} \simeq 23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  fortpflanzen. Wellen von größerer *und* kleinerer Wellenlänge als 1,7 cm laufen mit größerer Geschwindigkeit als  $23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ .

Lord Kelvin schlug für Wellen mit  $\lambda < \lambda_0$  den Begriff *Ripples* vor. Manchmal sind die Flanken breiter Schwerewellen von feinen Ripples überdeckt.

**Literatur**

1. Euler, L.: Principes généraux du mouvement des fluides. Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin 11, 274 (1757)
2. Bernoulli, D.: Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii, Straßburg (1738)
3. Rayleigh, Lord: On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Phil. Mag. Series 6 (34:200), 94 (1917)
4. Craik, A. D. D.: The origins of water wave theory. Ann. Rev. Fluid Mech. 36, 1 (2004)
5. Phillips, O. M.: The dynamics of the upper ocean, 2. Aufl., Cambridge University Press (1977)

Bei Strömungen viskoser Fluide untersucht man die Auswirkungen von Prozessen *mit Energiedissipation* auf die Strömung. Aufgrund der inneren Reibung (= Viskosität) und der Wärmeleitfähigkeit wird die Strömung thermodynamisch *irreversibel*.

---

## 3.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Bei viskosen Fluiden bleibt die Kontinuitätsgleichung (2.10) unverändert,

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.1)$$

In den Euler'schen Gleichungen (2.24) müssen jedoch zusätzliche Terme eingeführt werden, die der Energiedissipation Rechnung tragen:

- $\eta$ , der Viskositätskoeffizient;  $\eta > 0$ ,
- $\zeta$ , der Zähigkeitskoeffizient;  $\zeta > 0$ .

Bei isotropen Fluiden genügen diese beiden skalaren Größen; bei anisotropen Fluiden werden die Koeffizienten zu Tensoren.

Die Koeffizienten  $\eta$  (*shear viscosity*) und  $\zeta$  (*bulk viscosity*) sind im Allgemeinen Funktionen von *Druck*  $p$  und *Temperatur*  $T$ , die nicht im ganzen Fluid gleich sein müssen. Meist können  $\eta$  und  $\zeta$  jedoch nähe-

**Tab. 3.1** Typische Werte für die dynamische und die kinematische Viskosität,  $\eta$  und  $\nu$

	$\eta$ [Pa · s]	$\nu$ [ $1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ ]
Luft	$1,8 \cdot 10^{-5}$	1,50
Wasser	0,001	0,10
Quecksilber	0,001 56	0,012
Alkohol	0,0018	0,22
Glycerin	0,85	68

rungsweise konstant gesetzt werden. Die Bewegungsgleichungen<sup>1</sup> werden dann zu den *Navier-Stokes-Gleichungen* [1–3]

$$\underbrace{\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]}_{\text{Euler'scher Anteil}} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) . \quad (3.2)$$

Für inkompressible Fluide verschwindet der letzte Summand wegen  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . Im Falle zäher, aber inkompressibler Fluide reduziert sich demnach (3.2) zu

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} . \quad (3.3)$$

Im Vergleich zu den Euler-Gleichungen gibt es also den *Zusatzterm*

$$\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (3.4)$$

mit der *dynamischen Viskosität*  $\eta$ :  $[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m s}} = \text{Pa s}$ . Das Verhältnis

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3.5)$$

mit  $[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  heißt *kinematische Viskosität*. Werte für verschiedene Substanzen bei Normaldruck finden sich in Tab. 3.1.

<sup>1</sup> Die Gleichungen wurden von Claude-Louis Navier (\*1785 Dijon, †1836 Paris) im Jahr 1822 aufgestellt und von George Gabriel Stokes (\*1819 Skreen, County Sligo, †1903 Cambridge) im Jahr 1845 hergeleitet.

Bei fester Temperatur hängt die dynamische Zähigkeit  $\eta$  von Gasen *nicht* vom Druck ab. Da  $pV = \text{const}$ , folgt für die kinematische Zähigkeit

$$\nu \propto V \propto \frac{1}{p}. \quad (3.6)$$

Wie bei den Euler-Gleichungen lässt sich der Druck aus den Navier-Stokes-Gleichungen eliminieren, indem man die Rotation der Gleichung bildet und die Identitäten (2.35) und (2.36) verwendet:

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) + \underbrace{\nu \Delta (\nabla \times \mathbf{v})}_{=0 \text{ in der Euler-Gleichung}}. \quad (3.7)$$

Mit  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{v}$  ist [4]

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (3.8)$$

wobei

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} = [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v}, \quad (3.9)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (-\mathbf{v} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad \text{wegen} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \text{wegen} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.12)$$

Also lauten die *Navier-Stokes-Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld* mit der kinematischen Zähigkeit  $\nu = \eta/\rho$

$$\partial_t (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{v} - [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = \nu \Delta (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (3.13)$$

Aus einer bekannten *Geschwindigkeitsverteilung* findet man die entsprechende *Druckverteilung*, indem man eine Gleichung vom Poisson'schen Typ löst, die durch die Bildung der *Divergenz* aus den ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichungen folgt (dabei ist stets ein inkompressibles Fluid mit  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  vorausgesetzt):

$$\Delta p = -\rho (\partial_k v_i) (\partial_i v_k) = -\rho \partial_k \partial_i (v_i v_k). \quad (3.14)$$

Wie im viskositätsfreien Fall der Euler-Gleichungen lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung auch durch eine Stromfunktion  $\psi(x, y)$  ausdrücken,

$$v_x = -\partial_y \psi, \quad v_y = +\partial_x \psi, \quad (3.15)$$

so dass die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y = 0; \quad \partial_z v_z = 0. \quad (3.16)$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichung ergibt

$$\partial_t \Delta \psi - (\partial_x \psi) (\partial_y \Delta \psi) + (\partial_y \psi) (\partial_x \Delta \psi) - \nu \Delta \Delta \psi = 0. \quad (3.17)$$

Dazu kommen die *Randbedingungen*: Zwischen der Oberfläche eines festen Körpers und dem zähen Fluid gibt es *molekulare Anziehungskräfte*. Sie halten die innerste Fluidschicht an der Wand fest, so dass die Geschwindigkeit direkt an der Wand (an festen Oberflächen) verschwindet:  $\mathbf{v} = 0$  an festen Oberflächen, d. h., *normale* ( $v_{\perp} = 0$ ) und *tangentiale* ( $v_{\parallel} = 0$ ) Komponenten müssen verschwinden<sup>2</sup>; bei idealen Fluiden war nur  $v_{\perp} = 0$  gefordert.

Bei einer *bewegten* Oberfläche muss  $\mathbf{v}$  am Rand gleich der Geschwindigkeit dieser Oberfläche sein.

---

## 3.2 Energiedissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid

Aus *Viskosität* ergibt sich *Energiedissipation*, d. h. Umwandlung von *Energie* in *Wärme*. Dabei wird jedoch die detaillierte molekulare Struktur des Fluids *nicht* berücksichtigt.

Zur Berechnung der *dissipierten Energie* in einer inkompressiblen Flüssigkeit gehe man aus von der gesamten kinetischen Energie und be-

---

<sup>2</sup> Die Euler-Gleichungen könnten eine Randbedingung  $v_{\perp} = v_{\parallel} = 0$  gar nicht erfüllen, weil die räumlichen Ableitungen dort von *erster* Ordnung sind. In den Navier-Stokes-Gleichungen sind sie wegen des Viskositätsterms von *zweiter* Ordnung.

stimme die Zeitableitung:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV ; \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \partial_t E_{\text{kin}} = \int \partial_t \frac{\rho v^2}{2} dV = \int \rho v_i \partial_t v_i dV . \quad (3.19)$$

Die partiellen Zeitableitungen der Geschwindigkeitsgleichungen werden nun anhand der Navier-Stokes-Gleichung substituiert:

$$\partial_t v_i = -v_k \partial_k v_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p + \underbrace{\frac{1}{\rho} \partial_k \sigma'_{ik}}_{= \frac{\eta}{\rho} \Delta v} \quad (3.20)$$

mit dem *Reibungstensor*

$$\sigma'_{ik} = \eta [\partial_k v_i + \partial_i v_k] \quad \text{bei inkompressiblen Fluiden.} \quad (3.21)$$

Dies ist der Teil des Impulsstromes, der *nicht* mit dem unmittelbaren Transport des Impulses gemeinsam mit der Masse des bewegten Fluids zusammenhängt.

Nach einigen weiteren Umformungsschritten findet man die *totale* zeitliche Veränderung der Energie als

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = -\frac{\eta}{2} \int_V [\partial_k v_i + \partial_i v_k]^2 dV . \quad (3.22)$$

(Beachte die Summenkonvention: über doppelt erscheinende Indizes wird summiert). Dies ist die *Energiedissipation* in einem inkompressiblen Fluid; sie bewirkt eine *Abnahme* der mechanischen Energie:

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} < 0 . \quad (3.23)$$

Das Integral ist wegen des quadratischen Integranden stets positiv; demnach muss der Viskositätskoeffizient  $\eta > 0$  sein;

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} \propto -\eta . \quad (3.24)$$

### 3.3 Hagen-Poiseuille'sches Gesetz

Als *Poiseuille-Strömung* wird die stationäre Strömung einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit durch ein Rohr bezeichnet. Dabei gilt

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1, \quad \rho \approx \text{const}, \quad \partial_t \rho = 0. \quad (3.25)$$

Als Durchflussmenge  $Q$  bezeichnet man die Größe

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr, \quad (3.26)$$

deren anschauliche Bedeutung in Abb. 3.1 skizziert wird. *Voraussetzung* für diese Schreibweise ist, dass keine Querschnittsänderung stattfindet, die Strömung also stationär ist:  $\mathbf{v}$  hängt demnach nur von  $x$  und  $y$  ab, verläuft jedoch in  $z$ -Richtung,

$$\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (3.27)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist also identisch erfüllt:

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (3.28)$$

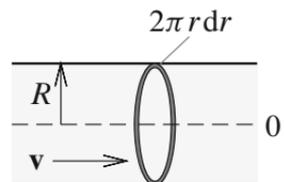
Da die Strömung stationär ist, gilt

$$\partial_t \mathbf{v} = 0, \quad (3.29)$$

und weil  $\mathbf{v} \cdot \nabla = v \partial_z$ , verschwindet auch der konvektive Term, so dass

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad (3.30)$$

**Abb. 3.1** Differenzielle Durchflussmenge



ist, wodurch die Navier-Stokes-Gleichungen sich vereinfachen zu

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = 0 = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (3.31)$$

Mit (3.27) ergibt sich also

$$\Rightarrow \nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3.32)$$

$$= \eta \Delta v \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (3.33)$$

was impliziert, dass der Druck nur von der  $z$ -Koordinate abhängen kann,  $p = p(z)$ . Da die linke Seite der Gleichung eine Funktion von  $z$  ist, die rechte aber nur eine Funktion von  $x$  und  $y$ , können beide Seiten einer Konstanten gleichgesetzt werden,

$$\Delta v = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = \text{const} \quad (3.34)$$

$$\equiv -\frac{1}{\eta} \frac{\delta p}{l} \quad (3.35)$$

mit der Druckdifferenz an den Rohrenden  $\delta p$  (das negative Vorzeichen bedeutet abfallenden Druck) und der Rohrlänge  $l \equiv \delta z$ .

Die Geschwindigkeitsverteilung im Flüssigkeitsstrom wird also durch eine zweidimensionale Gleichung vom Typ

$$\Delta \mathbf{v} = \text{const} \quad (3.36)$$

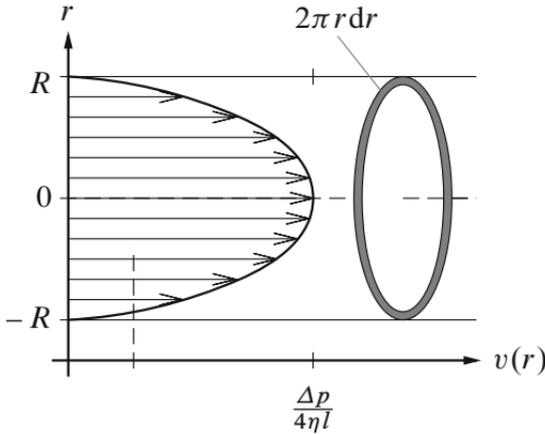
bestimmt. In Polarkoordinaten gilt

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r})| = v(r) \quad (3.37)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\delta p}{\eta l}. \quad (3.38)$$

Durch Integration erhält man

$$v(r) = -\frac{\delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln(r/R) + b. \quad (3.39)$$



**Abb. 3.2** Geschwindigkeitsprofil der Poiseuille-Strömung

Die Geschwindigkeit muss über das ganze Rohr inklusive der Mittelachse ( $r = 0$ ) endlich bleiben; daher muss  $a = 0$  sein. Die Konstante  $b$  lässt sich aus der *Randbedingung*  $\mathbf{v}|_{\partial V} = 0$  bestimmen: es ist

$$v(r) = 0 \quad (3.40)$$

für  $r = \pm R$ , also am Rand einer viskosen Flüssigkeit. Damit folgt, dass

$$v = -\frac{\delta p}{4\eta l} R^2 + b \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\delta p}{4\eta l} R^2 \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{\delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) . \quad (3.43)$$

Dies ist ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil über den Radius des Rohres (s. Abb. 3.2).

Die *Durchflussmenge* ist nun eine Funktion von  $R$ : durch den Kreisring  $2\pi r dr$  tritt pro Sekunde die Flüssigkeitsmenge  $\rho v 2\pi r dr$ . Die Inte-

gration über alle Kreisringe ergibt die Durchflussmenge  $Q$ :

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr . \quad (3.44)$$

Setzt man das Geschwindigkeitsprofil ein, so ergibt sich

$$Q = \frac{2\pi\rho\delta p}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr \quad (3.45)$$

$$= \frac{\pi\rho\delta p}{2\eta l} \left( \frac{1}{2} R^2 R^2 - \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \right) \quad \text{mit } \eta = \nu\rho \quad (3.46)$$

$$= \frac{\pi\delta p}{8\nu l} R^4 \quad (3.47)$$

unabhängig von der Dichte  $\rho$  des Fluid, bzw.

$$Q = \frac{\pi\delta p\rho}{8\eta l} R^4 \quad (3.48)$$

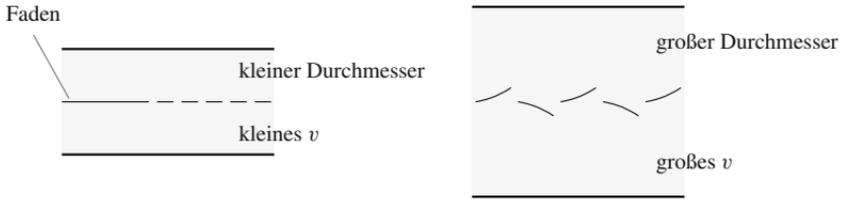
mit der dynamischen Viskosität  $\eta$ . Dies ist das *Hagen-Poiseuille'sche Gesetz*<sup>3</sup>.

### 3.4 Reynolds'sche Zahl; Turbulenzkriterium

Zwar sind die Navier-Stokes-Gleichungen,

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (3.49)$$

<sup>3</sup> Das Gesetz haben Gotthilf H. L. Hagen (\*1797 Königsberg, †1884 Berlin) und Jean L. M. Poiseuille (\*1797 Paris, †1869 Paris) in den Jahren 1839 bzw. 1840 empirisch gefunden ( $Q \propto R^4$ ). Die hier dargestellte Herleitung hat 1845 George G. Stokes gegeben.



**Abb. 3.3** Faden in laminarer und turbulenter Strömung

und die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{bei kompressiblen Fluiden,} \quad (3.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{bei inkompressiblen Fluiden} \quad (3.51)$$

grundlegend für die Darstellung aller Flüssigkeitserscheinungen. Jedoch ist die Frage der *Stabilität einer Strömung*, d. h. das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* (chaotische) Strömung, auf dieser Grundlage noch nicht vollständig beschrieben.

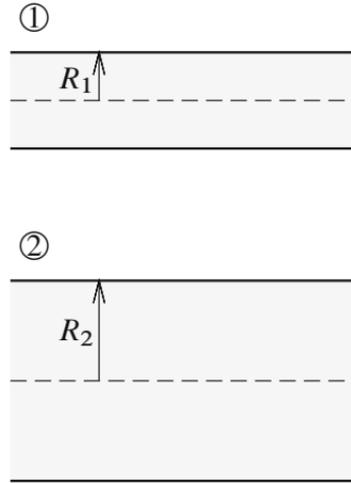
Ein wichtiges Stabilitätskriterium liefert die *Reynolds'sche Zahl*  $Re$ . Sie ist ein Maß für die Stärke der *Konvektion* relativ zur *Viskosität*; das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* Strömung wird durch einen kritischen Wert der Reynolds'schen Zahl gekennzeichnet. Sie hat beispielsweise bei Rohrströmungen (Pouiseuille-Strömungen; s. Abschn. 3.3) einen bestimmten Wert, der *nicht* vom Durchmesser des Rohres abhängt.

Der englische Physiker Osborne Reynolds untersuchte im 19. Jahrhundert Strömungen verschiedener Geschwindigkeiten durch Glasröhren verschiedenen Durchmessers. Er beobachtete insbesondere die Bedingungen für das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* Strömung (Abb. 3.3).

Bei regelmäßig geschichteter, *laminarer* Strömung (wie bei Hagen-Poiseuille) bewegt sich ein farbiger Faden parallel zur Röhrenachse. Unregelmäßige Schlingelbewegungen und Seitenbewegungen des Fadens, welche die ganze Röhre ausfüllen, sind dagegen Anzeichen für *turbulente Strömung*.

Reynolds betrachtete diese Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt eines *Ähnlichkeitsgesetzes*, also als Vergleich zweier Anordnungen, die

**Abb. 3.4** Strömung in zwei verschiedenen Skalen



sich nur in den Maßeinheiten (*Skalen*) unterscheiden; hier: zwei Röhren mit unterschiedlichen Radien  $R_1$ ,  $R_2$ . Wie ändern sich nun die Navier-Stokes-Gleichungen beim Übergang von System ① zu System ② (Abb. 3.4)?

Ist  $\alpha$  die Skala für die Änderung aller *Längeneinheiten*, so gilt

$$R_2 = \alpha R_1, \quad x_2 = \alpha x_1, \quad y_2 = \alpha y_1, \quad z_2 = \alpha z_1 \quad (3.52)$$

für zwei korrespondierende Punkte in den Röhren. Für die mittleren *Geschwindigkeiten* in den Punkten ① und ② gilt:

$$v_2 = \beta v_1. \quad (3.53)$$

Wegen  $[v] = \text{m/s}$  legt  $\alpha/\beta$  die Änderung der *Zeiteinheit* fest:

$$t_2 = \frac{\alpha}{\beta} t_1. \quad (3.54)$$

Die Röhren können mit Fluiden verschiedener *Dichte* und *Viskosität* gefüllt sein:

$$\rho_2 = \gamma \rho_1. \quad (3.55)$$

Wegen  $[\rho] = \text{kg}/\text{m}^3$  legt  $\gamma^3\alpha$  die Änderung der *Masseneinheit* fest,

$$m_2 = \gamma\alpha^3 m_1. \quad (3.56)$$

Mit der *kinematischen Zähigkeit*  $\nu = \eta/\rho$ ,

$$\nu_2 = \delta\nu_1, \quad (3.57)$$

sowie den *Drücken* in korrespondierenden Querschnitten,

$$p_2 = \epsilon p_1 \quad (\epsilon \text{ lässt sich auch durch } \alpha, \beta, \gamma \text{ ausdrücken}), \quad (3.58)$$

transformieren die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (3.59)$$

beim Übergang ①  $\rightarrow$  ② folgendermaßen:

1. Der Beschleunigungsterm ändert sich beim Übergang wegen  $R_2 = \alpha R_1$ ,  $v_2 = \beta v_1$  um  $\beta^2/\alpha$ .
2. Der Zähigkeitsterm ändert sich wegen  $\nu_2 = \beta\nu_1$ ,  $\nu_2 = \delta\nu_1$  um  $\delta\beta/\alpha^2$ .
3. Der Druckterm wird durch  $R_2 = \alpha R_1$ ,  $\rho_2 = \gamma\rho_1$ ,  $p_2 = \epsilon p_1$  geändert um  $\epsilon/(\gamma\alpha)$ .

Sollen die Navier-Stokes-Gleichungen für beide Anordnungen ① und ② erfüllt sein, so muss das Verhältnis dieser drei Faktoren = 1 sein:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} : \delta \frac{\beta}{\alpha^2} : \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon}{\alpha} = 1 : 1 : 1 \quad (3.60)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta\alpha}{\gamma} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\epsilon}{\gamma\beta^2} = 1. \quad (3.61)$$

Daraus folgen die Verhältnisgleichungen

$$\frac{v_1 R_1}{\nu_1} = \frac{v_2 R_2}{\nu_2} \quad (3.62)$$

und

$$\frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 v_2^2}, \quad (3.63)$$

die das Ergebnis der Reynolds'schen Ähnlichkeitstheorie<sup>4</sup> sind. In der Literatur wird meist nur Gleichung (3.62) als *Reynolds'sches Kriterium* bezeichnet, obwohl auch Gleichung (3.63) für ein hinreichendes Kriterium erforderlich ist.

Aus der Verhältnisbetrachtung folgt: Ist ① laminar, so auch ②; ist ① turbulent, so auch ②. Die dadurch definierte dimensionslose Zahl ist die *Reynolds'sche Zahl*

$$Re = \frac{vR}{\nu} \equiv \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{\text{Konvektion}}{\text{Viskosität}} \quad (3.64)$$

$$\sim \frac{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\eta \Delta \mathbf{v}}, \quad (3.65)$$

wobei R – je nach Versuchsanordnung – eine räumliche Abmessung ist (nicht notwendigerweise ein Radius).

Die durch die zweite Bedingung definierte Zahl ist

$$s = \frac{p}{\rho v^2}. \quad (3.66)$$

Das Umschlagen von *laminarer* in *turbulente* Strömung ist ein für beide Röhren ① und ② *ähnlicher* Vorgang, der durch denselben Zahlenwert von Re gekennzeichnet wird, die *kritische Reynolds'sche Zahl* ( $R \rightarrow l$ ):

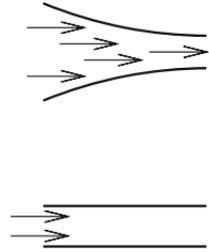
$$Re_{\text{krit}} = \left( \frac{\rho v l}{\eta} \right)_{\text{krit}}. \quad (3.67)$$

Für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes  $Re_{\text{krit}}$ , es ist keine universelle Größe.

Der Wert von  $Re$  hängt auch von der Art des Zuflusses zum Rohr ab (Abb. 3.5). Bei *trompetenförmigem Einlauf* ist die Strömung anfangs

<sup>4</sup> Entwickelt von Osbourne Reynolds (\*1842 Belfast, †1912 Watchet) im Jahr 1883.

**Abb. 3.5** Trompetenförmiger und scharfer Einlauf



*laminar* und bleibt es bei großem  $Re$ . Bei scharfem Einlauf ist die Anfangsströmung durch Seitenkomponenten gestört, und der Umschlag zur *Turbulenz* findet bei relativ niedrigem  $Re$  statt. Im Glasrohr:

$$Re_{\text{krit}} \approx 1200, \text{ unregelmäßiger Einlauf,} \quad (3.68)$$

$$Re_{\text{krit}} \approx 20\,000, \text{ gut abgerundeter Einlauf.} \quad (3.69)$$

Die kritische Reynolds-Zahl ist also nur bei Strömungen mit ähnlichen Anfangsbedingungen konstant.

Wie kommt nun der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung zustande? Bisher scheint die Hagen-Poiseuille-Strömung stets eine mögliche Strömungsform zu sein – aber für  $Re > Re_{\text{krit}}$  ist sie nicht mehr stabil.

- Die *Viskosität* wirkt auf die Beruhigung von Seitenbewegungen hin und begünstigt *laminares* Verhalten.
- Die *Trägheit* verlangt die Erhaltung der Seitenkomponenten, wirkt also zugunsten der *Turbulenz*.

Dies zeigt sich in  $\nu = \eta/\rho$ : größeres  $\eta$  erfordert größeres  $\nu l$ , um dieselbe Reynolds-Zahl zu erreichen, was für eine *laminare* Strömung spricht. Vergrößert sich  $\rho$ , so müsste  $\nu l$  zum Ausgleich kleiner werden; dadurch werden *turbulente* Strömungen begünstigt.

Die *Stabilität* der laminaren Strömung lässt sich steigern, indem man Seitenbewegungen beim Einlauf durch Abrundung verhindert.

### 3.5 Strömungen mit kleinem $Re$ : Stokes'sche Formel

Für  $Re \ll 1$  vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen stark. Bei stationärer Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}. \quad (3.70)$$

Die Reynolds-Zahl gibt im Wesentlichen das Verhältnis von konvektivem und dissipativem Anteil an:

$$\frac{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\eta \Delta \mathbf{v}} \sim Re, \quad (3.71)$$

so dass für  $Re \ll 1$  der konvektive Anteil vernachlässigbar ist und die Bewegungsgleichung linear wird (daraus hatten wir die Poiseuille-Strömung berechnet),

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad (3.72)$$

und mit der Kontinuitätsgleichung die Strömung vollständig bestimmt ist,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Durch Bildung der Rotation folgt

$$\Delta(\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (3.73)$$

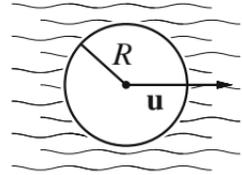
Daraus leitete George Gabriel Stokes 1851 seine Formel für die Widerstandskraft auf eine bewegte Kugel mit Radius  $R$  in einer viskosen Flüssigkeit ab. (Die Ableitung wird hier jedoch ausgelassen.)

Die *Stokes'sche Formel* für die Widerstandskraft auf eine langsam im Fluid bewegte Kugel (Strömungswiderstand) lautet

$$\mathbf{F} = -6\pi R \eta \mathbf{u}, \quad (3.74)$$

wobei  $\mathbf{u}$  die Geschwindigkeit der Kugel angibt und  $F \propto R, \eta, u$  sowie  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{u}$  (Abb. 3.6). Für Körper anderer Form stimmt die *Richtung* der Widerstandskraft im Allgemeinen *nicht* mit derjenigen der Geschwindigkeit überein; der Widerstand hängt aber auch von  $u$  und den Abmessungen ab.

**Abb. 3.6** Im Fluid bewegte Kugel



Die *Stokes'sche Lösung* des Strömungsproblems ist *äquivalent* zur Umströmung einer festen Kugel in einem Flüssigkeitsstrom, der im Unendlichen die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  hat; für das  $\mathbf{v}$ -Feld in der Nähe der Kugel gilt dann die Stokes'sche Lösung (Abb. 3.7).

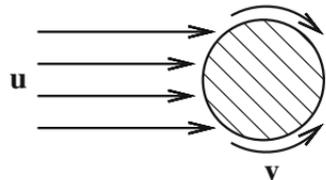
Für genügend große Entfernungen von der Kugel ist die Stokes'sche Lösung jedoch *nicht* anwendbar trotz  $Re \ll 1$ . Dort wird  $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$ ; das Konvektionsglied  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  muss berücksichtigt werden. Eine Näherungslösung gelang C.W. Oseen<sup>5</sup>: die *Oseen'sche Gleichung* als Verbesserung der Stokes'schen Formel für große Entfernungen von der Kugel  $r \gg R$ , indem er das Konvektionsglied in der Form  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rightarrow (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  linearisierte, so dass

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.75)$$

Mit der erhaltenen Geschwindigkeitsverteilung  $\mathbf{v}(\mathbf{u})$  folgt eine genauere Formel für den Strömungswiderstand (gegen  $\mathbf{u}$ ). Als nächstes Glied der Entwicklung des Widerstandes nach der Reynolds-Zahl  $Re = ul/\nu$  erhält man [5]

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta\mathbf{u}R \left( 1 + \frac{3Re}{8} \right) \quad (3.76)$$

**Abb. 3.7** Umströmung einer festen Kugel



<sup>5</sup> Carl Wilhelm Oseen (\*1879 Lund, †1944 Uppsala) war Direktor des Nobel-Instituts in Stockholm. Er fand die nach ihm benannte Gleichung im Jahr 1910.

Für kleine Entfernungen  $l \sim R$  ergibt dies nur eine sehr geringfügige Verbesserung der Stokes'schen Formel, aber für  $l \gg R$  wird der Unterschied merklich.

### 3.6 Laminarer Nachlauf

Die Strömung einer zähen Flüssigkeit um einen festen Körper wird in großen Entfernungen hinter dem Körper unabhängig von seiner Gestalt.

Für große Entfernungen hinter dem Körper ist  $\mathbf{v}$  nur im schmalen Band des *laminaren Nachlaufs* von 0 verschieden (Abb. 3.8). Außer im Nachlauf kann die Strömung überall als Potenzialströmung angesehen werden,  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  (wie bei einer idealen Flüssigkeit), da der Einfluss von  $\eta$  auf Stromlinien, die in genügend großer Entfernung am Körper vorbeigehen, unbedeutend ist: die Viskosität  $\eta$  wirkt nur am *umströmten Körper* und *im Nachlauf*.

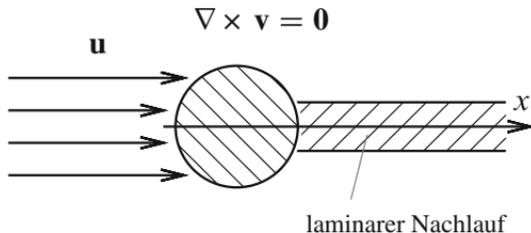
Es stellt sich die Frage, wie die Strömung im Nachlauf mit den Kräften auf den umströmten Körper zusammenhängt. Dazu verwenden wir die Navier-Stokes-Gleichungen für stationäre Strömungen in Oseen'scher Näherung (3.75),

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.77)$$

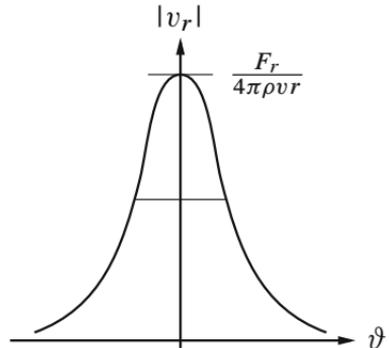
Die Lösung *im Nachlauf* ergibt in Kugelkoordinaten in genügend großer Entfernung  $r \gg R$  vom Körper (Abb. 3.9)

$$v_r(\vartheta) = -\frac{F_r}{4\pi\rho\nu r} \exp\left[-\frac{ur\vartheta^2}{4\nu}\right]. \quad (3.78)$$

**Abb. 3.8** Laminarer Nachlauf in einer Potenzialströmung



**Abb. 3.9** Geschwindigkeitsprofil im laminaren Nachlauf



Das Ergebnis ist *negativ*, denn die Strömung ist im Nachlauf langsamer als in Abwesenheit des Körpers (die wahre Strömungsgeschwindigkeit ist  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ).

Außerhalb des Nachlaufs ist die Strömung eine reine *Potenzialströmung*; das Potenzial  $\Phi$  ergibt sich durch Lösen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla\Phi \quad (3.79)$$

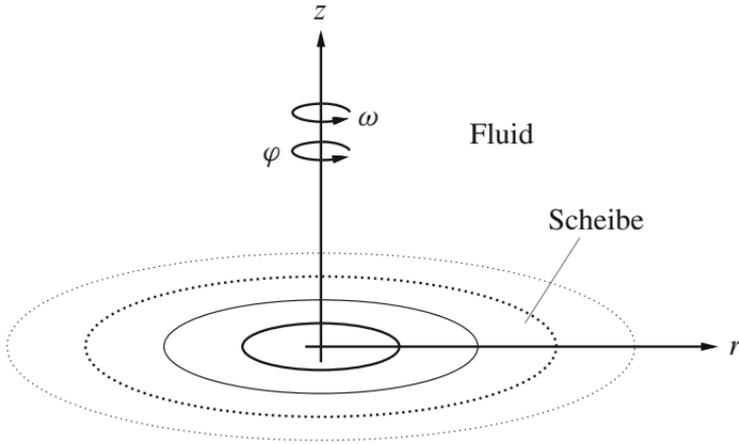
für das Geschwindigkeitspotenzial,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho\nu r} \left[ -F_x + F_y \cos\varphi \cot\frac{\vartheta}{2} \right], \quad (3.80)$$

d. h.,  $\Phi \propto 1/r$ ,  $v \propto 1/r^2$ .

Sofern kein Auftrieb (Gravitationsfeld) vorhanden ist, bleibt die Strömung außerhalb des Nachlaufs axialsymmetrisch.

*Exakte Lösungen* der Kontinuitäts- und der Navier-Stokes-Gleichungen sind nur in wenigen Fällen möglich. Damit sie physikalisch interessant sind, müssen sie die Gleichungen erfüllen *und stabil* sein: wachsen kleine Störungen zeitlich an, wird die Strömung instabil, es entsteht *Turbulenz*.



**Abb. 3.10** Rotierende Scheibe

### Beispiel

Eine der bekannten stabilen Lösungen ist die *rotierende Scheibe*<sup>6</sup>. Eine ins Unendliche ausgedehnte Scheibe rotiert in einer viskosen Flüssigkeit gleichförmig um die  $z$ -Achse und versetzt die Flüssigkeit in Bewegung (Abb. 3.10). Die Strömung des Fluids kann in Zylinderkoordinaten berechnet werden [6]. Dafür werden die folgenden Randbedingungen benötigt:

$$z = 0: \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = \omega r, \quad v_z = 0, \quad (3.81)$$

$$z = \infty: \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = \text{const.} \quad (3.82)$$

Die Konstante für  $v_z|_{z=\infty}$  wird aus den Bewegungsgleichungen bestimmt.

Das Fluid strebt radial von der Rotationsachse weg, insbesondere in der Nähe der Scheibe. Zur Sicherung der Kontinuität (der Massenerhaltung) in der Flüssigkeit muss deshalb ein konstanter vertikaler Strom aus dem Unendlichen zur Scheibe hin existieren.

<sup>6</sup> Theodore von Kármán (\*1881 Budapest, †1963 Aachen) entwickelte diese Lösung 1921.

Man sucht Lösungen der Bewegungsgleichung in der Form

$$v_r = r\omega F(z_1), \quad v_\varphi = r\omega G(z_1), \quad v_z = \sqrt{\nu\omega} H(z_1) \quad (3.83)$$

$$p = -\rho\nu\omega P(z_1) \quad \text{mit } z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} z. \quad (3.84)$$

Die *radiale* und die  $\varphi$ -Komponente der Geschwindigkeit sind proportional zum Abstand  $r$  von der Drehachse der Scheibe, während die vertikale Geschwindigkeit  $v_z$  in jeder horizontalen Ebene konstant ist. Einsetzen in die *Navier-Stokes-Gleichungen* ergibt:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (3.85)$$

$$\Rightarrow F^2 - G^2 + F'H = F'' \quad (3.86)$$

$$2FG + G'H = G'' \quad (3.87)$$

$$HH' = P' + H'', \quad (3.88)$$

wobei

$$' \equiv \frac{d}{dz_1} \quad (3.89)$$

und

$$\partial_z z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (3.90)$$

Die *Kontinuitätsgleichung*  $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})$  in Polarkoordinaten ergibt

$$0 = \frac{1}{r} \partial_r (rv_r) + \frac{1}{r} \partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z \quad (3.91)$$

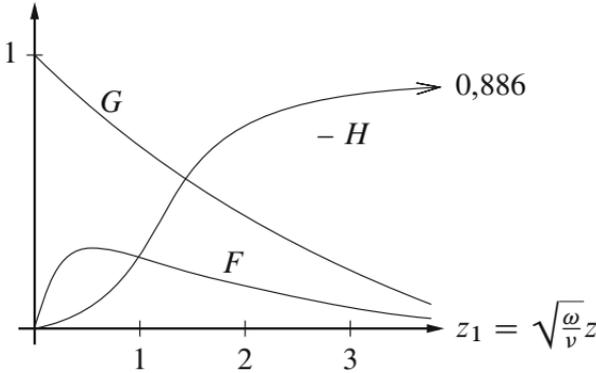
$$= 2\omega F + \sqrt{\nu\omega} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} H' \quad (3.92)$$

$$= 2\omega F + \omega H'. \quad (3.93)$$

Die *Randbedingungen* werden zu

$$z_1 = 0: \quad F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0, \quad (3.94)$$

$$z_1 = \infty: \quad F = 0, \quad G = 0. \quad (3.95)$$



**Abb. 3.11** Lösung des Gleichungssystems für die rotierende Scheibe

Das Problem ist also darstellbar durch ein System vier gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen, die numerisch gelöst werden kann.

Die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes aus dem Unendlichen zur Scheibe hin ist (Abb. 3.11)

$$v_z(\infty) = \sqrt{\nu\omega} H(z_1 \rightarrow \infty) = -0,886\sqrt{\nu\omega}. \quad (3.96)$$

Die senkrechte Reibungskraft auf die Scheibe pro Flächeneinheit ist

$$\sigma_{z\varphi} = \eta (\partial_z v_\varphi)_{z=0} \quad (3.97)$$

$$= \eta r \omega \partial_z G(z_1)|_{z=0} \quad (3.98)$$

$$= \eta r \omega \partial_z z_1 \partial_z G(z_1)|_{z=0} \quad (3.99)$$

$$= \eta r \omega \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} G'(0) \quad (3.100)$$

$$= r \rho \sqrt{\nu\omega^3} G'(0), \quad (3.101)$$

es ist also  $\sigma_{z\varphi} \propto \rho \sqrt{\nu\omega^3}$ . Bei Vernachlässigung der Randeffekte an der Scheibe können wir für eine große, aber endliche Scheibe des Radius R das Drehmoment der Reibungskräfte auf einer der beiden

Seiten schreiben als

$$M = 2 \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi} dr \quad (3.102)$$

$$= \pi R^4 \rho \sqrt{\nu \omega^3} G'(0). \quad (3.103)$$

Die numerische Lösung ergibt

$$M = -1,94 R^4 \rho \sqrt{\nu \omega^3}. \quad (3.104)$$

Dies ist das Drehmoment der Reibungskräfte auf die Scheibe; wir halten fest, dass  $M \propto R^4, \rho, \sqrt{\nu}$ .

---

## Literatur

1. Navier, C. L. M. H.: Mémoire sur les lois de mouvement des fluides. Mem. Acad. R. Sci. Paris 6, 389 (1823)
2. Stokes, G. G.: On the theories of the internal friction of fluids in motion. Trans. Camb. Phil. Soc. 8, 287 (1845)
3. <http://de.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes-Gleichungen> (2015)
4. Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. de Gruyter (2014), zweite Umschlagseite
5. Lamb, H.: Hydrodynamics. Cambridge University Press (1924)
6. Kármán, T. von: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. 1, 233 (1921)

## 4.1 Übergang zur Turbulenz und doppelte Schwelle

Laminare Strömungen eines *viskosen* Fluids werden für große Reynolds-Zahlen

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta} > Re_{\text{krit}} \quad (4.1)$$

im Allgemeinen instabil gegenüber infinitesimalen Störungen: Die Störung klingt nicht mit der Zeit ab, sondern wächst an; die Strömung wird *turbulent*.

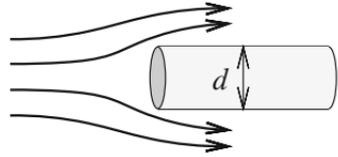
Für jeden *Strömungstyp* gibt es ein eigenes  $Re_{\text{krit}}$ , z. B. bei der Strömung um feste Körper (Abb. 4.1): Hier ist im Allgemeinen  $10 \leq Re_{\text{krit}} \leq 100$ .

Im turbulenten Fall lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen mit einer turbulenz erzeugenden Kraft  $\mathbf{f}$  schreiben als

$$\partial_t \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (4.2)$$

Analytische Lösungen im turbulenten Fall gibt es nicht, und sie wären auch wenig sinnvoll, da man jetzt an *statistischen Mittelwerten* interessiert ist: für die mittlere Geschwindigkeit  $\langle v \rangle$ , die mittlere quadratische Geschwindigkeit  $\langle v^2 \rangle$ , die mittlere dissipierte Energie  $\langle E_d \rangle$  (pro Zeit- und Masseneinheit), etc. In manchen Fällen lassen sie sich näherungsweise berechnen [1, 2], insbesondere bei entwickelter Turbulenz (also einer

**Abb. 4.1** Festkörper in Strömung



**Abb. 4.2** Rohrströmung



voll turbulenter Strömung). Man findet für die mittlere quadratische Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes vom Wirbelzentrum (analog für die Wirbelenergie  $\langle E \rangle \sim \langle v^2 \rangle$ ) das *Wirbelverteilungsgesetz*<sup>1</sup>

$$\langle v^2 \rangle(r) \propto r^{\frac{2}{3}}. \quad (4.3)$$

Der *exakte* Wert der Exponenten ist bis heute nicht berechenbar (man findet empirisch kleine Abweichungen von  $\frac{2}{3}$ ), da auch die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen statistisch fluktuieren.

Das *Einsetzen der Turbulenz* bei vergleichsweise großen Reynoldszahlen hat Landau<sup>2</sup> 1944 über eine unendliche Folge von *Instabilitäten* und räumlich und zeitlich immer unregelmäßigere Strömungsmuster beschrieben [5].

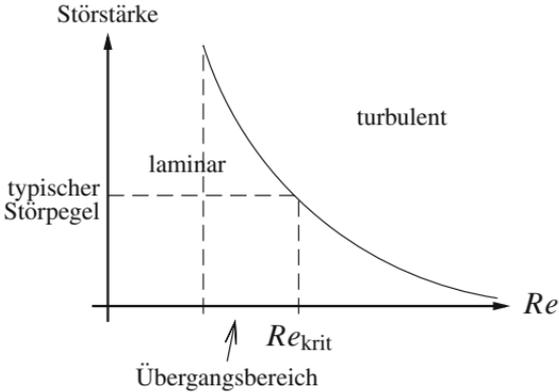
Bei manchen Strömungstypen wie der *Rohrströmung* (Abb. 4.2) gibt es jedoch keine Instabilität, wohl aber Turbulenz. Sie setzt direkt und stark ein; dazu ist eine endliche *Störung* des laminaren Profils erforderlich (d. h., eine infinitesimale Störung ist nicht ausreichend). Hier gibt es für den Turbulenzeinsatz eine *doppelte Schwelle*: Sowohl die *Reynoldszahl* als auch die *Störung* müssen groß genug sein (Abb. 4.3).

Ist die Strömung turbulent geworden, so hat sie viele Freiheitsgrade und einen hochdimensionalen Phasenraum.

Das *Profil* der *turbulenten* Strömung ist wesentlich durch die Nichtlinearität im konvektiven Term bestimmt, während bei der laminaren Strömung die Viskosität entscheidend ist.

<sup>1</sup> Der von Kolmogorov und Onsager gefundene Zusammenhang folgt auch aus einem Renormierungsansatz für selbstähnliche Strukturen [3, 4]: Die Beschreibung entwickelter Turbulenz durch Carl Friedrich von Weizsäcker (\*1912 Kiel, †2007 Söcking) im Jahr 1948 war ein Beispiel der Einführung der Renormierungsgruppe.

<sup>2</sup> Lew Dawidowitsch Landau (\*1908 Baku, †1968 Moskau).



**Abb. 4.3** Doppelte Schwelle der Turbulenz

### Beispiel: Rohrströmung

Im *laminaren* Fall ist das die übliche Poiseuille-Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil,

$$v^{\text{lam}}(r) = \frac{\delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow v_{\text{max}}^{\text{lam}}(r = 0) = \frac{\delta p}{4\eta l} R^2 \quad (4.5)$$

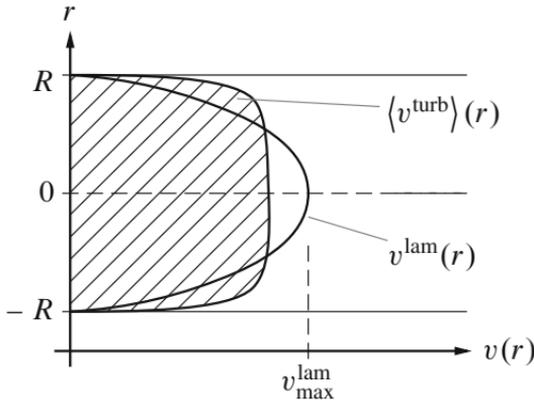
$$= 2\overline{v^{\text{lam}}}, \quad (4.6)$$

wobei für den *über den Rohrquerschnitt gemittelten* Wert  $\overline{v^{\text{lam}}}$  der laminaren Strömung gilt

$$\overline{v^{\text{lam}}} = \frac{\int_0^R r v(r) dr}{\int_0^R r dr} \quad (4.7)$$

$$= \frac{\delta p}{8\eta l} R^2. \quad (4.8)$$

Die Beschreibung der *turbulenten* Rohrströmung ist grundsätzlich nur über Mittelwerte möglich (Abb. 4.4); die individuellen Fluidteilchengeschwindigkeiten variieren stark. Die mittlere Geschwindigkeit  $\langle v^{\text{turb}} \rangle(r)$  muss in diesem Fall numerisch berechnet werden; sie unter-



**Abb. 4.4** Laminare und turbulente Strömungsprofil

scheidet sich deutlich von dem Ergebnis  $v^{\text{lam}}(r)$  für die laminare Strömung. Die turbulente Strömung hat *kein* parabolisches Profil mehr, es ist eher eckig mit einem Maximalwert für  $r = 0$  (in der Rohrmitte) zwischen dem gemittelten Wert  $\overline{v^{\text{lam}}}$  und dem Maximalwert  $v_{\text{max}}^{\text{lam}}$  der laminaren Strömung. Erst dicht am Rand fällt sie steil auf 0 ab; es bildet sich eine *schmale Randzone* aus, in der die Strömung durch *Viskosität* dominiert und fast *laminar* ist.

Als Folgen der Nichtlinearität können außer Turbulenz auch *Ordnung und Struktur* in offenen, dissipativen Systemen fern vom Gleichgewicht entstehen, etwa in der Kármán'schen Wirbelstraße (Abb. 4.5, bei  $Re \approx 140$ ). Die dabei erscheinenden Strukturen sind *vielskalig*: Gleichartige Muster bilden sich in verschiedensten Größen ineinandergeschachtelt aus.



**Abb. 4.5** Kármán'sche Wirbelstraße (aus: M. Van Dyke: *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford CA, 1982)

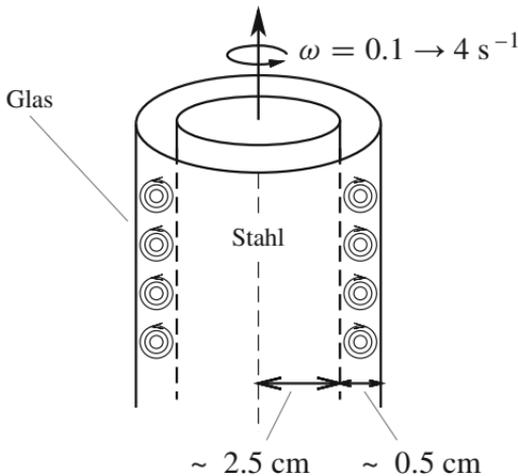
## 4.2 Turbulenzeinsatz über Instabilität

Ohne makroskopische Störung setzt Turbulenz über infinitesimale Instabilitäten ein. Dazu zwei Beispiele:

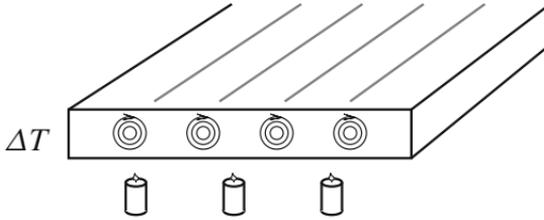
### Beispiel 1

Bei der *Taylor-Couette-Instabilität*, entdeckt 1923, strömt Wasser in dem Spalt zwischen einem rotierenden Innenzylinder und einem feststehenden, konzentrischen Außenzylinder (Abb. 4.6). Bei *langsamer* Drehung ist die Strömung *laminar*, bei schneller Drehung gibt es regelmäßige *Schlauchmuster*, bei sehr schneller Drehung wird sie vielschichtig *turbulent*.

Die Ursache ist, dass die viskose Flüssigkeit am rotierenden inneren und am ruhenden äußeren Zylinder haftet: Es gibt ein Gefälle der azimuthalen Geschwindigkeit  $u_\varphi(r)$  von innen nach außen, und infolgedessen ein Gefälle der Zentrifugalkräfte. Wird es hinreichend groß, so kommt es zu einer *Zentrifugalinstabilität*. (Eine zusätzliche makroskopische Störung gibt es hier nicht.)



**Abb. 4.6** Taylor-Couette-Instabilität



**Abb. 4.7** Rayleigh-Bénard-Zelle

Dreht sich auch der *äußere* Zylinder, so sollte die Strömung *laminar* bleiben, weil  $u_\varphi(r)$  mit  $r$  anwächst, so dass auch die *Druckkraft* anwächst und infinitesimale Störungen zurücktreibt. Jedoch wird die Strömung bei hinreichend großem  $\omega$  dennoch turbulent; es muss demnach auch hier eine *weitere Ursache* geben.

### Beispiel 2

Die *Rayleigh-Bénard-Zelle*<sup>3</sup> dient als weiteres Beispiel für hydrodynamische Instabilität, Abb. 4.7. Der Auftrieb durch Wärmeausbreitung resultiert in Konvektionsrollen, dann in Turbulenz:

Eine Flüssigkeitsschicht im Schwerfeld  $\mathbf{g}$  wird von unten um  $\Delta T$  (einige °C) erwärmt. Für kleines  $\Delta T$  wird die Wärme über die molekulare Leitfähigkeit transportiert, für mittelgroßes  $\Delta T$  bilden sich regelmäßige Konvektionsrollen aus und für großes  $\Delta T$  entsteht Turbulenz.

Die Konvektionsrollen sind die *erste Instabilität*; sie entsteht, wenn ein Paar komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse kreuzt (sog. Hopf-Bifurkation).

Das beim Zerfall der Konvektionsrollen entstehende neue Muster ist nicht zeitunabhängig, sondern *periodisch* mit der Frequenz  $f_1$ . Wird  $\Delta T$  (oder  $\omega$  oder  $Re$ ) weiter erhöht, bleibt auch das neue Mus-

<sup>3</sup> Entdeckt 1916 von John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (\*1842 Langford-Grove, Maldon, †Terlins Place bei Witham), und unabhängig von Henri Claude Bénard (\*1874, †1939) im Jahr 1920.

ter nicht stabil: Es folgt die dritte Instabilität, anschließend gibt es zwei Frequenzen  $f_1$ ,  $f_2$  (und wegen der Nichtlinearität ebenso alle Mischungsverhältnisse).

Bei der *vierten Instabilität* [6] kommt nicht einfach eine weitere Frequenz hinzu, sondern das Spektrum wird kontinuierlich und das Strömungsfeld zeitlich *chaotisch*.<sup>4</sup>

Der Ruelle-Takens-Weg ins hydrodynamische Chaos hat zahlreiche experimentelle Bestätigungen gefunden. Es gibt dabei drei Grundmuster für den Weg ins Chaos über Instabilitäten:

1. *Quasiperiodischer Weg*:  $f_1$ ,  $f_2$  inkommensurabel, d. h. nicht durch dieselbe Zahl ohne Rest teilbar;
2. *Periodenverdopplung*:  $f_1$ ,  $f_2$  fest verknüpft;
3. *Intermittenz*: intermittierendes Einsetzen eines neuen Musters.

Alle drei Wege lassen sich je nach Randbedingungen bei Rayleigh-Bénard messen.

### 4.3 Stabilität stationärer Strömungen

Nicht jede Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für die Bewegung eines zähen Fluids ist in der Natur realisiert, denn sie muss auch *stabil* sein, d. h., *kleine Störungen* müssen mit der Zeit abklingen.

Wir führen also eine mathematische Stabilitätsuntersuchung<sup>5</sup> durch: Sei  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$  die stationäre Lösung und  $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$  eine kleine, nicht stationäre Störung. Die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung werden erfüllt von  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$  mit  $p = p_0 + p_1$ :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.10)$$

<sup>4</sup> Man beachte, dass *Chaos* und *Turbulenz* dennoch nicht synonym sind, da wichtige Gegenbeispiele nicht diesem Weg folgen.

<sup>5</sup> Nach Lew Dawidowitsch Landau.

Für den stationären Anteil mit  $\partial_t \mathbf{v}_0 = 0$  gilt demnach:

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_0, \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (4.12)$$

und für den *gestörten Anteil* gilt unter Auslassung von Termen höherer Ordnung in  $\mathbf{v}_1$  (wegen  $|\mathbf{v}_1| \ll |\mathbf{v}_0|$ ):

$$\partial_t \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_1, \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (4.14)$$

Zusätzlich gilt die *Randbedingung*  $\mathbf{v}_1 = 0$  an unbeweglichen festen Wänden. Also genügt  $\mathbf{v}_1$  einem System homogener Differenzialgleichungen mit Koeffizienten, die nur Funktionen des Ortes sind und nicht von der Zeit abhängen.

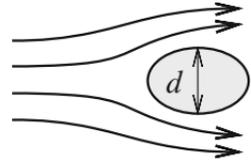
Die *allgemeine Lösung* ist eine Summe spezieller Lösungen, in denen  $\mathbf{v}_1$  über einen Faktor  $\mathbf{v}_1(t) \propto e^{-i\omega t}$  von der Zeit abhängt. Die *Frequenzen*  $\omega$  sind durch die Lösungen mit Randbedingungen bestimmt; sie sind komplex:  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ .

Für den *positiven Imaginärteil*  $\gamma_1 > 0$  wächst  $e^{-i\omega t}$  unbeschränkt mit  $t$ ; die Strömung wird *instabil*. Im Umkehrschluss liegt eine stabile Strömung genau dann vor, wenn  $\gamma_1 = \Im(\omega) < 0$  für alle  $\omega$ .

Die zugehörige mathematische *Stabilitätsuntersuchung* ist kompliziert, und bei stationären Strömungen um Körper mit endlichen Abmessungen ist sie bisher nicht gelöst. Jedenfalls wird die Strömung für  $Re > Re_{\text{krit}}$  instabil gegenüber infinitesimalen Störungen; für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes  $Re_{\text{krit}}$ , z. B. bei Strömungen um feste Körper:  $10 \leq Re_{\text{krit}} \leq 100$  (vgl. Abschn. 3.4):

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta}, \quad Re_{\text{krit}} \approx 30. \quad (4.15)$$

Es gilt für das Strömungsverhalten bei verschiedenen Reynoldszahlen:

**Abb. 4.8** Festkörper in Strömung

- für  $Re < Re_{\text{krit}}$  und Störfrequenzen  $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$  mit  $\gamma_1 < 0$ : *stabile Strömung*,
- für  $Re = Re_{\text{krit}}$ :  $\exists \omega$  mit  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_1(Re_{\text{krit}}) = 0$ ,
- für  $Re > Re_{\text{krit}}$  und  $\gamma_1 > 0$  (mit  $\gamma_1 \ll \omega_1$  bei  $Re \approx Re_{\text{krit}}$ ): *turbulente Strömung*.

Beim Umströmen eines endlichen Körpers (Abb. 4.8) gibt es nur diskrete, keine kontinuierlichen Frequenzen, und es ist  $\gamma_1 > 0$ .

Für nichtstationäre Bewegung bei großem  $Re > Re_{\text{krit}}$  in der Beschreibung von Landau (1944) verwendet man folgenden Ansatz für das Störfeld  $\mathbf{v}_1$ :

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = A(t)\mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad (4.16)$$

mit komplexer Ortsfunktion  $\mathbf{f}$  und komplexer Amplitude  $A(t)$ :

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{-i\omega t} \quad (4.17)$$

$$= \text{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t} \text{ zu Anfang bei } t \geq 0. \quad (4.18)$$

Wie entwickelt sich die *Amplitude*  $|A(t)|$  des Störfeldes *zeitlich*?

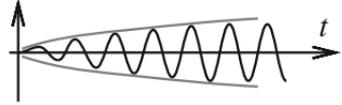
Für  $Re \approx Re_{\text{krit}}$  strebt die Amplitude des Störfeldes gegen einen endlichen Grenzwert, der sich wie folgt abschätzen lässt: Zu kleinen Zeiten ist

$$|A|^2 = \text{const}^2 e^{2\gamma_1 t} \underbrace{|e^{-i\omega_1 t} e^{+i\omega_1 t}|}_{=1}. \quad (4.19)$$

Die zeitliche Änderung des Betragsquadrats der Amplitude wird für kleine Zeiten zu

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2. \quad (4.20)$$

**Abb. 4.9** Zeitentwicklung der Amplitude



Für größere Zeiten gibt es jedoch Abweichungen von der anfänglichen Amplitudenform; in einer *Reihenentwicklung* kommen weitere Glieder hinzu.

Es interessiert der *zeitliche Mittelwert*; die Glieder dritter Ordnung enthalten einen periodischen Faktor, der bei Zeitmittelung  $\langle |A| \rangle_t$  Null ergibt. Also folgt mit Gliedern bis zur vierten Ordnung:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4, \quad (4.21)$$

wobei die *Landau'sche Konstante*  $\alpha$  positiv oder negativ sein kann.

Die Lösung der Differenzialgleichung ist gegeben durch (Abb. 4.9)

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t}. \quad (4.22)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  strebt  $|A|^2$  asymptotisch gegen den durch  $\gamma_1$  und  $\alpha$  festgelegten endlichen Grenzwert

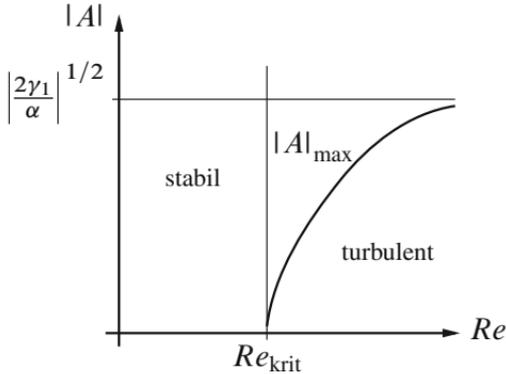
$$|A|_{\max}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha}. \quad (4.23)$$

Dabei ist  $\gamma_1$  eine Funktion der Reynolds-Zahl mit  $\gamma_1(Re_{\text{krit}}) = 0$ . Sie lässt sich in der Nähe von  $Re_{\text{krit}}$  in einer Potenzreihe entwickeln; in erster Näherung ist

$$\gamma_1 = \text{const} (Re - Re_{\text{krit}}) \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow |A|_{\max} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot \text{const}}{\alpha}} (Re - Re_{\text{krit}})^{1/2}. \quad (4.25)$$

Dieses Verhalten ist in Abb. 4.10 dargestellt.



**Abb. 4.10** Endlicher Amplitudengrenzwert

Bei der Berücksichtigung eines weiteren Gliedes in der Entwicklung sieht man, dass die fünfte Ordnung bei der Zeitmittelung analog zur dritten Ordnung wegfällt:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6 \quad (4.26)$$

für  $\alpha < 0$  und  $\beta > 0$ . Die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  ist

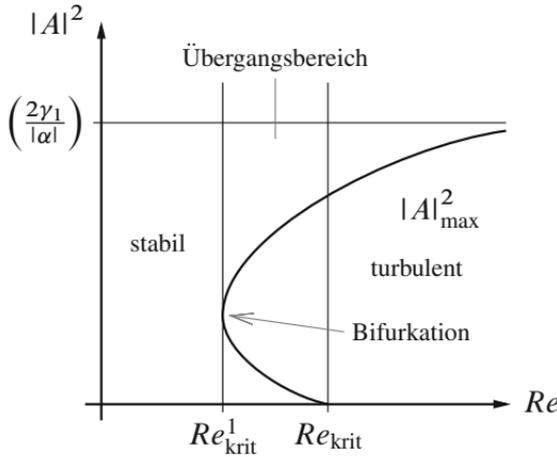
$$|A|_{\text{max}}^2 = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[ \frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta} \gamma_1 \right]^{1/2}. \quad (4.27)$$

Bei  $Re = Re_{\text{krit}}$  nimmt das System sprunghaft eine endliche Amplitude an,  $|A| = |\alpha|/\beta$ .

Bei  $Re'_{\text{krit}} < Re < Re_{\text{krit}}$  gibt es eine *metastabile Grundströmung*, die *stabil* gegenüber sehr kleinen Störungen ist ( $|A| < \frac{|\alpha|}{2\beta}$ ) – sie klingen im Laufe der Zeit ab –, aber *instabil* gegenüber Störungen mit endlicher Amplitude  $|A| > \frac{\alpha}{2\beta}$ .

Für  $Re < Re'_{\text{krit}}$  ist die Strömung stabil, für  $Re > Re_{\text{krit}}$  gibt es keine stabile Strömung (Abb. 4.11).

Die *Phase* des Störfeldes  $A(t)$  bleibt unbestimmt; sie hängt von den zufälligen Anfangsbedingungen ab. Dadurch erhält die Strömung einen



**Abb. 4.11** Bifurkation

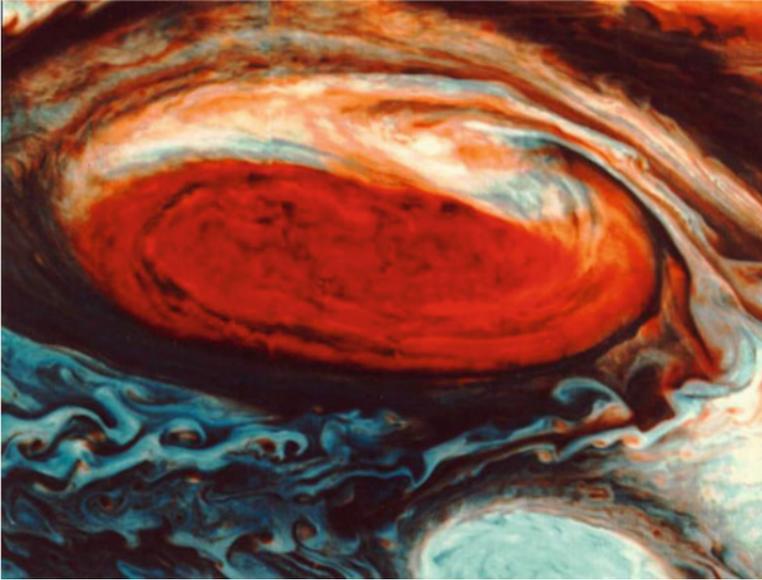
Freiheitsgrad, während die stationäre (stabile) Strömung durch die äußeren Bedingungen vollständig bestimmt ist.

#### 4.4 Entwickelte Turbulenz in astrophysikalischen Umgebungen

Turbulenz erscheint auf sehr unterschiedlichen Skalen, vom Labor bis in den größten Strukturen im Universum. Voraussetzung ist nur die Gegenwart eines kontinuierlichen, fluid-ähnlichen Mediums. Turbulenz ist eine der wichtigsten (und häufigsten) Naturerscheinungen; dennoch sind wir von einem tieferen Verständnis weit entfernt.

Beispiele für entwickelte Turbulenz gibt es in unterschiedlichen astrophysikalischen Umgebungen:

- *Planeten:* Turbulenz ist essenziell beim Strukturieren der Atmosphäre sowie zum Wärme- und Impulstransport an der Oberfläche.
- *Terrestrische Planeten:* vergleichsweise kleinskalige Strukturen in der Atmosphäre, z. B. Wirbelströme; Durchmesser von ca. 1–10 km (etwa der Hurrikan Katrina).

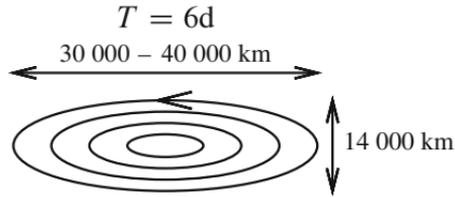


**Abb. 4.12** Beispiel für entwickelte Turbulenz: Jupiters Großer Roter Fleck  
(© NASA)

- *Große Gasplaneten*: großskalige Strukturen; z.B. der Große Rote Fleck<sup>6</sup> auf *Jupiter* (Abb. 4.12, Abb. 4.13): ein 14.000 km breiter und 30.000–40.000 km langer Zyklon, der mit sechs Tagen Umlaufzeit entgegen dem Uhrzeigersinn rotiert. Auf *Saturn* entstand 1990 ein weißer Fleck, der ein Sturmzentrum in der H/He/NH<sub>3</sub>-Atmosphäre von ca. 20.000 km Ausdehnung und 10 h 17 min Umlaufzeit ist. Weiter gibt es auf *Neptun* einen ähnlichen blauen Fleck.<sup>7</sup>
- *Sternatmosphären*: Turbulenz ist Bestandteil jeder Theorie über konvektiven Energietransport mit Implikationen für die innere Struktur von Sternen.
- *Interstellares Medium*: Turbulenz in Molekülwolken spielt eine wichtige Rolle bei der Sternentstehung.

<sup>6</sup> Der Große Rote Fleck wurde von Giovanni Domenico Cassini (\*1625 Perinaldo bei Nizza, †1712 Paris) 1655 entdeckt und überdauerte die Jahrhunderte.

<sup>7</sup> Entdeckt von Voyager 2, 1989.



**Abb. 4.13** Maße des Großen Roten Flecks

- *Galaxien*: Turbulenz spielt eine entscheidende Rolle beim Entstehen von Galaxien-clustern, den größten gravitativ gebundenen Objekten im Universum.

---

## Literatur

1. Kolmogorov, A. N.: The local structure of turbulence. Compt. Rend. Acad. Sci. USSR 30, 301 (1941) (auf Russisch); englische Version: Proc. Roy. Soc. A 434, 9 (1991)
2. Onsager, L.: The distribution of energy in turbulence. Phys. Rev. 68, 286(A) (1945)
3. von Weizsäcker, C. F.: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynolds'schen Zahlen. Z. Physik 124, 614 (1948)
4. Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Physik 124, 628 (1948)
5. Landau, L. D.: On the problem of a turbulence. Dokl. Akad. Nauk SSSR 44, 339 (1944)
6. Ruelle, D. und Takens, F.: On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 20, 167 (1971) und 23, 343 (1971)

Bei *sehr großen Reynolds-Zahlen*  $Re = \frac{vl}{\nu} = \frac{\rho vl}{\eta}$  – entsprechend bei kleinen Werten von  $\eta$  bzw.  $\nu$  – kann das Fluid allgemein als ideal angesehen werden. Dies gilt jedoch *nicht* in der Nähe fester Wände, da dort für viskose Fluide  $v_{\perp} = v_{\parallel} = 0$  am Rand, beim idealen Fluid nur die Normalkomponente  $v_{\perp} = 0$  sein muss.

Die *Abnahme* von  $\mathbf{v}$  auf 0 für große Reynolds-Zahlen erfolgt fast vollständig in einer dünnen Fluidschicht an den Wänden, der *Grenzschicht* (Abb. 5.1). Hier haben die Geschwindigkeitsgradienten hohe Werte; die Strömung kann dort *laminar* oder *turbulent* sein. Die *Zähigkeit* verursacht den Geschwindigkeitsabfall in der Grenzschicht bis zu  $\mathbf{v} = 0$ . Der *Rand* der Grenzschicht ist nicht scharf.

## Beispiel

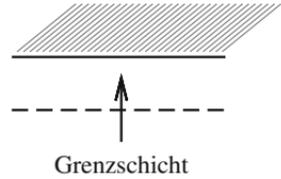
Stromlinienkörper. Die *Dicke der Grenzschicht* ist im *laminaren* Fall gegeben durch

$$\delta_l = \frac{5l}{\sqrt{Re}} \propto \sqrt{\nu}, \quad (5.1)$$

im *turbulenten* Fall durch

$$\delta_l = 0,37 \sqrt[5]{\nu \frac{l^4}{4}}. \quad (5.2)$$

Beispielsweise ist für die charakteristische Länge  $l = 10$  cm und die Reynolds-Zahl  $Re = 1 \cdot 10^4$  die Dicke der laminaren Grenzschicht  $\delta_l = 0,5$  cm (Abb. 5.2).

**Abb. 5.1** Grenzschicht

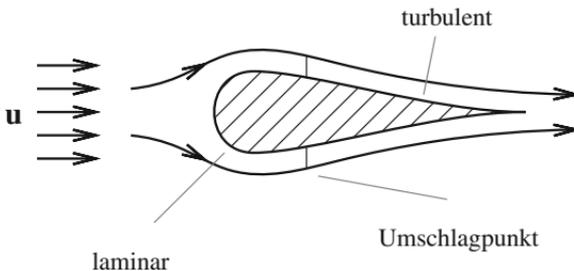
Die Theorie der Grenzschichten [1] wurde formuliert von Prandtl<sup>1</sup> zum Internationalen Mathematiker-Kongress Heidelberg des Jahres 1904.

Wir behandeln die Bewegungsgleichung in der Grenzschicht für eine *zweidimensionale stationäre Strömung* (Abb. 5.3) um ein ebenes Teilstück der Oberfläche des Körpers aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Außerhalb der Grenzschicht entsprechen diese der Bernoulli-Gleichung,

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (5.3)$$

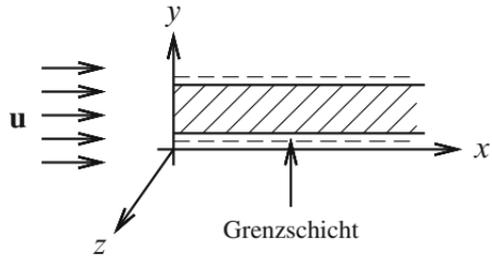
$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u \frac{du}{dx}, \quad (5.4)$$

da die Strömung dort eine Potenzialströmung mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  der Grundströmung ist. Da die Grenzschicht dünn ist, verläuft die Strö-

**Abb. 5.2** Stromlinienkörper (Randbedingungen:  $v_{\perp} = v_{\parallel} = 0$ )

<sup>1</sup> Ludwig Prandtl (\*1875 Freising, †1953 Göttingen)

**Abb. 5.3** Grenzschicht in stationärer Strömung



mung hauptsächlich parallel zur umströmten Oberfläche,

$$v_y \ll v_x \quad \text{sowie} \quad \partial_x^2 v_x \ll \partial_y^2 v_x. \quad (5.5)$$

Also ist es ausreichend, sich mit der ersten Navier-Stokes-Gleichung (der  $x$ -Komponente der vektoriellen Gleichung) und der Kontinuitätsgleichung zu beschäftigen. Diese werden zu den *Prandtl'schen Gleichungen* [1, 2]:

$$v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x - \nu \partial_y^2 v_x = u \frac{du}{dx}, \quad (5.6)$$

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0. \quad (5.7)$$

Die Randbedingungen geben vor, dass am Rand  $v_x = v_y = 0$  gelte. Es gibt eine umfangreiche Literatur sowohl zur möglichen Gestalt der Lösungen der Prandtl'schen Gleichungen, als auch eine große Zahl spezieller Lösungen – siehe [3] und dortige Referenzen. Moderne Anwendungen in Technik und Ingenieurwesen verwenden meist an das jeweilige Randwertproblem angepasste numerische Lösungen, oft auf der Basis der Finiten Differenzen Methode [4].

---

## Literatur

1. Prandtl, L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg (1904). Teubner, Leipzig, 484 (1905)

2. Großmann, S., Eckhardt, B., Lohse, D.: Hundert Jahre Grenzschichtphysik. *Phys. J.* 10, 31 (2004)
3. Nickel, K.: Die Prandtlschen Grenzschichtdifferentialgleichungen als asymptotischer Grenzfall der Navier-Stokesschen und der Eulerschen Differentialgleichungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13, 1 (1963)
4. Larsson, S., Thomée, V.: *Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden*. Springer-Verlag, Berlin (2005)

Mit Berücksichtigung von *Viskosität* und *Wärmetransport* besteht das Gleichungssystem der Hydrodynamik aus den Navier-Stokes-Gleichungen, der Kontinuitätsgleichung und einer fünften – thermodynamischen – Gleichung. Sie tritt an die Stelle der Adiabatengleichung bei idealen Fluiden, welche dort für die Erhaltung der Entropie steht. Wegen der irreversiblen Energiedissipation ist bei viskosen Fluiden die Entropie *nicht* erhalten; vielmehr wächst sie an.

Die *Änderung der Gesamtenergie* in einem bestimmten Volumen pro Sekunde muss gleich dem Energiestrom durch dieses Volumen sein. Der *Energiestrom* enthält jetzt außer dem idealen Term einen Term infolge der inneren Reibung. Im *idealen Fluid* gilt (s. Abschn. 2.6):

$$\partial_t \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{ideal}}, \quad (6.1)$$

wobei  $\epsilon$  die innere Energie pro Masseneinheit und  $w = \epsilon + p/\rho$  die Enthalpie pro Masseneinheit angibt. Die Gleichung beschreibt den Energiestrom aufgrund der Verschiebung der Flüssigkeitsmasse; dazu kommt der Energiestrom infolge innerer Reibung,

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{v}\sigma', \quad j'_k = -v_i \sigma'_{ik}. \quad (6.2)$$

Auch bei konstanter Temperatur sorgen die beiden Energietransportmechanismen für *Wärmetransport*.

Ist  $T$  *nicht* im ganzen Volumen *konstant*, so gibt es zusätzlichen Wärmetransport durch *Wärmeleitung*: direkte molekulare Energieübertragung von Orten mit höherer zu Orten mit niedrigerer Temperatur  $T$ .

Sie geschieht auch in einer *ruhenden* Flüssigkeit und ebenso in einem Festkörper, hängt also *nicht* mit makroskopischer Bewegung zusammen [1].

## 6.1 Die Wärmetransportgleichung

Sei  $\mathbf{q}$  die *Wärmestromdichte* infolge *Wärmeleitung*;  $\mathbf{q}$  ist eine Funktion der Temperaturänderung. Ist der Temperaturgradient klein, so kann  $\mathbf{q}$  in einer Potenzreihe nach  $\nabla T$  entwickelt werden, von der wir nur die Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigen.

Der konstante Term verschwindet, da  $\mathbf{q} = 0 \Leftrightarrow \nabla T = 0$ . Also ist

$$\mathbf{q} \approx -\kappa \nabla T \quad (6.3)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit<sup>1</sup>  $\kappa$ , die  $> 0$  ist, da der Energiestrom von Orten mit hoher zu Orten mit niedriger Temperatur gerichtet ist:  $\mathbf{q}$  und  $\nabla T$  haben entgegengesetzte Richtungen.

Die gesamte *Energiestromdichte* im viskosen Fall ist also

$$\mathbf{j}_{\text{visc}} = \underbrace{\rho \mathbf{v} \left[ \frac{v^2}{2} + w \right]}_{=\mathbf{j}_{\text{ideal}}} - \nu \sigma' \underbrace{-\kappa \nabla T}_{=\mathbf{q}}, \quad (6.4)$$

und es gilt der *Energieerhaltungssatz*

$$\partial_t \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{visc}}, \quad (6.5)$$

der sich mithilfe der hydrodynamischen Gleichungen umformen lässt zu

$$\partial_t \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = \frac{v^2}{2} \partial_t \rho + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \rho \partial_t \epsilon + \epsilon \partial_t \rho, \quad (6.6)$$

<sup>1</sup> *Thermal conductivity* in englischsprachiger Literatur.

wobei der Term  $\partial_t \rho$  aus der Kontinuitätsgleichung,  $\partial_t \mathbf{v}$  aus den Navier-Stokes-Gleichungen entnommen ist und die Ableitung  $\partial_t \epsilon$  aus der thermodynamischen Beziehung

$$d\epsilon = T ds - p dV \quad (6.7)$$

$$= T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (6.8)$$

$$\Rightarrow \partial_t \epsilon = T \partial_t s + \frac{p}{\rho^2} \partial_t \rho \quad (6.9)$$

kommt. Nach Einsetzen folgt durch den Vergleich mit der rechten Seite des Energieerhaltungssatzes die *allgemeine Gleichung für den Wärmetransport*,

$$\rho T \left[ \underbrace{\partial_t s}_{\text{lokal}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla s}_{\text{konvektiv}} \right] = \underbrace{\sigma'_{ik} \partial_k v_i}_{\text{viskos}} + \underbrace{\nabla (\kappa \nabla T)}_{\text{Wärmeleitung}}. \quad (6.10)$$

Es ist ferner  $\sigma'_{ik} \partial_k v_i = \eta \partial_k v_i [\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_l v_l]$ . Ohne Viskosität und Wärmetransport verschwindet die rechte Seite; es ergibt sich dann die Energieerhaltung in einer idealen Flüssigkeit, die *Adiabatengleichung*

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (6.11)$$

Die Gesamtentropie der Flüssigkeit

$$S = \int \rho s dV \quad (6.12)$$

wächst an aufgrund der irreversiblen Prozesse der *Wärmeleitung* und der *inneren Reibung*.

---

## 6.2 Wärmetransport bei inkompressiblen Fluiden

Oft lässt sich die Wärmetransportgleichung stark vereinfachen. Falls gilt, dass die Strömungsgeschwindigkeit sehr viel kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit,  $v \ll c$ , so sind die *Druckänderungen* so klein, dass die

zugehörigen *Dichteänderungen* vernachlässigbar sind. Die Dichteänderungen infolge einer Temperaturänderung  $\Delta T$  müssen jedoch berücksichtigt werden.

Bei der Differenziation der thermodynamischen Größen kann man also den Druck, nicht aber die Dichte als konstant annehmen:

$$\partial_t s = (\partial_T)_p \partial_t T, \quad \nabla s = (\partial_T s)_p \nabla T, \quad (6.13)$$

wobei  $(\partial_T s)_p = c_p/T$  mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p = T (\partial_T s)_p$ .

$$\Rightarrow T \partial_t s = c_p \partial_t T, \quad T \nabla s = c_p \nabla T. \quad (6.14)$$

Einsetzen in die Wärmetransportgleichung (6.10) ergibt

$$\rho c_p [\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T] = \sigma'_{ik} \partial_k v_i + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (6.15)$$

Bei *kleinen* Temperaturdifferenzen  $\delta T$  kann auch die Dichte als konstant angesehen und die Flüssigkeit insgesamt als inkompressibel behandelt werden. Dann ist die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.16)$$

und bei kleinem  $\delta T$  können wir auch die Temperaturabhängigkeit von  $\eta$ ,  $\kappa$  und  $c_p$  vernachlässigen. Nach Division durch  $\rho c_p$  folgt die Wärmetransportgleichung in einem *inkompressiblen Fluid*:

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} [\partial_k v_i + \partial_i v_k]^2 \quad (6.17)$$

mit der kinematischen Zähigkeit  $\nu = \eta/\rho$  und der Temperaturleitfähigkeit<sup>2</sup>  $\chi = \kappa / (\rho c_p)$ .

In einer *ruhenden* Flüssigkeit wird der Energietransport allein durch die *Wärmeleitung* bewirkt; ohne geschwindigkeitsabhängige Terme wird die Gleichung zu

$$\partial_t T = \chi \Delta T, \quad (6.18)$$

auch bekannt als *Wärmeleitungsgleichung* oder *Fourier'sche Gleichung*<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> *Thermometric conductivity* in englischsprachiger Literatur.

<sup>3</sup> Nach Jean Baptiste-Joseph Fourier (\*1768 Auxerre, †1830 Paris).

Diese Gleichung folgt auch direkt aus der Energieerhaltung: Die in einem bestimmten Volumen pro Zeiteinheit absorbierte Wärmemenge muss gleich dem Wärmestrom sein, der durch die Oberfläche in das Volumen fließt. Aus der Gleichsetzung von absorbierter Wärmemenge und Wärmestrom,

$$\rho c_p \partial_t T = -\nabla \mathbf{q} = \kappa \Delta T, \quad (6.19)$$

folgt also direkt die Wärmeleitungsgleichung.

Die Wärmeleitungsgleichung ist auf Fluide nur sehr begrenzt anwendbar. Bei Flüssigkeiten im Schwerfeld bewirkt bereits ein kleiner Temperaturgradient eine unmerkliche Störung (freie Konvektion): Nur wenn  $\nabla T$  der Schwerkraft entgegengerichtet oder die Flüssigkeit sehr zäh ist, gilt die Gleichung. Sie ist dennoch wichtig, da sie auch Wärmeleitung in festen Körpern beschreibt [2], und soll deshalb hier untersucht werden.

Ist die Temperaturverteilung in einem ungleichmäßig erwärmten, *ruhenden* Medium zeitlich konstant, wird die Wärmeleitungsgleichung – bei konstanter Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  – zur *Laplace-Gleichung*

$$\Delta T = 0. \quad (6.20)$$

Kann  $\kappa$  nicht als konstant angesehen werden, muss man allgemeiner schreiben:

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0. \quad (6.21)$$

Sind zusätzlich *fremde Wärmequellen* vorhanden, muss zur Wärmeleitungsgleichung ein Zusatzterm addiert werden, z. B. für die Aufheizung durch elektrischen Strom. Sei  $Q$  die Wärmemenge, die von Quellen an die Flüssigkeit pro Volumen- und Zeiteinheit abgegeben wird,

$$Q = Q(\mathbf{r}, t), \quad (6.22)$$

so wird die Wärmeleitungsgleichung zu

$$\rho c_p \partial_t T = \kappa \Delta T + Q. \quad (6.23)$$

Hinzu kommen noch die Randbedingungen.

### 6.3 Wärmeleitung in einem unbegrenzten Medium

Im unbegrenzten Medium läßt sich die Wärmeleitungsgleichung am einfachsten durch Fouriertransformation lösen [3]. Sei dazu die Temperaturverteilung bei  $t = 0$  vorgegeben:

$$T = T_0(x, y, z) . \quad (6.24)$$

Gesucht wird die Zeitentwicklung der Temperaturverteilung  $T(\mathbf{r}, t > 0)$ . Man entwickelt zunächst die gesuchte Funktion in ein Fourier-Integral:

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (6.25)$$

mit  $T_{\mathbf{k}}(t) = \int T(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x$ .

Für jede Fourier-Komponente der Temperatur,

$$T_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (6.26)$$

gilt mit der Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t T = \chi \Delta T$  :

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0 . \quad (6.27)$$

Daraus folgt die Zeitabhängigkeit der Temperatur  $T_{\mathbf{k}}$  als

$$T_{\mathbf{k}} = T_{0\mathbf{k}} e^{-k^2 \chi t} , \quad (6.28)$$

und mit  $T = T_0(\mathbf{r})$  für  $t = 0$ :

$$T_{0\mathbf{k}} = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3x' \quad (6.29)$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{r}, t) = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-k^2 \chi t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3x' \frac{d^3k}{(2\pi)^3} . \quad (6.30)$$

Das Integral über  $d^3k$  ist darstellbar als Produkt dreier gleichwertiger Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} \cos \beta \xi d\xi = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} e^{-\beta^2/(4\alpha)} , \quad (6.31)$$

wobei  $\xi$  einer der Komponenten des Vektors  $\mathbf{k}$  entspricht. Das analoge sin-Integral verschwindet, da sin eine ungerade Funktion ist.

Damit wird die zeitabhängige Temperaturverteilung bei gegebener Anfangsverteilung  $T_0$

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(\mathbf{r}') \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4\chi t}\right] d^3x'. \quad (6.32)$$

Hängt  $T_0$  nur von einer kartesischen Koordinate ab,  $T_0 = T_0(x)$ , so lässt sich die  $dy'dz'$ -Integration ausführen, und man bekommt

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}} \int T_0(x') \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4\chi t}\right] dx'. \quad (6.33)$$

Bei einer dreidimensionalen (radialsymmetrischen) anfänglichen  $\delta$ -Funktionsverteilung  $T_0(\mathbf{r}) = \text{const} \cdot \delta(\mathbf{r})$  ergibt sich durch Einsetzen in (6.32)

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{const}}{8(\pi\chi t)^{3/2}} e^{-r^2/(4\chi t)}. \quad (6.34)$$

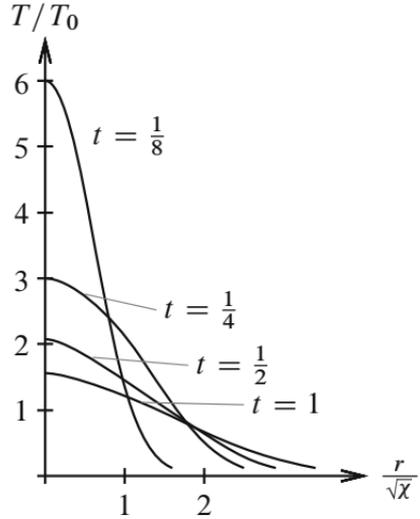
Bei  $r = 0$  nimmt die Temperatur proportional zu  $t^{3/2}$  ab, in der Umgebung nimmt sie zu.

Der zeitliche Verlauf der Temperaturverteilung wird im Wesentlichen durch den Exponentialfaktor bestimmt. Die Standardabweichung der Gauß-Funktion ist  $\sigma = \sqrt{2\chi t}$ , die Breite  $\Gamma = \sqrt{8 \ln 2} \sigma$ , d. h., der räumliche Verlauf der Temperatursausbreitung ist proportional zur Quadratwurzel aus der Zeit,  $l \propto \sqrt{t}$  (Abb. 6.1). Dementsprechend ist die Relaxationszeit für den Wärmeleitungsvorgang, in der sich die Temperaturen merklich angleichen,

$$\tau \propto \frac{l^2}{\chi}, \quad (6.35)$$

wobei  $l$  die Größenordnung der Abmessungen des Körpers ist, der zunächst ungleichmäßig erwärmt ist.

**Abb. 6.1** Temperaturverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten



Thermische Störungen breiten sich instantan über den ganzen Raum aus: Bei anfänglicher  $\delta$ -Funktion geht die Verteilung schon im nächsten Moment nur im Unendlichen asymptotisch gegen 0. (In räumlich begrenzten Medien kommen die Randbedingungen hinzu.)

## 6.4 Konvektion

Konvektion ist die Strömung in einer *ungleichmäßig erwärmten* Flüssigkeit [4]. Sind die Temperaturdifferenzen groß gegen die Temperaturveränderungen durch Wärmeentwicklung bei der Energiedissipation,

$$\delta T \gg \delta T_{\text{diss}}, \quad (6.36)$$

so kann man den Viskositätsterm in der Wärmetransportgleichung vernachlässigen,

$$\chi \Delta T \gg \frac{\nu}{2c_p} (\partial_k v_i + \partial_i v_k)^2 \quad (6.37)$$

und erhält für inkompressible Fluide

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T \quad (6.38)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}, \quad (6.39)$$

wobei  $\kappa$  wieder die Wärmeleitfähigkeit angibt. Zusammen mit den Navier-Stokes-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung wird Konvektion dadurch vollständig beschrieben.

Findet keine zeitliche Änderung der Temperaturverteilung statt, so liegt *stationäre Konvektion* vor. Da  $\partial_t T = 0$ , fallen die Zeitableitungen heraus, und es bleiben die Gleichungen

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T \quad \text{Konvektion,} \quad (6.40)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad \text{Navier-Stokes-Gleichungen und} \quad (6.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (6.42)$$

Die unbekanntenen Funktionen sind  $\mathbf{v}$ ,  $T$  und  $p/\rho$ , während  $\nu$  und  $\chi$  (im Allgemeinen konstante) Parameter sind.

Die Lösungen hängen über die *Randbedingungen* (z. B. fester Körper in der Strömung) von weiteren Größen ab, etwa:

- der Längenskala eines festen Körpers in der Strömung,
- der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  der Grundströmung,
- der charakteristischen Temperaturdifferenz  $T_1 - T_0$  zwischen Fluid und festem Körper.

Die Gleichung für  $T$  ist *linear* und *homogen*; sie kann deshalb mit einem beliebigen konstanten Faktor multipliziert werden. Also ist die Maßeinheit der Temperatur willkürlich wählbar. Wir wählen die übliche Einheit Kelvin [K].

Fünf Parameter charakterisieren also die Konvektion. Ihre Einheiten sind

$$[\nu] = [\chi] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}; \quad [u] = \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad [l] = \text{m}; \quad [T_1 - T_2] = \text{K}. \quad (6.43)$$

**Tab. 6.1** Prandtl-Zahlen für verschiedene Materialien bei 20° C

	$Pr$
Quecksilber	0,044
Luft	0,733
Wasser	6,75
Alkohol	16,6
Glycerin	7250

Daraus lassen sich zwei unabhängige dimensionslose Kombinationen bilden [5]:

- die *Reynolds-Zahl*  $Re = \frac{ul}{\nu}$ , vgl. (3.64), und
- die *Prandtl-Zahl*  $Pr = \frac{\nu}{\chi} = \frac{\text{kinematische Viskosität}}{\text{Temperaturleitfähigkeit}}$ .

Die Prandtl-Zahl, auch bekannt als Wärmeübertragungskennwert, ist eine Materialkonstante, die von  $T$ , aber nicht von den Eigenschaften der Strömung abhängt (s. Tab. 6.1). Für Gase ist sie von der Größenordnung 1, für Flüssigkeiten variiert sie stark.

Das Produkt von  $Re$  und  $Pr$  ist die *Péclet-Zahl*

$$Pe \equiv Re \cdot Pr = \frac{ul}{\chi}. \quad (6.44)$$

In die dimensionslose Funktion für die *Temperaturverteilung* gehen  $Re$  und  $Pr$  als Parameter ein,

$$\frac{T - T_0}{T - T_1} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, Re, Pr\right). \quad (6.45)$$

In die *Geschwindigkeitsverteilung* geht nur  $Re$  ein, da sie durch die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung bestimmt ist, in denen  $\chi$  bzw.  $Pr$  nicht vorkommen:

$$\frac{\mathbf{v}}{u} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, Re\right). \quad (6.46)$$

Den Wärmetransport zwischen Flüssigkeit und festem Körper charakterisiert die *Wärmeübergangszahl*  $\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{q}{T_1 - T_0}. \quad (6.47)$$

Dabei ist  $q = |\mathbf{q}|$ ,  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  die Wärmestromdichte durch die Körperoberfläche, und  $T_1 - T_0$  die Temperaturdifferenz zwischen festem Körper und Flüssigkeit.

---

## Literatur

1. Lienhard IV, J. H., Lienhard V, J.H.: A heat transfer textbook. 4. Aufl., Phlogiston Press, Cambridge, Massachusetts (2015)
2. Glück, B.: Simulationsmodell zweidimensionale Wärmeleitung. <http://www.berndglueck.de/waermeleitung.php> (2015)
3. Landau, L. D. und Lifschitz, E. M.: TP VI – Hydrodynamik, 5. Aufl., Akademie Verlag, Berlin (1991)
4. Stierstadt, K.: Thermodynamik: Von der Mikrophysik zur Makrophysik. Springer-Verlag (2010)
5. Haynes, W. M. (Hrsg.): CRC Handbook of Chemistry and Physics. 95. Aufl., CRC Press (2014/15)

---

## 7.1 Flüssigkeitsgemische

Bisher haben wir das Fluid als homogen angenommen. Bei *Gemischen*, deren Zusammenhang vom Ort abhängt, werden die hydrodynamischen Gleichungen wesentlich abgeändert.

Für ein *Gemisch aus zwei Komponenten* ist die Konzentration definiert als

$$c \equiv \frac{m_1}{M}, \quad (7.1)$$

wobei  $M = m_1 + m_2$  die Gesamtmasse im Volumenelement und  $m_1$  die erste Komponente angibt. Die Verteilung der Konzentration ist zeitabhängig:

1. Jedes Teilvolumen bewegt sich als Ganzes mit unveränderter Zusammensetzung. Es handelt sich dann um eine *mechanische Durchmischung*. Diese Konzentrationsänderung ist *reversibel* und bewirkt *keine* Energiedissipation. (Beispiel: Paraffin in  $\text{H}_2\text{O}$ .)
2. Die Zusammensetzung ändert sich durch molekularen Massentransport aus einem Teilvolumen in ein anderes. Der Konzentrationsausgleich geschieht durch *Diffusion* und ist zeitlich *irreversibel*.

Neben Wärmeleitung und Viskosität ist *Diffusion* die Ursache der Energiedissipation in einem Flüssigkeitsgemisch.

*Ohne Diffusion* bleibt die Zusammensetzung eines Fluidelements bei der Bewegung unverändert; es gilt eine Kontinuitätsgleichung für den

Substanzstrom  $\rho c \mathbf{v}$  ( $c = m_1/M$ ):

$$\partial_t (\rho c) + \nabla \cdot (\rho c \mathbf{v}) = 0. \quad (7.2)$$

Integration mit dem Gauß'schen Satz ergibt

$$\partial_t \int \rho c dV = - \oint \rho c \mathbf{v} d\mathbf{f}. \quad (7.3)$$

(Der Strom für die zweite Substanz ist analog  $\rho(1-c)\mathbf{v}$ .)

Mit *Diffusion* kommt der sogenannte *Diffusionsstrom* hinzu,

$$\partial_t (\rho c) + \nabla \cdot (\rho c \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{i}, \quad (7.4)$$

auch bezeichnet als sechste Grundgleichung der Hydrodynamik bei Gemischen. In integraler Form lautet die Gleichung

$$\partial_t \int \rho c dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.5)$$

Mithilfe der thermodynamischen Größen – die jetzt jedoch auch von der Konzentration  $c$  abhängen – erhalten wir außerdem die verallgemeinerte *Wärmetransportgleichung* (auch: die fünfte Gleichung). Sie folgt aus der *Energieerhaltung*

$$\partial_t \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{visc}} \quad (7.6)$$

durch Umformung mittels der Kontinuitäts- und der Navier-Stokes-Gleichungen. Jetzt enthalten die Ausdrücke für *Energie* und *Enthalpie* jedoch einen zusätzlichen Term mit dem Differential der Konzentration:

1. das Energiedifferential  $d\epsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu dc$  und
2. das Enthalpiedifferential  $dw = T ds + \frac{1}{\rho} d\rho + \mu dc$

mit dem chemischen Potenzial des Gemisches  $\mu$ , das proportional zur mittleren Teilchenzahl ist.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Analog ist die Temperatur proportional zur mittleren Energie,  $T \propto \langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ .

In der Ableitung  $\rho \partial_t \epsilon$  kommt zusätzlich der Term  $\rho \mu \partial_t c$  vor; analog kommt zu  $-\mathbf{v} \cdot \nabla p$  der Term  $\rho \mu \mathbf{v} \cdot \nabla c$  hinzu. Damit wird die Gleichung für die zeitliche Änderung der Energie zu

$$\partial_t \left[ \frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right] \quad (7.7)$$

$$= -\nabla j_{\text{visc}} + \rho T [\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s] - \sigma'_{ik} \partial_k v_i + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mu \nabla \cdot \mathbf{i}. \quad (7.8)$$

Damit der Energieerhaltungssatz erfüllt ist, muss demnach gelten:

$$\rho T [\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s] = \sigma'_{ik} \partial_k v_i - \nabla \cdot (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) - \mathbf{i} \nabla \mu \quad (7.9)$$

mit  $\nabla \cdot \mathbf{q} - \mu \nabla \cdot \mathbf{i} = \nabla \cdot (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) + \mathbf{i} \nabla \mu$ . Diese Gleichung für die zeitliche Änderung der Entropie unter Berücksichtigung der Diffusion ist eine Verallgemeinerung der Wärmetransportgleichung.

Um die Gleichungen zu lösen, müssen der *Diffusionsstrom*  $\mathbf{i}$  und der *Wärmestrom*  $\mathbf{q}$  durch die *Temperatur- und Konzentrationsgradienten* ausgedrückt werden. Beide Ströme hängen im Allgemeinen von beiden Gradienten ab. Sind diese klein, kann man  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{q}$  als lineare Funktionen von  $\nabla \mu$  und  $\nabla T$  ansetzen:

$$\mathbf{i} = -\alpha \nabla \mu - \beta \nabla T, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{q} = -\delta \nabla \mu - \gamma \nabla T + \mu \mathbf{i}. \quad (7.11)$$

Sofern sich Temperatur und Konzentration nur wenig ändern und es keinen wesentlichen Druckgradienten gibt, lassen sich diese Gleichungen mithilfe thermodynamischer Relationen umformen zu

$$\partial_t c = D \left[ \Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T \right], \quad (7.12)$$

$$\partial_t T - \frac{k_T}{c_p} (\partial_c \mu)_{p,T} \partial_t c = \chi \Delta T, \quad (7.13)$$

d. h., *Temperatur* und *Konzentration* sind durch ein *lineares* Gleichungssystem bestimmt.

Man definiert Diffusionskoeffizient  $D$  und Thermodiffusionskoeffizient  $k_T D$  durch

$$D = \frac{\alpha}{\rho} (\partial_c \mu)_{p,T} \quad \text{und} \quad (7.14)$$

$$k_T D = \frac{\alpha T}{\rho} (\partial_T \mu)_{c,p} + \beta. \quad (7.15)$$

Bei *kleinen Konzentrationen* wird  $k_T D \rightarrow 0$ ; es bleibt dann eine reine Diffusionsgleichung:

$$\partial_t c = D \Delta c \quad (7.16)$$

zuzüglich der Randbedingungen. Die Diffusionsgleichung hat dieselbe Gestalt wie die Wärmeleitungsgleichung (6.38) für eine *ruhende* Flüssigkeit,

$$\partial_t T = \chi \Delta T, \quad (7.17)$$

so dass alle Formeln aus Kap. 6 übertragen werden können mit

$$T \rightarrow c, \quad (7.18)$$

$$\chi \rightarrow D. \quad (7.19)$$

### Beispiel

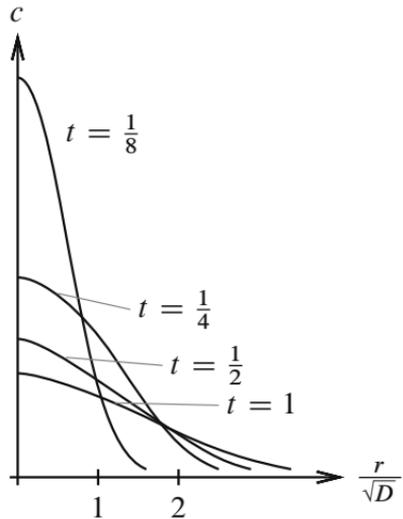
Für die Verteilung einer gelösten Substanz mit  $\delta$ -Funktions-Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  ergibt sich

$$c(r, t) = \frac{M}{8\rho (\pi Dt)^{3/2}} e^{-r^2/(4Dt)} \quad (7.20)$$

in dreidimensionalen Polarkoordinaten, wobei  $M$  die Gesamtmenge der gelösten Substanz ist.

Die Zeitverteilung der Konzentration im Diffusionsvorgang wird in Abb. 7.1 gezeigt; die Standardabweichung ist für eine Dimension gegeben durch  $\sigma = \sqrt{2Dt}$ , bei drei Dimensionen durch  $\sigma = \sqrt{6Dt}$ ; die Breite ist jeweils  $\Gamma = \sqrt{8 \ln 2} \sigma$ .

**Abb. 7.1** Konzentrationsverteilung zu verschiedenen Zeitpunkten



## 7.2 Brown'sche Bewegung

Aufgrund molekularer Stöße machen in einer Flüssigkeit suspendierte Teilchen eine ungeordnete Zitterbewegung (Abb. 7.2), die der Botaniker Brown<sup>2</sup> bereits 1827 entdeckt hatte und deren Ursache bis zu Einsteins<sup>3</sup> Arbeit 1905 unbekannt blieb [1].

Sei zu  $t = 0$  ein Brown'sches Teilchen (z. B. Blütenpollen in Wasser) im Koordinatenursprung; seine Bewegung wird als Diffusionsprozess beschrieben, und die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* tritt an die Stelle der *Konzentration*. Dann lässt sich die Lösung der Differenzialgleichung für

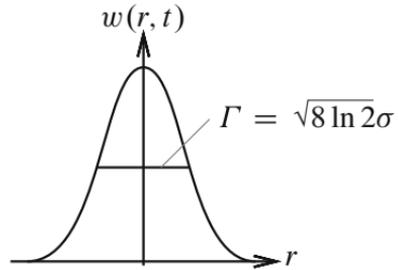
**Abb. 7.2** Brown'sche Bewegung



<sup>2</sup> Robert Brown (\*1773 Montrose, †1858 London), schottischer Botaniker.

<sup>3</sup> Albert Einstein (\*1879 Ulm, †1955 Princeton).

**Abb. 7.3** Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei Brown'scher Bewegung



die Konzentration (7.16),

$$\partial_t W = D \Delta W, \quad (7.21)$$

verwenden:

$$W(r, t) = \frac{M}{8\rho (\pi DT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right], \quad (7.22)$$

abermals in dreidimensionalen Kugelkoordinaten formuliert. Voraussetzung dafür ist, dass die Teilchen der gelösten Substanz miteinander nicht wechselwirken, so dass die Teilchenbewegung unabhängig ist vom jeweils nächsten Teilchen.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Brown'sche Teilchen zur Zeit  $t$  in einem Abstand zwischen  $[r, r + dr]$  ist angegeben durch  $w(r, t)dr$ . Nimmt man an, dass  $M/\rho \equiv 1$ , und multipliziert man das Volumen der Kugelschale  $4\pi r^2 dr$  hinzu, so erhält man (Abb. 7.3)

$$w(r, t)dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} \exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right] r^2 dr. \quad (7.23)$$

Das mittlere Quadrat des Abstandes vom Ausgangspunkt des Brown'schen Teilchens zur Zeit  $t$  ist (mit  $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$ )

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 w(r, t) dr = 6Dt, \quad (7.24)$$

woraus man auf die Proportionalität

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \propto \sqrt{t} \quad (7.25)$$

schließt.

Der *Diffusionskoeffizient*  $D$  lässt sich aus der *Beweglichkeit*  $b$  berechnen: Es wirke eine konstante äußere Kraft (z. B. die Schwerkraft)  $\mathbf{F}$  auf die Brown'schen Teilchen. Im *stationären* Zustand ist sie gleich dem *Widerstand*  $\mathbf{v}/b$ , mit  $b = \text{const}$ , gegen die Teilchenbewegung:

$$\mathbf{v} = b\mathbf{F}, \quad (7.26)$$

wobei die Beweglichkeit  $b$  sich berechnen lässt aus den hydrodynamischen Gleichungen. Bei kugelförmigen Teilchen gibt die *Stokes'sche Formel* den Widerstand an:

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R\mathbf{v}, \quad (7.27)$$

so dass

$$b = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{F}|} = \frac{1}{6\pi\eta R} \quad (7.28)$$

sein muss.<sup>4</sup>

Die lineare *Beziehung* zwischen  $b$  und  $D$  wird *Einstein-Relation* genannt,

$$D = Tb. \quad (7.31)$$

---

<sup>4</sup> Bei nichtkugelförmigen Teilchen hängt der Widerstand auch von der Bewegungsrichtung ab:

$$F_i = a_{ik} v_k, \quad (7.29)$$

wobei  $a_{ik}$  ein symmetrischer Tensor ist. Zur Berechnung von  $b$  mittelt man dann über alle Orientierungen, so dass mit den Hauptachsenwerten  $a_1, a_2$  und  $a_3$  von  $a_{ik}$  für die Beweglichkeit folgt:

$$b = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right). \quad (7.30)$$

Der Diffusionsstrom ist

$$\mathbf{i} = -\rho D \nabla c + \rho c b \mathbf{F}. \quad (7.32)$$

Dabei ist der erste Term proportional zum Konzentrationsgradienten, und der zweite Term ist der äußeren Kraft geschuldet, für die  $\rho c \mathbf{v} = \rho c b \mathbf{F}$  gilt. Für den Diffusionsstrom folgt also

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial_c \mu)_{T,p}} \nabla \mu + \rho c b \mathbf{F} \quad (7.33)$$

mit dem chemischen Potenzial der suspendierten Teilchen  $\mu$ .

Das chemische Potenzial hängt von der Konzentration ab:

$$\mu = T \ln c + \psi(p, T) \quad (7.34)$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} = -\frac{\rho D c}{T} \nabla \mu + \rho c b \mathbf{F}. \quad (7.35)$$

Im *thermodynamischen Gleichgewicht* gibt es keine Diffusion,  $\mathbf{i} = 0$ . Mit äußerem Feld muss im Gleichgewicht gelten:

$$\mu + U = \text{const}, \quad (7.36)$$

wenn  $U$  die potenzielle Energie der suspendierten Teilchen im Feld angibt. Also ist

$$\nabla \mu = -\nabla U = \mathbf{F}, \quad (7.37)$$

und mit  $\mathbf{i} = 0$  folgt

$$0 = -\frac{\rho D c}{T} \mathbf{F} + \rho c b \mathbf{F} \quad (7.38)$$

und also die *Einstein-Relation*  $D = T b$  für die Beziehung zwischen Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient, die über die *Temperatur* verknüpft sind.

Einsetzen der Beweglichkeit bei kugelförmigen Teilchen (7.28) ergibt für  $k_B \equiv 1$

$$D = \frac{T}{6\pi\eta R}, \quad (7.39)$$

die *translatorische* Diffusion<sup>5</sup> suspendierter Brown'scher Teilchen.<sup>6</sup>

Die Beschreibung von Diffusionsprozessen analog zur Brown'schen Bewegung spielt auch heute eine sehr große Rolle in vielen Forschungszweigen – nicht nur in der Physik einschließlich Umweltphysik und Astronomie, sondern vor allem auch in der Chemie und Biologie [2–4].

---

### 7.3 Diffusion in relativistischen Systemen

Diffusion spielt auch eine Rolle in relativistischen Systemen. Dies sind zunächst Vielkörpersysteme wie Atomkerne, die aus *Baryonen* (Protonen und Neutronen) bestehen. In Teilchenbeschleunigern (Abb. 7.4) können sie relativistische Energien erreichen.

Typische Beschleuniger für derartige Experimente sind

- das Super Proton Synchrotron *SPS*, CERN: Fixed-Target-Experimente mit schweren Ionen

$$E_L = 158 \frac{\text{GeV}}{\text{Teilchen}} {}^{208}\text{Pb} + {}^{208}\text{Pb}, \quad (7.41)$$

$$E_{c.m.} = \sqrt{s_{NN}} = [2u^2 + 2E_L u]^{1/2} \approx 17.3 \text{ GeV} \quad (7.42)$$

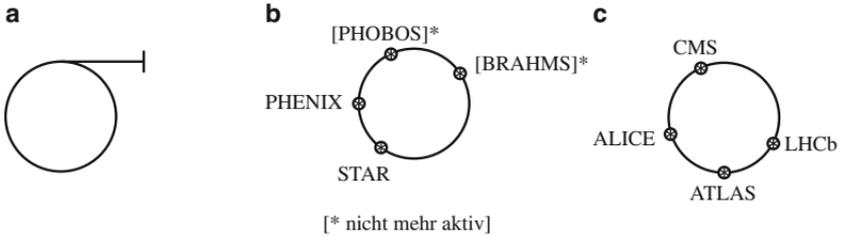
---

<sup>5</sup> Es gibt auch eine Brown'sche Rotations-/Diffusionsbewegung, auf die aber nicht eingegangen wird.

<sup>6</sup> In der Einstein'schen Arbeit wird die folgende Notation verwendet:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta d} \quad (7.40)$$

mit der universellen Gaskonstante  $R \approx 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$ , der Avogadro-Zahl  $N = 6,03 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  und dem Radius  $d$  (entspricht  $R$  in unserer Konvention). Die Boltzmann-Konstante  $k_B = 1,3 \cdot 10^{23} \text{ J/K}$  ist die auf ein Molekül bezogene Gaskonstante; mit  $k_B = R/N \equiv 1$  entspricht das dem obigen Resultat.



**Abb. 7.4** Schemaskizzen verschiedener Teilchenbeschleuniger mit Detektoren: **a** CERN SPS; **b** RHIC, Brookhaven National Laboratory; Umfang  $u = 3,8$  km; **c** LHC, CERN; Umfang  $u = 27$  km

mit der Nukleonenmasse  $u = 938 \text{ MeV}$ ;  $E_{c.m.}$  ist die Schwerpunktsenergie pro Teilchenpaar (s. Abb. 7.4a).

- der Relativistic Heavy Ion Collider RHIC, Brookhaven (BNL):

$$100 \frac{\text{GeV}}{\text{Teilchen}} {}^{197}_{79}\text{Au} + 100 \frac{\text{GeV}}{\text{Teilchen}} \text{Au}, \quad (7.43)$$

$$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200 \text{ GeV} = 0,2 \text{ TeV}. \quad (7.44)$$

Der RHIC besteht aus sechs *intersections* und ursprünglich vier, jetzt noch zwei Experimenten (s. Abb. 7.4b).

- der Large Hadron Collider LHC, CERN:

$$2,76 \frac{\text{TeV}}{\text{Teilchen}} {}^{208}_{82}\text{Pb} + 2,76 \frac{\text{TeV}}{\text{Teilchen}} {}^{208}_{82}\text{Pb}, \quad (7.45)$$

$$\sqrt{s_{\text{NN}}} = 5,52 \text{ TeV} \quad (7.46)$$

mit den vier großen Experimenten ATLAS, CMS, ALICE und LHCb (Abb. 7.4c), von denen die ersten drei auch für Experimente mit schweren Ionen geeignet sind. Die stark Lorentz-kontrahierten Kollisionspartner (Abb. 7.5) sind charakterisiert durch

- Teilchenzahlen  $N_1, Z_1; N_2, Z_2$ ,
- Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ ,
- Stoßparameter  $b$ ,
- Lorentz-Kontraktion  $d(v) = d_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

**Abb. 7.5** Lorentz-kontrahierte Stoßpartner



Stoßparameter und Lorentz-Kontraktion sind nicht direkt messbar, gehen aber in die theoretische Beschreibung ein.

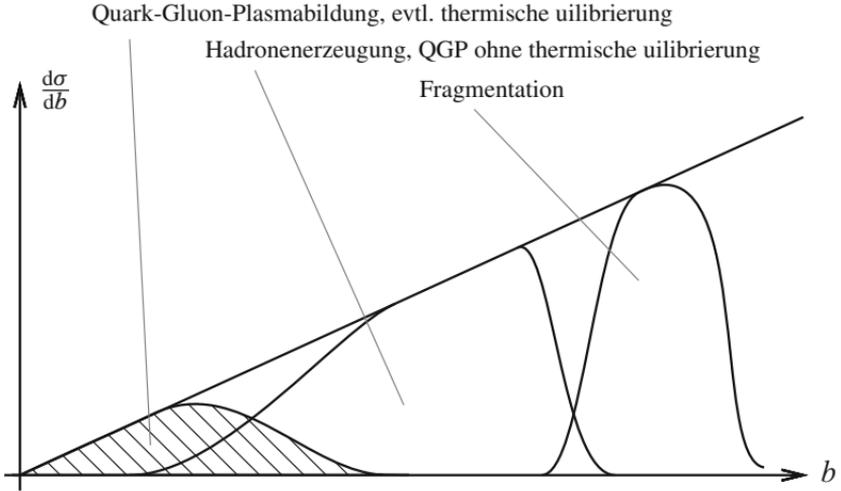
1. In *zentralen Stößen* bei Energiedichten über dem kritischen Wert  $\epsilon_{\text{krit}} \approx 1,5 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}^3}$  wird ein kurzlebiges *Quark-Gluon-Plasma* für  $\approx 1 \cdot 10^{-23}$  s gebildet. Es entspricht dem Urzustand der Materie im Universum bis  $\approx 10 \mu\text{s}$  nach dem Urknall (Abb. 7.6).
2. Im Verlauf der Kollision werden aus der verfügbaren relativistischen Energie in zentralen Stößen so viele Teilchen erzeugt, dass eine nicht-gleichgewichtstatistische Betrachtungsweise gerechtfertigt ist (Hadronen sind stark wechselwirkende Teilchen):
  - bei SPS-Energien  $\sim 1700$  geladene Hadronen,
  - bei RHIC-Energien  $\sim 5400$  geladene Hadronen,
  - bei LHC-Energien  $\sim 17.500$  geladene Hadronen.

Es wird dabei die verfügbare relativistische Energie

$$E_{av} = \sqrt{s} - u (A_1 + A_2) \quad (7.47)$$

in Ruhemasse und kinetische Energie erzeugter Teilchen umgewandelt. In transversaler Richtung (senkrecht zum Strahl) sind die Energieverteilungen nahe am statistischen Gleichgewicht.

In *longitudinaler* Richtung – parallel zum Strahl – sind die Verteilungsfunktionen entfernt vom thermodynamischen Grenzfall. Dies gilt



**Abb. 7.6** Kollisionseffekte abhängig vom Stoßparameter

vor allem für die Verteilung der *Rapidität*<sup>7</sup> der Teilchen

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}} = \operatorname{arctanh} \frac{p_{\parallel}}{E} \approx -\ln \tan \frac{\vartheta}{2} \equiv \eta \quad (7.48)$$

mit dem Longitudinalimpuls  $p_{\parallel}$ , dem Streuwinkel  $\vartheta$ , und der sogenannten Pseudorapidität  $\eta$ . Als Folge von *Stößen* und *Teilchenerzeugung* genügt die Verteilungsfunktion der Rapidität der an der Kollision teilnehmenden Baryonen einer Diffusionsgleichung; in linearer Näherung ist für  $R = R(y, t)$  [5]

$$\partial_t R = \frac{1}{\tau_y} \partial_y [(y - y_{\text{eq}}) R] + \partial_{yy}^2 [D_y R] \quad (7.49)$$

mit dem Gleichgewichtswert der Rapidität  $y_{\text{eq}}$  ( $= 0$  für symmetrische Systeme), der Rapiditätsrelaxationszeit  $\tau_y$  und dem Diffusionskoeffizienten

<sup>7</sup> Die *Rapidität* ist das relativistische (additive) Analogon der Geschwindigkeit.

enten  $D_y$ , bestimmt durch die Verbreiterung der Verteilungsfunktion:

$$D_y \propto \frac{T}{\tau_y}. \quad (7.50)$$

Dies ist das *Dissipations-Fluktuations-Theorem*, das analog zur Einstein-Relation (7.31) bei der Brown'schen Bewegung die Rapiditätsrelaxation und die Diffusion linear über die Gleichgewichtstemperatur  $T$  verbindet.

Die Lösung der linearen Diffusionsgleichung ist mit der Anfangsbedingung  $R(y, t = 0) = \delta(y - y_b)$  für die Strahlrapidität  $y_b = \sqrt{s_{NN}}/m$  ( $m$  die Nukleonenmasse)

$$R(y, t) = \left[ \sqrt{2\pi} \sigma_y(t) \cdot 2 \right]^{-1} \left( \exp \left[ -\frac{(y + y_b e^{-t/\tau_y})^2}{2\sigma_y^2(t)} \right] + \exp \left[ -\frac{(y - y_b e^{-t/\tau_y})^2}{2\sigma_y^2(t)} \right] \right) \quad (7.51)$$

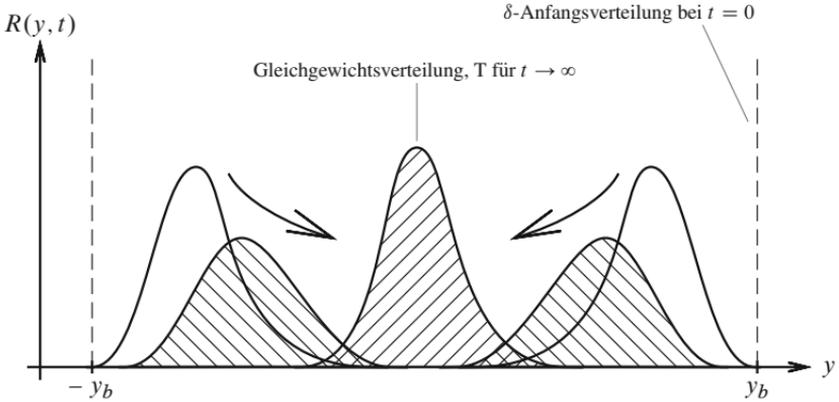
für symmetrische Systeme und zwei Quellen. Die Varianz ist

$$\sigma_y^2(t) = D_y \tau_y \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2t}{\tau_y} \right) \right] = \frac{T}{2k} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2t}{\tau_y} \right) \right], \quad (7.52)$$

wobei  $k$  die Krümmung eines parabolischen treibenden Potentials im  $y$ -Raum ist.

Für große Zeiten wird aus den beiden getrennten Verteilungen eine einzige Verteilung (Abb. 7.7), die bei  $y = y_{\text{eq}}$  zentriert ist und für  $t \rightarrow \infty$  in die Gleichgewichtsverteilung mit Temperatur  $T$  übergeht, wie sie dem thermischen Modell zugrundeliegt. Die im relativistischen Diffusionsmodell berechneten Verteilungsfunktionen für sogenannte Netobaryonen (Baryonen minus erzeugte Antibaryonen) können dann mit Messwerten verglichen werden, und ermöglichen Voraussagen. Da in der Regel nur *geladene* Hadronen gemessen werden, vergleicht man mit Nettoprotonenverteilungen.

Für geladene Hadronen, die in relativistischen Schwerionenreaktionen *erzeugt* werden, sind die Voraussetzungen für die Anwendung des

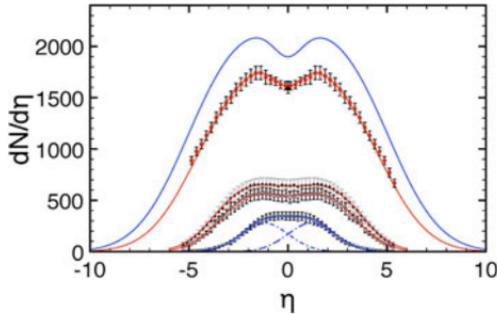


**Abb. 7.7** Schematische Darstellung der Rapidity-Relaxation für Nettobaryonen (= Baryonen minus erzeugte Antibaryonen)

relativistischen Diffusionsmodell sogar noch besser erfüllt als für Nettoprotonen, da das Teilchenensemble größer ist: In einer zentralen Kollision zwischen Bleiionen am LHC bei 2.76 TeV Schwerpunktsenergie werden ca. 17 500 geladene Hadronen erzeugt, davon etwa 80 % Pionen. Die (Pseudo-) Rapidityverteilungen (Abb. 7.8) und ihre Zentralitätsabhängigkeiten werden durch das Modell gut wiedergegeben, wenn zusätzlich zu den beiden Fragmentationsquellen auch eine dritte Quelle für die Hadronenerzeugung bei mittleren Rapiditäten eingeführt wird. Sie beruht wesentlich auf der Teilchenproduktion in Gluon-Gluon-Stößen bei hohen Energien [6].

Auch in asymmetrischen Systemen wie Kollisionen von Protonen mit Blei am LHC bei einer Schwerpunktsenergie von 5.02 TeV gibt das Diffusionsmodell mit geeignet gewählten Parametern die Daten gut wieder.

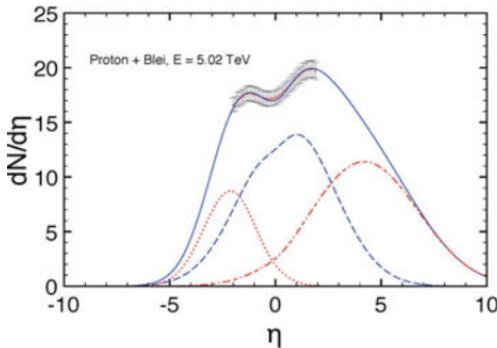
In der Abb. 7.9 ist das Ergebnis einer *Minimum bias* Kollision von Proton und Bleikern dargestellt, bei der über alle Stoßparameter gemittelt wird (d. h. es wird keine bestimmte Zentralitätsklasse ausgewählt). In der Fragmentationsquelle, die dem einlaufenden Proton entspricht, werden vergleichsweise wenige geladene Hadronen erzeugt. Die komplementäre Fragmentationsquelle, die aus dem einlaufenden Bleikern hervorgeht, produziert deutlich mehr Teilchen. Der wesentliche mikroskopische Me-



**Abb. 7.8** Verteilungen erzeugter geladener Teilchen in relativistischen Schwerionenreaktionen bei fünf Schwerpunktsenergien im relativistischen Diffusionsmodell [6] im Vergleich mit Daten [7, 8] der Schwerionencollider RHIC und LHC sowie einer Voraussage bei 5.5 TeV

chanismus sind in beiden Fällen Kollisionen von Valenzquarks im Projektil mit Gluonen im jeweils anderen Kern.

Bei Schwerpunktsenergien von mehr als ca. 20 GeV pro Teilchenpaar kommt zu den beiden Fragmentationsquellen eine dritte Quelle, die beim (zentralitätsabhängigen) Gleichgewichtswert  $y_{eq}$  der Rapidität zentriert ist (gestrichelte Kurve in Abb. 7.9). Sie beruht wesentlich auf



**Abb. 7.9** Pseudorapidity-Verteilungen erzeugter geladener Teilchen in relativistischen Proton-Blei Kollisionen bei 5.02 TeV Schwerpunktsenergie im relativistischen Diffusionsmodell im Vergleich mit Daten [9] vom LHC (aus Wolschin 2013, © IOP Publishing. Reproduced with permission. All rights reserved)

Glukon-Glukon Stößen; durch die Jacobi-Transformation von der Rapidität  $y$  zur Pseudorapidität  $\eta$  ist sie deutlich von einer Gaußverteilung verschieden. Die insgesamt in dieser Quelle erzeugte Hadronenzahl wächst mit der dritten Potenz des Logarithmus der Schwerpunktsenergie an [6] und übertrifft deshalb bei hohen LHC Energien die Zahl der in den Fragmentationsquellen erzeugten geladenen Hadronen.

Das relativistische Diffusionsmodell ermöglicht ein Verständnis vieler Phänomene bei der Hadronenerzeugung in hochenergetischen Schwerionenreaktionen. Es ersetzt jedoch nicht eine Lorentz-invariante Formulierung der relativistischen Hydrodynamik, die in Grundzügen im nächsten Kapitel für ideale Fluide vorgestellt wird.

---

## Literatur

1. Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Physik* 17, 549 (1905)
2. Jost, W.: *Diffusion in solids, liquids, gases*. 6th printing. Academic Press, New York NY (1970)
3. Crank, J.: *The Mathematics of Diffusion*. 2. Aufl., Oxford University Press, Oxford (1980)
4. Cussler, E. L.: *Diffusion. Mass Transfer in Fluid Systems*. 2. Aufl., Cambridge University Press (1997)
5. Wolschin, G.: Relativistic diffusion model. *Eur. Phys. J. A5*, 85 (1999)
6. Wolschin, G: Ultraviolet energy dependence of particle production sources in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev. C* 91, 014905 (2015)
7. Alver, B. et al.: Charged-particle multiplicity and pseudorapidity distributions measured with the PHOBOS detector in Au+Au, Cu+Cu, d+Au, and p+p collisions at ultrarelativistic energies. *Phys. Rev. C* 83, 024913 (2011).
8. Guilbaud, M. et al. (ALICE Collaboration): Pseudorapidity density of charged particles and its centrality dependence in Pb-Pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  TeV. *Nucl. Phys. A* 904, 381c (2013).
9. Abelev, B. et al. (ALICE Collaboration): Pseudorapidity Density of Charged Particles in p+Pb Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$  TeV. *Phys. Rev. Lett.* 110, 032301 (2013)

Relativistische Effekte müssen in der Hydrodynamik berücksichtigt werden, wenn

1. die Geschwindigkeit der *makroskopischen* Fluidströmung  $|\mathbf{v}|$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  vergleichbar wird *oder*
2. die Geschwindigkeiten der *mikroskopischen* Bewegung der Fluidteilchen mit  $c$  vergleichbar werden.

Sind starke Gravitationsfelder vorhanden, kann es notwendig sein, auch die allgemeine Relativitätstheorie zu berücksichtigen; hier beschränken wir uns auf speziell-relativistische Effekte.

Die relativistische Hydrodynamik beschreibt die Dynamik von Fluiden mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors und der relevanten Erhaltungssätze. Ist die mittlere freie Weglänge zwischen Kollisionen klein verglichen mit der vom Beobachter benutzten Längenskala, so ist die Flüssigkeit *ideal*. Für einen mitbewegten Beobachter ist sie auch *isotrop*. In diesem Fall wird der Energie-Impuls-Tensor besonders einfach. Die relativistischen Bewegungsgleichungen entsprechen dann den Euler-Gleichungen im nichtrelativistischen Fall; sie sind invariant gegenüber Lorentz-Transformation.

Wir diskutieren zunächst den Energie-Impuls-Tensor eines idealen relativistischen Fluids in einem flachen Minkowski-Raum mit dem metrischen Tensor  $g^{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

## 8.1 Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit

Im Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (i, k, l = 1, 2, 3) \quad (8.1)$$

steht das Element  $T^{00} = T_{00}$  für die Energiedichte,  $cT^{0i}$  ist die vektorielle Energiestromdichte (nichtrelativistisch:  $\mathbf{j}$ ) und  $\frac{T^{0i}}{c} = -\frac{T_{0i}}{c}$  die Impulsstromdichte. Die kontravarianten Koordinaten bezüglich eines festen Bezugssystems sind  $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  mit  $x^0 = ct$ .

In einem *lokalen Ruhesystem*, d. h. bei ruhendem Volumenelement, für welches das *Pascal'sche Gesetz* (2.5.1) gilt, ist der von einem bestimmten Flüssigkeitselement ausgeübte Druck in allen Richtungen gleich groß und überall senkrecht zu der Fläche, auf die er wirkt:

$$T^{ik} df_k = p df_i \quad (8.2)$$

$$\Rightarrow T_{ik} p \delta_{ik} . \quad (8.3)$$

Die Komponenten der Impulsstromdichte  $\frac{T^{0i}}{c}$  sind im lokalen Ruhesystem gleich null.

$T^{00} \equiv \epsilon$  ist die Dichte der (*inneren*) Energie des Fluids im lokalen Ruhesystem. Also ist der *Energie-Impuls-Tensor* im lokalen *Ruhesystem* (alle nicht ausgedruckten Matrixelemente sind gleich null):

$$t^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} . \quad (8.4)$$

Wir wollen ihn nun in ein beliebiges (bewegtes) Bezugssystem transformieren.

Die Komponenten der *Vierergeschwindigkeit* der Flüssigkeitsströmung  $u^\alpha$  im lokalen Bezugssystem sind  $u^0 = 1$  und  $u^i = 0$ . Im bewegten System ist der *Energie-Impuls-Tensor*

$$T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta} \quad (8.5)$$

mit dem metrischen Tensor

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

und der Enthalpie pro Volumeneinheit  $w = \epsilon + p$  (auch  $\epsilon$  ist hier auf die Volumeneinheit bezogen, während es im nichtrelativistischen Fall auf die Masseneinheit bezogen war). Wir sehen sogleich, dass  $T^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta}$  für  $u^0 = 1, u^i = 0$ .

In dreidimensionaler Schreibweise sind die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$T^{ik} = \frac{w v^i v^k}{c^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]} + p \delta^{ik}, \quad (8.7)$$

$$T^{0i} = \frac{w v^i}{c \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]}, \quad (8.8)$$

$$T^{00} = \frac{w}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - p = \frac{\epsilon + p \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.9)$$

Der *nichtrelativistische Grenzfall*  $v \ll c$  beschreibt kleine Geschwindigkeiten der inneren (mikroskopischen) Bewegungen der Fluidteilchen.

Beim Grenzübergang ist zu beachten, dass die relativistische innere Energie  $\epsilon$  die Ruheenergie  $Nmc^2$  der  $N$  einzelnen Fluidteilchen enthält. Die *Teilchenzahldichte*  $n$  wird jetzt auf die Einheit des Ruhevolumens bezogen. In den *nichtrelativistischen* Ausdrücken wird jedoch die Energiedichte auf die Volumeneinheit im Laborsystem bezogen, in dem sich das Fluidelement bewegt:

$$mn \xrightarrow{v \ll c} \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2} \quad (8.10)$$

$$\Rightarrow mnc^2 \rightarrow \rho c^2 - \frac{\rho v^2}{2} \quad (8.11)$$

mit der nichtrelativistischen Massendichte  $\rho = \frac{m}{V}$ , der nichtrelativistischen Energiedichte  $\epsilon \ll \rho c^2$  und dem nichtrelativistischen Druck  $p \ll \rho c^2$ . Hier ist  $\rho c^2$  die Ruheenergie des Systems. Daraus folgt der nichtrelativistische Grenzwert für die Energiedichte  $T^{00}$ :

$$T_{\text{nr}}^{00} = \rho c^2 + \epsilon + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (8.12)$$

wobei die letzten beiden Summanden der nichtrelativistischen Energiedichte entsprechen, sowie der Impulsstromdichtetensor

$$T_{\text{nr}}^{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}. \quad (8.13)$$

Beim Übergang zum nichtrelativistischen Grenzfall geht der einfache Zusammenhang zwischen Impulsdichte und Energiestromdichte verloren, weil die nichtrelativistische Energie die Ruheenergie nicht enthält:  $c^2 T_{\text{nr}}^{0i} / c \neq \mathbf{j}$ .

---

## 8.2 Relativistische Bewegungsgleichungen

Für ideale Fluide (d. h. analog zu den *Euler-Gleichungen*) folgen die Bewegungsgleichungen im relativistischen Fall direkt aus der *Energie-/Impulserhaltung* mit dem Energie-Impuls-Tensor aus dem vorigen Kapitel:

$$\partial_\beta T_\alpha^\beta = 0 \quad (8.14)$$

mit  $T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$  und der Enthalpie pro Volumeneinheit  $w = \epsilon + p$ . In diesem Energie-Impuls-Tensor sind dissipative Prozesse (Viskosität, Wärmeleitung) *noch nicht* berücksichtigt, daher ist er nur für ideale Fluide gültig. Die Ableitung des Analogons zu den Navier-Stokes-Gleichungen ist komplizierter, da der Energie-Impuls-Tensor dissipative Korrekturterme enthält [1].

Die *Teilchenzahlerhaltung* wird durch das relativistische Analogon der *Kontinuitätsgleichung* ausgedrückt:

$n^\alpha$  ist der Vierervektor des Teilchenstromes,  $n^0$  die Teilchenzahldichte und  $n^i$  der Vektor des Teilchenstroms, wobei

$$n^\alpha = n u^\alpha \quad \text{mit der skalaren Teilchenzahldichte } n, \quad (8.15)$$

$$u^\alpha = \left( \gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad \text{mit } \gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.16)$$

In relativistischen Systemen mit Teilchenerzeugung wird die Teilchenzahl durch die Bedingungen des thermischen Gleichgewichts festgelegt.

Die *Kontinuitätsgleichung* besagt, dass die Viererdivergenz des Stromvektors verschwindet,

$$\partial_\alpha (n u^\alpha) = 0. \quad (8.17)$$

Zusammen mit dem Energie-/Impulstensor  $T^{\alpha\beta} = w u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$  folgt durch Differenzieren

$$\partial_\beta T_\alpha^\beta = u_\alpha \partial_\beta (w u^\beta) + w u^\beta \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha p \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.18)$$

wegen der Energie-/Impulserhaltung. Durch Projektion auf die Richtung von  $u^\alpha$  und unter Annahme der Normalisierung  $u_\alpha u^\alpha = 1$  sowie mit Verwendung der Invarianz des Viererskalarprodukts, aus der  $u_\alpha \partial_\beta u^\alpha = 0$  folgt, erhält man

$$\partial_\beta (w u^\beta) - u^\beta \partial_\beta p = 0. \quad (8.19)$$

Substituiert man  $w u^\beta$  mit  $n u^\beta (w/n)$  und benutzt (8.17), so fällt der zweite Term im Differenzial weg, und man erhält

$$n u^\beta \left[ \partial_\beta \frac{w}{n} - \frac{1}{n} \partial_\beta p \right] = 0. \quad (8.20)$$

Aus der Enthalpie gewinnt man das Enthalpiedifferenzial

$$w = T \cdot s + p \quad (8.21)$$

$$\Rightarrow dw = T ds + dp \quad (8.22)$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{w}{n}\right) = T d\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{1}{n} dp, \quad (8.23)$$

wobei der letzte Ausdruck der Enthalpie für ein Teilchen entspricht.  $1/n$  ist das auf ein Teilchen entfallende Volumen und  $s$  die auf die Einheit des *Ruhevolumens* bezogene Entropie. Damit wird Gleichung (8.20) zu

$$u^\beta \partial_\beta \left( \frac{s}{n} \right) = 0, \quad (8.24)$$

d. h., die Bewegung verläuft – wie bei nichtrelativistischen *idealen* Fluiden – *adiabatisch*, die Entropie ändert sich nicht.

Mit der Kontinuitätsgleichung (8.17) lässt sich (8.24) schreiben als

$$\partial_\beta (s u^\beta) = 0, \quad (8.25)$$

d. h., die Viererdivergenz des *Entropiestromes*  $s u^\beta$  verschwindet.

Die relativistische Verallgemeinerung der *Euler'schen Gleichungen* erhält man durch geeignete Projektion und Umformung der Gleichung für die Energie-/Impulserhaltung als

$$w u^\beta \partial_\beta u_\alpha = \partial_\alpha p - u_\alpha u^\beta \partial_\beta p, \quad (8.26)$$

und für eine *isentropie stationäre* Strömung folgt die relativistische Verallgemeinerung der *Bernoulli'schen Gleichung* als

$$\frac{\gamma w}{n} = \text{const} \quad (8.27)$$

mit dem Lorentz-Faktor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$  für  $v \ll c$  und der Enthalpie pro Volumeneinheit  $w = \epsilon + p$ .

Die relativistische Hydrodynamik ist in der heutigen Forschung von der Elementarteilchenphysik bis hin zu kosmologischen Skalen ein sehr erfolgreiches Werkzeug [2]. Wichtige Anwendungen finden sich derzeit insbesondere in der Astrophysik (schwarze Löcher, Neutronensterne, Gammastrahlen-Ausbrüche) [3], Kosmologie (Hydrodynamik des frühen Universums, nach der Rekombination von Protonen und Elektronen) [4] und relativistischen Schwerionenkollisionen [5].

---

## Literatur

1. Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: TP VI – Hydrodynamik, 5. Aufl., Akademie Verlag (1991)
2. Rezzolla, L., Zanotti, O.: Relativistic Hydrodynamics. Oxford University Press (2013)
3. Van Putten, H., Levinson, A.: Relativistic Astrophysics of the Transient Universe. Cambridge University Press (2012)
4. Zel'dovich, Ya. B.: Hydrodynamics of the universe. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 9, 215 (1977)
5. Florkowski, W.: Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions. World Scientific Publishing Co., Singapore (2010)

Das Gebiet der astrophysikalischen Hydrodynamik konzentriert sich auf die Betrachtung statischer und dynamischer Probleme bei Fluiden in nichtterrestrischen Umgebungen. Für weiterführende Literatur wird beispielsweise verwiesen auf das Buch von Shore [1]. Auch viele andere Quellen in der astrophysikalischen Literatur behandeln hydrodynamische Fragestellungen, siehe die Literaturhinweise in [2].

Da *Sterne* aus Gasen bestehen, sollten dort kinetische Gastheorie und Gasdynamik dominieren. Das Gas ist jedoch meist im Wesentlichen *homogen* und erzeugt sein eigenes *Gravitationsfeld*; es simuliert so die Bewegung eines *Fluids* im Feld. Die *mittlere freie Weglänge*  $\lambda$  ist im Vergleich zu jeder relevanten Größenskala des Sterns klein, so dass Störungen ausgewaschen werden und die Sternstruktur kontinuierlich ist:

$$\lambda = \frac{u}{\sigma \rho} \quad (9.1)$$

$$= \frac{1,7 \cdot 10^{-27}}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-30}} \text{ m} \approx 0,3 \text{ m} \quad (9.2)$$

$$\ll R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m} \quad (9.3)$$

mit der Dichte  $\rho \approx 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  in stellarer Materie, der atomaren Masseneinheit  $u = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  und dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma \approx 40 \text{ mb} = 4 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2$ .

Sterne (und andere kosmische Materieansammlungen) können also stets auf bestimmten Längen- und/oder Zeitskalen durch eine *hydrodynamische Approximation* beschrieben werden. Alle Arten von hydrody-

namischem Fluss, die sich auf der Erde beobachten lassen, finden sich auch im Universum, jedoch auf wesentlich größeren Skalen:

- der magnetohydrodynamische Fluss,
- Turbulenz,
- Überschallbewegung,
- Instabilitäten (Schocks) etc.

Hier wird ein repräsentatives Kapitel herausgegriffen: *Schockwellen in der Astrophysik*.

---

## 9.1 Schockwellen

Ursprung der theoretischen Behandlung von Schockwellen ist Riemanns<sup>1</sup> Theorie über die Ausbreitung akustischer Störungen 1860 [3]. Weitere wichtige Erkenntnisse gehen zurück auf Laborversuche zum Überschallfluss von Ernst Mach<sup>2</sup> 1880 und die Untersuchung von Überschallgrenzschichten durch Ludwig Prandtl 1940, die in das Manhattan-Projekt einfluss.

In der Astrophysik sind *Schockwellen* eher die Regel als die Ausnahme. Viele der Beobachtung zugängliche Regionen im Universum sind *weit entfernt* vom thermodynamischen *Gleichgewicht*; oft sind die Zeitskalen für Energiedissipation sehr groß. Die *Entweichgeschwindigkeiten* sind für die meisten kosmischen Objekte weit *größer* als die Schallgeschwindigkeit, so dass alles Material, das ins interstellare Medium gelangt, supersonische Geschwindigkeiten haben muss und erst später Energie und Impuls dissipiert, bis thermisches Gleichgewicht erreicht wird.

Im *interstellaren Medium* und bei vielen stellaren Phänomenen ist die mittlere freie Weglänge so groß, dass die *Viskosität* in erster Ordnung *vernachlässigbar* ist. Astrophysikalische Schocks können daher zunächst als *nicht viskos* behandelt werden; später wird die Dissipation an der Schockfront einbezogen.

---

<sup>1</sup> Georg Bernhard Riemann (\*1826 Breselenz bei Dannenberg, †1866 Selasca bei Verbania).

<sup>2</sup> Ernst Mach (\*1838 Chirlitz-Turas, †1916 Vaterstetten bei München).

Da Schocks *Diskontinuitäten* im Fluss darstellen, müssen sie stark nichtlinear sein; sie entstehen als Ergebnis einer Instabilität, durch die der Fluss als Funktion der Geschwindigkeit *nichtlinear* wird. Ein typisches Beispiel sind Schallwellen: Hier sind Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung erfüllt, und bei anwachsender Dichte wächst die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Ausbreitung einer Störung verläuft anhand der nachfolgenden Gleichungen:

1. *Kontinuitätsgleichung* in einer Dimension:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \quad (9.4)$$

2. *Bewegungsgleichung* in einer Dimension:

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p, \quad (9.5)$$

wobei der Zusammenhang  $p(\rho)$  über die Zustandsgleichung gegeben ist.

Es ist  $p = p(\rho)$ . Ferner gilt

$$\Phi := \partial_\rho p \quad (9.6)$$

und

$$\Lambda := \ln(\rho/\rho_0) \quad (9.7)$$

$$\Rightarrow \partial_x \Lambda = (\partial_x \rho) / \rho, \quad \partial_t \Lambda = (\partial_t \rho) / \rho. \quad (9.8)$$

Aus Kontinuitätsgleichung (9.4) und Bewegungsgleichung (9.5) folgt also

$$\partial_t \Lambda + u \partial_x \Lambda = -\partial_x u \quad \text{und} \quad (9.9)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\Phi \partial_x \Lambda, \quad (9.10)$$

und durch Multiplikation von (9.9) mit  $\Phi^{1/2}$  und Kombination der beiden Gleichungen erhält man

$$\partial_t u + (u - \Phi^{1/2}) \partial_x u = \Phi^{1/2} [\partial_t \Lambda + (u - \Phi^{1/2}) \partial_x \Lambda]. \quad (9.11)$$

Multipliziert man (9.9) stattdessen mit  $(-\Phi^{1/2})$ , so erhält man ein analoges Resultat mit veränderten Vorzeichen in den inneren Klammern. Daraus leiten wir eine neue Propagationsbedingung ab: Die *Störung* bewegt sich mit

$$U_{\pm} = u \pm \Phi^{1/2}. \quad (9.12)$$

Durch die Beziehung

$$\Phi = \partial_{\rho} p \quad (9.13)$$

geht die Zustandsgleichung in die Propagationsbedingung ein. Je nach der Abhängigkeit  $p(\rho)$  des Drucks von der Dichte wird die Störung im Vergleich zur konstanten Schallgeschwindigkeit *beschleunigt* oder *abgebremst*.

Ist die Schallgeschwindigkeit dichteunabhängig, so bewegt sich die Störung mit konstanter Geschwindigkeit; variiert aber die Schallgeschwindigkeit mit der Dichte, so steigt sie bei Kompression (da  $\Phi > 0$ ); die Welle wird beschleunigt.

Als Bedingungen für die Wellenfront dienen die *Riemann-Invarianten* [3]

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_{\pm} = u \pm (\partial_{\rho} p)^{1/2}, \quad (9.14)$$

die aus der Methode der Charakteristiken hervorgehen. Die zugehörigen Charakteristiken sind Linien in der  $(x, t)$ -Ebene. Alternativ können die Riemann-Invarianten (9.14) mit der Schallgeschwindigkeit  $c_S$  geschrieben werden.

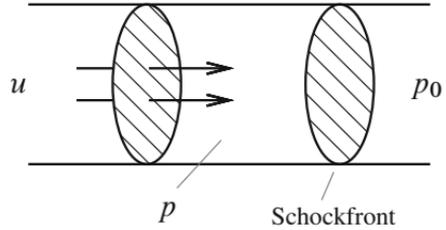
Die Schallgeschwindigkeit ist über die adiabatische Zustandsgleichung

$$p = k\rho^{\kappa} \quad (9.15)$$

eine Funktion der Dichte:

$$c_S = (\partial_{\rho} p)^{1/2} = \left( \frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (9.16)$$

**Abb. 9.1** Schockfront, von Kolben verursacht, in Zylinder



mit  $\kappa = 1 + 2/f \equiv c_p/c_V$  bei idealen Gasen.

Entlang der so definierten Trajektorien werden die erhaltenen Flussgrößen durch das Fluid transportiert. Enthält eine dieser Größen eine *Diskontinuität*, so wird sie ebenfalls der durch die Riemann-Invarianten gegebenen Trajektorie folgen.

#### Beispiel

$u$  sei die Geschwindigkeit eines Kolbens, der in ein Gas stößt.  $u$  ist also äußere Bedingung für den Fluss. Ist dieser schneller als der Schall (Abb. 9.1), kann er sich nicht an Änderungen von  $u$  anpassen.

Ausgehend von der Zustandsgleichung (9.15) mit  $\kappa = c_p/c_V$  folgt für die Riemann-Invarianten

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\pm} = u \pm \frac{2c_S}{\kappa - 1}, \quad (9.17)$$

und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Fluids ist

$$u_{\pm} = c_{s,0} \cdot \left(1 \pm \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\kappa-1)/2} - 1 \right] \right). \quad (9.18)$$

Hier steht der Index null für das ungestörte Fluid.

Also wächst mit zunehmender Dichte auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung; darauf beruht die Ausbildung der Schockwelle. An einem bestimmten Punkt wird das dichtere Material das weniger dichte überholen; die Schockfront baut sich auf.

## 9.2 Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Im Fluss eines fluiden Mediums gibt es *drei erhaltene Größen*:

- Massenfluss,
- Impulsfluss,
- Enthalpiefluss.

Daraus erhält man Bedingungen für die Änderung der thermodynamischen Variablen längs einer Schockfront: die *Rankine-Hugoniot-Bedingungen*. Sie beschreiben das Verhalten von Stoßwellen durch eine eindimensionale hyperbolische Erhaltungsgleichung [4, 5].

Bei einem gegebenem Dichte- oder Drucksprung und näherungsweise konstantem Adiabatenkoeffizienten  $\kappa = c_p/c_V$  können wir die folgenden algebraische Bedingungen für die Änderung der thermodynamischen Variablen längs der Schockfront ableiten:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\kappa + 1) p_2 + (\kappa - 1) p_1}{(\kappa - 1) p_2 + (\kappa + 1) p_1}, \quad (9.19)$$

worin  $p_1$  und  $\rho_1$  sich auf die Zeit vor dem Schock beziehen,  $p_2$  und  $\rho_2$  auf die Zeit danach. Die Ableitung erfolgt mit den Flussgeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ , der Bedingung  $v_2 = (\rho_1/\rho_2) v_1$  (Impulserhaltung) und der Energieerhaltung  $\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2$ .

Bei starkem Schock ist  $p_2 \gg p_1$ , und es wird

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}. \quad (9.20)$$

Im einatomigen Gas ist  $\kappa = 5/3$ , also  $\rho_2/\rho_1 = 4$ . Die Kompression ist in einem Medium mit *kleinerem*  $\kappa$  – beispielsweise in einem strahlungsdominierten Gas – *größer* (z. B.  $\kappa = 4/3 \Rightarrow \rho_2/\rho_1 = 7$ ), da das Medium stärker kompressibel ist. Der *Dichtesprung* ist umgekehrt proportional zum *Geschwindigkeitssprung*, so dass sich die relevanten Größen durch Messen der Geschwindigkeiten über die Schockfront bestimmen lassen.

Beim Schockzylinder ist umgekehrt der Drucksprung gegeben, und der Geschwindigkeitssprung lässt sich aus den Rankine-Hugoniot-Bedingungen bestimmen.

Einige astrophysikalische Anwendungen der Rankine-Hugoniot-Bedingungen sind:

- *Flares an der Sonnenoberfläche* (Sonneneruptionen): Zeitskalensprung von 1s  $\rightarrow$  1h und entsprechender Frequenzsprung zu hohen Energien. Es handelt sich um ein sehr hochenergetisches Phänomen: Strahlung und Teilchen werden aus einer kleinen Region in kurzer Zeit freigesetzt. Sie expandieren in die Corona und das interplanetare Medium ( $\rho$  klein) in Form einer *Schockwelle*. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen geben Aufschluss über die Bedingungen bei der Entstehung des Schocks.
- *Supernovae*: Die Expansionsgeschwindigkeit der Überreste einer Sternexplosion lässt sich anhand der Spektralverschiebung der Emissionslinien messen. Wie vermischt sich die Materie mit dem interstellaren Medium und was können wir über die Produktion der schweren Elemente aussagen? Mit den Rankine-Hugoniot-Bedingungen und dem Geschwindigkeitssprung gelangt man zur *Plasmadiagnostik*, die eine Berechnung der *Elementhäufigkeiten* aus den gemessenen *Emissionslinien* ermöglicht.
- *H-II-Regionen* (z. B. M42 im Orion: vier heiße Sterne im H-II-Nebel, H-II  $\equiv$  einfach ionisierter Wasserstoff): Ein Stern ist im Zentrum eines diffusen gasförmigen (interstellaren) Mediums; er sei heiß genug, um das Medium zu ionisieren. Scheint der Stern lange genug, so wird genügend Energie in das Medium gepumpt, so dass es sich aufheizt und expandiert. Also bewegt sich eine Front mit einer Diskontinuität in Druck und Ionisierung auswärts im interstellaren Medium: ein *Ionisierungsschock* mit einer Diskontinuität in der Enthalpie über die Ionisierungsregion.

Die Ionisierung verändert die *Enthalpie* und die *Entropie* des Gases: ein schwacher Schock entsteht. An der expandierenden Front bildet sich eine komplexe Struktur, im Wesentlichen bewegt sich jedoch eine *heiße ionisierte Region* in das *kühle interstellare Medium*.

Zwei erweiterte Probleme, die hier aber nicht ausgeführt werden:

1. *Zusätzliches magnetisches Feld*: Bei Berücksichtigung der Erhaltung des magnetischen Flusses kommt eine weitere Gleichung zu den Ran-

kine-Hugoniot-Bedingungen, die analog zur Erhaltung des Massenflusses ist; die Sprungkonditionen an der Schockfront ändern sich dadurch.

## 2. Wechselwirkende Schocks.

Für die meisten hydrodynamischen Probleme in der Astrophysik sind numerische Rechnungen die Regel, siehe beispielsweise [6]. Manchmal sind jedoch analytische Abschätzungen und Überschlagsrechnungen nützlich.

### Beispiel

Dichteschockwellen, etwa Spiralarmschocks in Galaxien [1, 7].

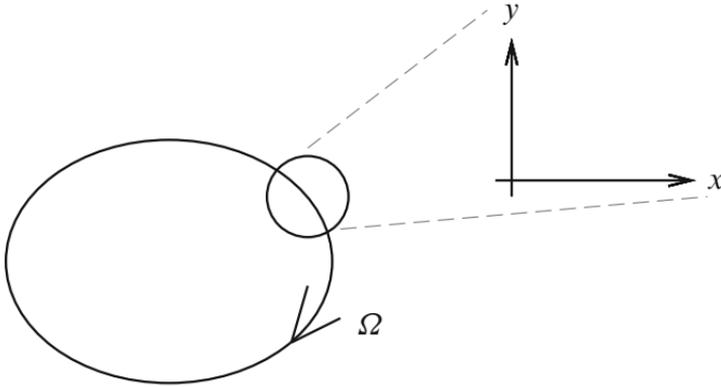
Wir betrachten eine flache Spiralgalaxie mit einer Dichtestörung  $\zeta(x, y)$  (Spiralarm) in der stellaren Komponente der Scheibe. Diese verursacht eine Störung im Gravitationspotenzial  $\Phi(x, y)$  über die Poisson-Gleichung. Gas strömt mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  durch die Scheibe und reagiert auf die Störung [7]. Bei derartigen Dichtestörungen kann durch Gravitationsbeschleunigung Überschallgeschwindigkeit  $u > c_s$  erreicht werden.<sup>3</sup>

Wir legen also die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

- Die Dichtewelle hat die Frequenz  $\omega_p$ ,
- die Scheibe ist vergleichsweise dünn und besteht aus Gas und Sternen,
- die Dichtewelle wird nur von den Sternen unterstützt,
- die Welle bewegt sich langsam im Vergleich zur Rotationsgeschwindigkeit (Kreisfrequenz  $\Omega$ ) der Galaxie selbst.

Diese Bedingungen ermöglichen eine lokale Analyse mit *stationärem* Fluss.

<sup>3</sup> Das Gas beschleunigt, wenn es in das durch die Sterne erzeugte Gravitationspotenzial eintritt, und bremst ab beim Austritt. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen zeigen dabei Schocklösungen.



**Abb. 9.2** Lokale Analyse  $(x, y)$  im rotierenden System

Die zweidimensionalen Bewegungsgleichungen werden dann (Abb. 9.2):

$$u \partial_x u + v \partial_y u + f v = -\frac{c_S^2}{\xi} \partial_x \zeta - \partial_x \Phi, \quad (9.21)$$

$$u \partial_x v + v \partial_y v - f u = -\frac{c_S^2}{\xi} \partial_y \zeta - \partial_y \Phi \quad (9.22)$$

mit  $\partial_x v = -f$ . Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\partial_x (\zeta u) + \partial_y (\zeta v) = 0. \quad (9.23)$$

Dabei ist  $u = \mathbf{v}_x$  die Normalkomponente des Flusses und  $v$  die Para-Schock-Komponente.

Der Fluss wird also parallel zur  $\mathbf{x}$ -Richtung angenommen ( $\partial_y u = 0$ ), und zudem bestehe keine Abhängigkeit der Bewegung von  $y$ . Dann lässt sich das Gravitationspotenzial um  $\Phi_0$  am lokalen Dichtemaximum (Spiralarm) entwickeln:

$$\Phi(x, y) \approx \Phi_0 + \frac{1}{2} (\partial_x^2 \Phi) x^2 + \frac{1}{2} (\partial_y^2 \Phi) y^2. \quad (9.24)$$

Der letzte Term verschwindet, da die Dichte längs des Spiralarms (in  $y$ -Richtung) als konstant angenommen wird. Also vereinfacht sich Gleichung (9.21) näherungsweise zu

$$u \partial_x u + f v = -\frac{c_S^2}{\xi} \partial_x \zeta - (\partial_{xx}^2 \Phi)_0 x, \quad (9.25)$$

und die Kontinuitätsgleichung (9.23) wird

$$\zeta \partial_x u + u \partial_x \zeta = 0. \quad (9.26)$$

Nach Eliminieren des Druckterms in (9.25) mittels der Kontinuitätsgleichung lässt sich die  $x$ -Komponente des Flusses (senkrecht zum Spiralarm) schreiben als:

$$\frac{1}{u} (u^2 - c_S^2) \partial_x u = -f v - \Phi_0'' x \quad \text{und} \quad (9.27)$$

$$\partial_x v = -f. \quad (9.28)$$

Wenn das interstellare Gas den Spiralarm trifft, wird die Flussgeschwindigkeit  $|\mathbf{u}| \equiv u$  durch Gravitationsbeschleunigung größer als die Schallgeschwindigkeit  $c_S$ . Die Normalkomponente des Flusses  $u = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x$  ist durch die Rankine-Hugoniot-Bedingungen bestimmt, während die Para-Schock Komponente  $v$  kontinuierlich ist.

Infolge der Dichtestörung wird das Gas in Richtung *auf das galaktische Zentrum abgelenkt*; dort wird es zu Akkretionsmaterial für das *zentrale schwarze Loch*.

---

## Literatur

1. Shore, S. N.: Astrophysical Hydrodynamics – an Introduction, Wiley-VCH (2007)
2. Carroll, B. W., Ostlie, D. A.: An Introduction to Modern Astrophysics, 2. Aufl., Addison Wesley (2006)
3. Riemann, B.: Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abh. Kgl. Ges. Wiss. zu Göttingen, 8, 1 (1860)

- 
4. Rankine, W. J. M.: On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance. *Philosophical Transactions* 160, 270 (1870)
  5. Hugoniot, H.: Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gases parfaits. *Journal de l'École Polytechnique Paris* 57, 3 (1887)
  6. Monaghan, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 30, 543 (1992)
  7. Roberts, W. W.: Large-Scale Shock Formation in Spiral Galaxies and its Implications on Star Formation. *Astrophys. Journal* 158, 123 (1969)

## 10.1 Grundlagen

Als Quantenflüssigkeiten bezeichnet man Fluide in der Nähe des absoluten Nullpunkts, wo *Quanteneffekte* ins Spiel kommen. Bis 0 K bleibt nur *Helium* flüssig:

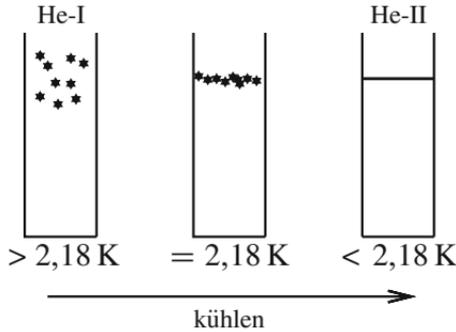
- ${}^4\text{He}$ : Kern und Atom haben Spin 0  $\Rightarrow$  Bose-Einstein-Statistik (Bose-Flüssigkeit),
- ${}^3\text{He}$ : Kern und Atom haben Spin  $\frac{1}{2}$   $\Rightarrow$  Fermi-Dirac-Statistik (Fermi-Flüssigkeit).

Wir wollen uns zunächst auf den Fall der Bose-Einstein-Statistik konzentrieren.

Kühlt man unter den Siedepunkt von 4,18 K durch Evaporation (Vakuumpumpe), so kocht  ${}^4\text{He}$  mit kleinen Bläschen. Am  $\lambda$ -Punkt bei 2,18 K (Übergang von He I zu He II) kocht es plötzlich stark auf, hört aber anschließend völlig auf: das  ${}^4\text{He}$  ist superfluid geworden (Abb. 10.1). Wärme wird nun nahezu widerstandslos abgeleitet, die *Wärmeleitfähigkeit* steigt unterhalb des  $\lambda$ -Punktes um das  $\sim 10^6$ -fache. Weitere Folgen sind:

- Die *Viskosität sinkt* [1] ebenfalls um das  $10^6$ -fache (Messung: Fluss durch Kapillare<sup>1</sup>),
- ${}^4\text{He}$  kriecht als dünner Film die Wände hoch.

<sup>1</sup> 1938 durch Pjotr Leonidowitsch Kapiza (\*1894 Kronstadt, †1984 Moskau)



**Abb. 10.1**  $\lambda$ -Übergang

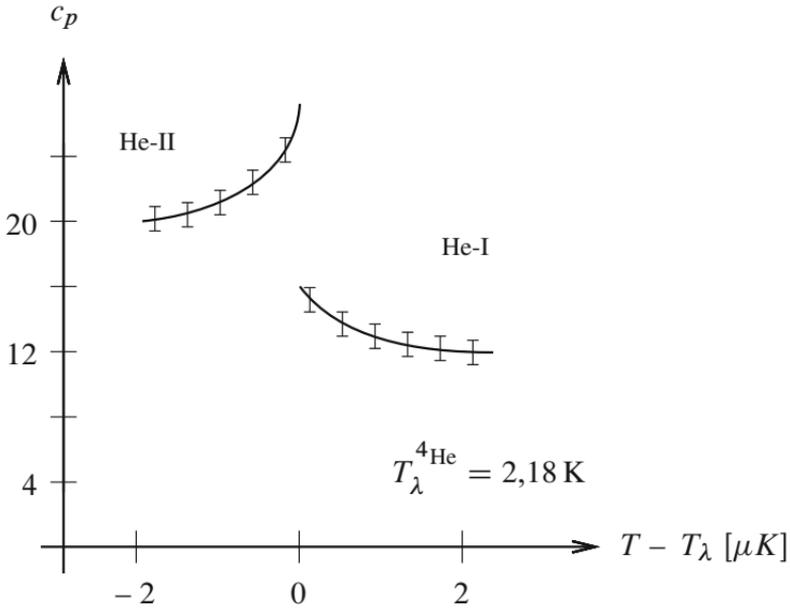
Die Wärmekapazität *divergiert* am Phasenübergang.

Derartigen Phasenübergängen zweiter Ordnung entspricht im Allgemeinen ein Knick im  $T$ - $S$ -Diagramm. Beim  $\lambda$ -Übergang gibt es jedoch eine senkrechte Tangente. Als Folge hat der Graph der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$  als Funktion der Temperatur die charakteristische Form des griechischen Buchstaben  $\lambda$  (vgl. Abb. 10.2). Demgegenüber sind Phasenübergänge erster Ordnung durch einen Sprung in der Entropie  $S$  (und einer Divergenz der Wärmekapazität und der Kompressibilität) gekennzeichnet (vgl. Abb. 10.3).

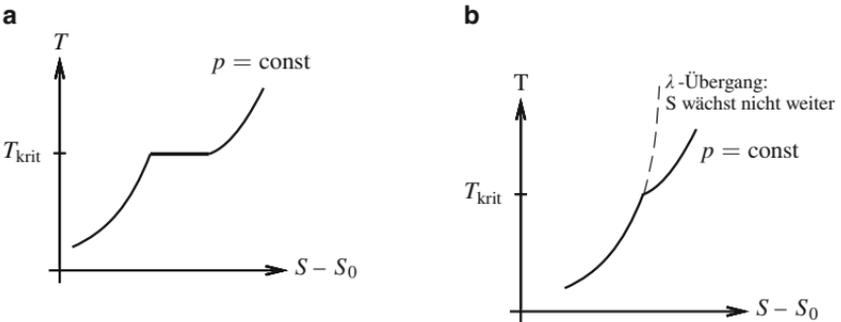
Die Fermi-Flüssigkeit  ${}^3\text{He}$  wird ebenfalls superfluid, jedoch erst bei  $T \lesssim 10^{-3}$  K; die Hydrodynamik ist schwieriger als bei  ${}^4\text{He}$  wegen des komplizierten Ordnungsparameters. (Meist hat  ${}^4\text{He}$  einen geringen Anteil  $\sim 1,3 \cdot 10^{-3} \%$  des Isotops  ${}^3\text{He}$  als Verunreinigung.)

Die *Hydrodynamik der superfluiden Flüssigkeit* kann auf der Basis einer Theorie beschrieben werden, die Tisza [2] und Landau [3] unabhängig voneinander für He II entwickelt haben<sup>2</sup>. Sie ist ein makroskopisches Zweifluidmodell, bei dem es zwei Arten von Schallwellen gibt. Für  $T_\lambda > T > 0$  verhält sich He II wie ein Gemisch aus zwei Flüssigkeiten:

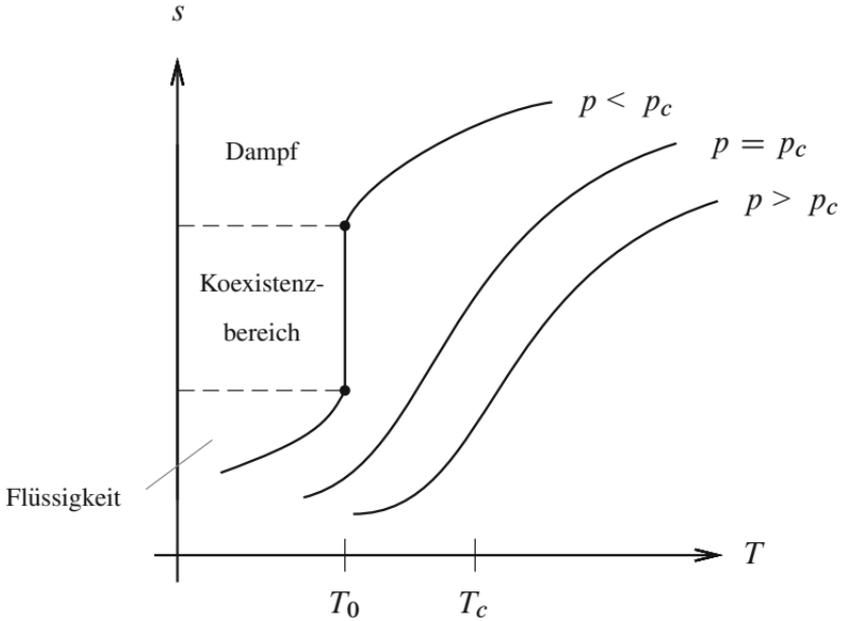
<sup>2</sup> László Tisza 1940 (\*1907 Budapest, †2009 Cambridge/Mass.); Lew D. Landau 1941.



**Abb. 10.2**  $\lambda$ -Übergang



**Abb. 10.3** Phasenübergänge: **a** Phasenübergang 1. Ordnung: zusätzliche Wärmeaufnahme während des Phasenübergangs;  $\Delta Q = C \Delta T$ ,  $C =$  Wärmekapazität:  $C \rightarrow \infty$  am Phasenübergang; **b** Phasenübergang 2. Ordnung: beim  $\lambda$ -Übergang senkrechte Tangente



**Abb. 10.4** Koexistenz zweier Phasen

1. *superfluid*, ohne Viskosität;
2. normal, *viskos*. Es wird dabei kein Impuls von (1) nach (2) übertragen, d. h., es gibt keine Reibung zwischen den beiden Fluidkomponenten.

Es existieren gleichzeitig *zwei Strömungen*, die durch eine bestimmte effektive Masse charakterisiert sind: eine normal, die andere superfluid (s. die Analogie zur Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf in Abb. 10.4; es handelt sich dabei nicht wirklich um die Komponenten eines Gemisches). Bei der Kapillarströmung von He II im Spalt handelt es sich um die superfluide Strömung; die normale Strömung bleibt im Gefäß und strömt mit normaler Viskosität durch den Spalt. Eine rotierende Scheibe in He II erzeugt normale Strömung mit der dazugehörigen Viskosität (eine Messung der Zähigkeit durch Dämpfung von Torsionsschwingungen ergibt den normalen  $\eta$ -Wert).

Die *superfluide* Strömung transportiert *keine Wärme*. Sie ist stets eine *Potenzialströmung*.

Die normale Strömung ist eine Strömung des Gases der Elementaranregungen; die Anregungen verhalten sich wie Quasiteilchen, die sich im Flüssigkeitsvolumen bewegen und bestimmte Impulse und Energien haben.

Die *Entropie* von He II wird durch die statistische Verteilung der Elementaranregungen bestimmt. Deshalb wird bei jeder Strömung, bei der das Gas der Elementaranregungen in Ruhe bleibt, *keine* Entropie übertragen: Eine superfluide Strömung verursacht *keine* Entropieübertragung und *keinen* Wärmetransport. Also ist eine rein superfluide Strömung in He II *thermodynamisch reversibel*.

Der Mechanismus für den *Wärmetransport* in He II ist die Wärmeübertragung durch die normale Strömung der Flüssigkeit. Jede Temperaturdifferenz ruft eine *normale* und eine *superfluide* innere Strömung hervor, sie können sich hinsichtlich ihrer *Masse* kompensieren, so dass kein realer *Massentransport* stattfindet.

Sei  $\mathbf{v}_s$  die Geschwindigkeit der superfluiden,  $\mathbf{v}_n$  die der normalen Strömung. Die Entropiestromdichte ist gegeben durch  $\mathbf{v}_n \rho s$ , wobei  $s$  die Entropie pro Masseneinheit angibt, und  $\mathbf{q} = \rho T s \mathbf{v}_n$  ist die Wärmestromdichte. Die superfluide Strömung ist eine *Potenzialströmung*, es gilt also

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0 \quad (10.1)$$

zu jeder Zeit und im ganzen Volumen des Fluids. Die Elementaranregungen mit großer Wellenlänge (also kleinen Energien und Impulsen) sind Schallquanten (*Phononen*), und die makroskopische Hydrodynamik der superfluiden Strömung lässt keine anderen Schwingungen als Schall-schwingungen zu.

Eine *Potenzialströmung* übt *keine Kraft* auf einen stationär umströmten festen Körper aus (d'Alembert'sches Paradoxon).

In einer *normalen Strömung* hat ein Körper einen *Widerstand*. Kompensieren sich normaler und superfluider Massenstrom, so wirkt auf Körper im He II eine Kraft, obwohl *kein* resultierender Massentransport vorhanden ist.

## 10.2 Hydrodynamische Gleichungen für He II

Die hydrodynamische Strömung ist durch die zwei Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n$  bestimmt. Die Gleichungen folgen aus der Galilei-Invarianz (nicht-relativistisch) und den notwendigen Erhaltungssätzen.

Bei hinreichend großer Strömungsgeschwindigkeit verliert He II seine Superfluidität (Grenzgeschwindigkeit, kritische Geschwindigkeit); dennoch wollen wir die Gleichung für beliebige Geschwindigkeiten ableiten, um dann zu kleinen  $v_s$  überzugehen.

Die Massenstromdichte, also der Impuls pro Volumeneinheit, ist

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n . \quad (10.2)$$

Dabei ist  $\rho_s$  die superfluide,  $\rho_n$  die normale Dichte; die Gesamtdichte ist

$$\rho = \rho_s + \rho_n . \quad (10.3)$$

Für  $T \rightarrow 0$  (in reinem  ${}^4\text{He}$ ) gilt  $\rho_n \rightarrow 0$ ; für  $T \geq T_\lambda$  (normales Fluid) ist  $\rho_s \rightarrow 0$ . Die Kontinuitätsgleichung, die die Massenerhaltung angibt, ist

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (10.4)$$

und mit dem Impulsstromdichtetensor  $\Pi_{ik}$  lautet die Impulserhaltung

$$\partial_t j_i + \partial_k \Pi_{ik} = 0 . \quad (10.5)$$

Zunächst wollen wir *dissipative Prozesse* vernachlässigen. Dadurch wird die Strömung reversibel, und die Entropie bleibt erhalten. Der Entropiestrom ist  $\rho s \mathbf{v}_n$ , woraus mit der Kontinuitätsgleichung (10.4) die Entropieerhaltung folgt:

$$\partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}_n) = 0 . \quad (10.6)$$

Bedingung für *Potenzialströmung* im Anteil  $\mathbf{v}_s$  ist, dass  $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$ . Die Ableitung von  $\mathbf{v}_s$  als Gradient eines Skalars ist

$$\partial_t \mathbf{v}_s + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0 \quad (10.7)$$

mit dem Skalar  $\mu$ , das wir später mit dem chemischen Potenzial identifizieren werden.  $\Pi_{ik}$  und  $\mu$  müssen noch festgelegt werden. Aus dem Energieerhaltungssatz und der Galilei-Invarianz folgt

$$\partial_t E + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (10.8)$$

wobei die Energiestromdichte durch  $\mathbf{Q}$  repräsentiert wird. Mit der *Galilei-Transformation* lässt sich die Abhängigkeit aller Größen von  $\mathbf{v}_s$  bei fester Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  bestimmen. Dazu muss ein Koordinatensystem eingeführt werden, in dem die Geschwindigkeit der superfluiden Strömung eines gegebenen Fluidelements null ist, und das sich mit  $\mathbf{v}_s$  relativ zum ursprünglichen System bewegt. Der Index 0 bezeichnet Größen im bewegten System:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \quad (10.9)$$

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{v}_s + E_0, \quad (10.10)$$

$$\mathbf{Q} = E \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{j}_0 + \Pi_0 \mathbf{v}_s + \mathbf{Q}_0, \quad (10.11)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \Pi_{0ik}, \quad (10.12)$$

$$dE_0 = \mu d\rho + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{j}_0, \quad (10.13)$$

$$p = -E_0 + T\rho s + \mu\rho + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (10.14)$$

mit dem Druck  $p$  und dem chemischen Potenzial  $\mu$ , der freien Enthalpie pro Masseneinheit. Setzen wir  $E$  und  $\mathbf{Q}$  in den Energieerhaltungssatz ein und eliminieren die Zeitableitungen mithilfe der hydrodynamischen Gleichungen, so folgt nach umfangreichen Rechnungen:

$$\mathbf{Q} = \left( \mu + \frac{v_s^2}{2} \right) \mathbf{j} + T\rho s \mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n [\mathbf{v}_n \cdot (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)], \quad (10.15)$$

$$\Pi_{ik} = \underbrace{\rho_n v_{ki} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk}}_{=\rho v_i v_k \text{ in der üblichen Hydrodynamik}} + p \delta_{ik}. \quad (10.16)$$

Damit ist das vollständige System der hydrodynamischen Gleichungen definiert. Die Größen  $\rho_s$ ,  $\rho_n$ ,  $\mu$ ,  $s$  sind Funktionen nicht nur der thermodynamischen Variablen  $p$  und  $T$ , sondern auch des Quadrats der Relativgeschwindigkeit der Strömungen  $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$ , eines Skalars, der

gegenüber Galilei-Transformationen des Bezugssystems und Drehungen der gesamten Flüssigkeit invariant ist.

Die Gleichungen vereinfachen sich im physikalisch relevanten Fall nicht zu großer Geschwindigkeiten (Verhältnis von  $v_n$ ,  $v_s$  zur Ausbreitungsgeschwindigkeit des zweiten Schalls): Abhängigkeiten von  $\rho_n$ ,  $\rho_s$  von  $\mathbf{w}$  vernachlässigen wir und entwickeln die übrigen thermodynamischen Größen nach Potenzen der Geschwindigkeit, z. B.:

$$s(p, T, \mathbf{w}) \approx s(p, T) + \frac{w^2}{2} \partial_T \frac{\rho_n}{\rho} \quad (10.17)$$

$$\rho(p, T, \mathbf{w}) \approx \rho(p, T) + \frac{\rho^2 w^2}{2} \partial_p \frac{\rho_n}{\rho} . \quad (10.18)$$

Hinzu kommen die Randbedingungen: An jeder festen ruhenden Oberfläche muss die dazu orthogonale Komponente des Massenstromes  $\mathbf{j}$  verschwinden. Ferner muss die Tangentialkomponente von  $\mathbf{v}_n$  an der Wand verschwinden:

$$\mathbf{v}_{n\parallel} = 0 \text{ an der Wand,} \quad (10.19)$$

$$\mathbf{v}_{n\perp} \text{ stetig an der Wand.} \quad (10.20)$$

Bei  $\mathbf{v}_s$  gilt die übliche Randbedingung für eine *ideale*, bei  $\mathbf{v}_n$  für eine *zähe* Flüssigkeit.

Zur Berücksichtigung *dissipativer Prozesse* ist – wie in der gewöhnlichen Hydrodynamik – die Einführung zusätzlicher Terme erforderlich, die *linear* in den räumlichen Ableitungen von  $\mathbf{v}_n$  und  $T$  sind. Dabei werden *fünf unabhängige kinetische Koeffizienten* ( $\eta$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\kappa$ ) eingeführt; die erste Zähigkeit  $\eta$  ist mit  $\mathbf{v}_n$  verknüpft (analog dem gewöhnlichen  $\eta$ );  $\kappa$  ist analog zur *Wärmeleitfähigkeit* eines normalen Fluids. Die zweite Zähigkeit  $\xi$  wird jetzt durch drei Koeffizienten  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  ersetzt.

---

### 10.3 Schallausbreitung in Superfluiden

Für die Beschreibung von Schallwellen bemühen wir abermals die lineare Näherung: wir setzen voraus, dass die Strömungsgeschwindigkeiten in der Schallwelle im Vergleich zu den Schallgeschwindigkeiten klein

sind, und dass  $\rho$ ,  $p$  und  $s$  nur wenig von ihren Gleichgewichtswerten abweichen. Dann können wir die hydrodynamischen Gleichungen linearisieren, indem wir ihre quadratischen Glieder vernachlässigen:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (10.21)$$

$$\partial_t (\rho s) + \rho s \nabla \cdot \mathbf{v}_n = 0 \quad (\rho s \text{ vor } \nabla \cdot \text{gezogen}, \quad (10.22)$$

da dieser Term  $\mathbf{v}_n$  bereits enthält),

$$\partial_t \mathbf{j} + \nabla p = 0, \quad (10.23)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_s + \nabla \mu = 0. \quad (10.24)$$

Kombination der Zeitableitung von (10.21) mit dem Gradienten von (10.23) ergibt

$$\partial_t^2 \rho = \Delta p, \quad (10.25)$$

und mit thermodynamischen Identitäten folgt nach einigen Umformungen

$$\partial_t^2 s = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T. \quad (10.26)$$

Diese Gleichungen beschreiben die *Schallausbreitung im Superfluid*. Da es zwei Gleichungen gibt, folgen *zwei Geschwindigkeiten* der Schallausbreitung.

Für den Grenzfall  $\rho_s = 0$  (nur normales Fluid) bleibt nur die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit

$$u^2 = (\partial_\rho p)_s, \quad (10.27)$$

während sich allgemein die Relation ergibt

$$u^4 - u^2 \left[ (\partial_\rho p)_s + \frac{\rho_s T_s^2}{\rho_n c_V} \right] + \frac{\rho_s T_s^2}{\rho_n c_V} (\partial_\rho p)_T = 0 \quad (10.28)$$

mit

$$u_1 = \sqrt{\partial_\rho p}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c \rho_n}}, \quad c \simeq c_p \simeq c_V. \quad (10.29)$$

Während  $u_1$  nahezu konstant bleibt, ist  $u_2$  stark  $T$ -abhängig und verschwindet mit  $\rho_s$  um den  $\lambda$ -Punkt (zweiter Schall).

Nahe am  $\lambda$ -Punkt lässt sich der Unterschied  $c_p - c_v$  nicht vernachlässigen; es folgt

$$u_2 = \sqrt{\frac{Ts^2\rho_s}{c_p\rho}}. \quad (10.30)$$

Bei *sehr niedrigen Temperaturen* sind fast alle Elementaranregungen im Fluid *Phononen*, und es gilt

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT\rho}{3u_1^2}, \quad \rho_n \approx \rho \quad (10.31)$$

$$\Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{Ts^2\rho_s}{c^2T\rho} \cdot 3u_1^2} \quad (10.32)$$

$$= \frac{s}{c} u_1 \cdot \sqrt{3} \quad (10.33)$$

$$= \frac{u_1}{\sqrt{3}}. \quad (10.34)$$

Im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  gilt (10.34) und also

$$\frac{u_1}{u_2} \rightarrow \sqrt{3}. \quad (10.35)$$

In einer Welle des *zweiten Schalls* schwingen normale und superfluide Flüssigkeit gegeneinander, der *resultierende Massenstrom* verschwindet.

In einer Schallwelle des *normalen (ersten) Typs* ist  $v_n \approx v_s$  (bei einer *ebenen* Welle), d. h., die Flüssigkeit in jedem Volumenelement schwingt als Ganzes, normale und superfluide Masse bewegen sich gemeinsam – entsprechend *gewöhnlichen* Schallwellen.

Im superfluiden Anteil des Fluids lassen sich auch Anregungen – Rotonen oder Phononen – erzeugen, die wie Viskosität wirken. So gibt es für einen schwimmenden Körper, den man über flüssiges Helium zieht, nur bis zu einer Grenzgeschwindigkeit – dem Landau-Kriterium – keine Reibung. Bei der Injektion negativer Ionen in superfluides Helium-4 wurden sehr hohe Grenzgeschwindigkeiten von etwa 60 m/s gemessen [4].

Strömungen von *Superfluiden* lassen sich *nicht* wie gewöhnliche Strömungen durch eine *Reynolds-Zahl* charakterisieren; vielmehr divergieren die Strömungsgeschwindigkeiten, und Theorien zur *Turbulenzentstehung* sind nicht mehr direkt anwendbar [5]. *Rotation* ist nur durch Bildung von Wirbelschläuchen (Vortizes) möglich, die eine *quantisierte Zirkulation* tragen; sie können in sich geschlossen sein.

---

## Literatur

1. Kapitza, P.: Viscosity of liquid helium below the  $\lambda$ -point. Nature 141, 74 (1938)
2. Tisza, L.: Sur la théorie des liquides quantiques. Application à l'hélium liquide. J. Phys. Radium 1, 164 (1940)
3. Landau, L. D.: The theory of superfluidity of helium II. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 11, 592 (1941); J. Phys. USSR 5, 71 (1941)
4. Allum, D. R., McClintock, P. V. E., Phillips, A.: The Breakdown of Superfluidity in Liquid  $^4\text{He}$ : An Experimental Test of Landau's Theory. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 284, 179 (1977)
5. Niemetz, M., Kerscher, H., Schoepe, W.: Intermittent Switching between Potential Flow and Turbulence in Superfluid Helium at mK Temperatures. J. Low Temp. Phys. 126, 287 (2002)

## 11.1 Kontinuitätsgleichung für die Entropie

In Kap. 2.2 wurde die Kontinuitätsgleichung für die Entropie (2.28) vorgestellt:

$$\partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad (11.1)$$

Beweisen Sie diese Gleichung.

### Lösung

Durch Differenzieren mit der Produktregel folgt

$$\rho \partial_t s + s \partial_t \rho + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla s + s \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (11.2)$$

Die Summe von erstem und drittem Term ergibt null als Folge der Adiabatangleichung (2.27), die Summe von zweitem und viertem Term verschwindet aufgrund der Kontinuitätsgleichung (2.10).

## 11.2 Schwingungsgleichung

Bestimmen Sie für die eindimensionale Schwingungsgleichung (2.69),

$$\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p, \quad (11.3)$$

die *d'Alembert'sche Lösung*

$$p(x, t) = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \quad (11.4)$$

mit willkürlichen reellen Funktionen  $F_1, F_2$ .

**Lösung**

Mit den Anfangsbedingungen

$$p(x, t = 0) = f_1(x), \quad \partial_t p(x, t = 0) = f_2(x) \quad (11.5)$$

wird

$$F_1(x) + F_2(x) = f_1(x), \quad (11.6)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x). \quad (11.7)$$

Integration ergibt

$$F_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(\xi) d\xi \right]. \quad (11.8)$$

Eine graphische Darstellung und Interpretation der Lösung findet sich in Abschn. 2.4.

**11.3 Hydrostatik**

- Bestimmen Sie für ein ruhendes inkompressibles Fluid in einem zylindrischen Gefäß (vgl. Abb. 2.11) aus den Euler-Gleichungen im Schwerfeld,

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad (11.9)$$

den Druck als Funktion der  $z$ -Koordinate,  $p = p(z)$ , wenn  $h$  die Höhe des Flüssigkeitsspiegels ist.

- Berechnen Sie das Druckprofil als Funktion von  $r$  (dem Abstand von der Drehachse) und  $z$ , wenn der Zylinder mit  $\omega = \text{const}$  um die Vertikale rotiert. (Hinweis: Verwenden Sie das Zentrifugalpotenzial  $U_r = -\frac{1}{2}\rho r^2\omega^2$ .)

## Lösung

1. Wir integrieren die Euler-Gleichungen im Schwerfeld wie in Kap. 2.5 dargestellt und erhalten den Druck als Funktion der  $z$ -Koordinate

$$p(z) = p_0 + \rho g (h - z) . \quad (11.10)$$

2. Die Rechnung ist in Abschn. 2.5 ausgeführt. Das Druckprofil ergibt sich als

$$p(r, z, \omega) = \rho g \left( \frac{r^2 \omega^2}{2g} + z_0 - z \right) . \quad (11.11)$$

---

## 11.4 Inkompressible Fluide

Eine inkompressible Flüssigkeit mit Dichte  $\rho$  füllt den Raum, und ein kugelförmiges Volumen mit Radius  $a$  wird entfernt. Nach welcher Zeit  $\tau$  hat sich der Hohlraum wieder mit Flüssigkeit gefüllt?

*Hinweis* Verwenden Sie die Euler-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) in sphärischen Koordinaten (das Problem ist kugelsymmetrisch).

### Lösung

Für die *radiale Geschwindigkeit* gilt die Euler'sche Gleichung

$$\partial_t v + v \partial_r v = -\frac{1}{\rho} \partial_r p \quad (11.12)$$

mit  $v_r \equiv v < 0$ . Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide ist

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 v_r) = 0 . \quad (11.13)$$

Die Rechnung zur Lösung des Gleichungssystems ist in Abschn. 2.10 ausgeführt und ergibt nach Trennung der Variablen  $R$  und  $t$  für die Zeit  $\tau$ ,

in der sich der Hohlraum wieder füllt ( $R(t) \leq a$ ,  $p_0$  der Druck bei  $R \rightarrow \infty$ )

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}} \quad (11.14)$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0,915 a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}. \quad (11.15)$$

Die Rechnung stammt ursprünglich von Lord Rayleigh (1917), die Referenz steht in den Literaturangaben für Kap. 2.

## 11.5 Wasserwellen

Eine Wasserwelle propagiere in  $x$ -Richtung über den Ozean. Ihre vertikale Komponente in Tiefenrichtung sei  $y$  mit der Koordinate  $\tilde{y}$  eines Punktes an der Oberfläche. In  $z$ -Richtung sei die Welle gleichförmig, so dass alle Größen unabhängig von  $z$  sind.

Berechnen Sie aus der Gleichung (2.239) für das Geschwindigkeitspotenzial  $\Phi$

$$\partial_t \Phi = -gy; \quad \mathbf{v} = -\nabla \Phi \quad (11.16)$$

und mit Hilfe der Laplace-Gleichung  $\Delta \Phi = 0$  die Dispersionsrelation  $v(\lambda)$  im tiefen Wasser ( $h \gg \lambda$ ), wobei  $\lambda = 2\pi/k$  die Wellenlänge ist.

### Lösung

Für die Zeitableitung des Geschwindigkeitspotenzials eines Punktes  $\tilde{y}$  an der Oberfläche gilt nach Voraussetzung

$$\partial_t \Phi|_{y=\tilde{y}} = -g\tilde{y}. \quad (11.17)$$

Die vertikale Komponente der Geschwindigkeit  $v_y = -(\partial_y \Phi)_{y=\tilde{y}}$  des Oberflächenpunktes mit  $y$ -Koordinate  $\tilde{y}$  ist auch durch die Zeitableitung

gegeben, also folgt

$$v_y = \partial_t \tilde{y} = -(\partial_y \Phi)_{y=\tilde{y}}, \quad (11.18)$$

$$\left( \partial_y \Phi + \frac{1}{g} \partial_{tt}^2 \Phi \right)_{y=\tilde{y}} = 0 \quad (11.19)$$

für die Randbedingung an der Oberfläche, wobei wir (11.16) nach  $t$  differenziert und dann eingesetzt haben. Da die Oszillationen klein sind, wählen wir  $y = 0$  statt  $y = \tilde{y}$  und erhalten das Gleichungssystem

$$\left( \partial_y \Phi + \frac{1}{g} \partial_{tt}^2 \Phi \right)_{y=0} = 0; \quad (11.20)$$

$$\Delta \Phi = 0. \quad (11.21)$$

Die in  $x$ -Richtung propagierende Welle schreiben wir als

$$\Phi(x, y, t) = A(y) \cos(kx - \omega t) \quad (11.22)$$

und Einsetzen in die Potenzialgleichung

$$\Delta \Phi(x, y, t) = \partial_{xx}^2 \Phi + \partial_{yy}^2 \Phi = 0 \quad (11.23)$$

ergibt

$$\partial_{yy}^2 A(y) - k^2 A(y) = 0 \quad (11.24)$$

mit Lösungen proportional zu  $\exp(ky)$  und  $\exp(-ky)$ . Wir wählen die Letztere, damit die Welle in Tiefenrichtung  $y$  nicht exponentiell wächst, sondern weggedämpft wird, so dass  $\Phi = A_0 \exp(-ky) \cos(kx - \omega t)$ . Setzen wir dies in die Randbedingung (11.19) ein, folgt

$$-k + \omega^2/g = 0 = 0 \quad (11.25)$$

oder  $\omega^2 = k \cdot g$  mit der Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$ . Für die Gruppengeschwindigkeit  $u = d\omega/dk$  folgt durch Differenzieren  $u = (1/2)\sqrt{g\lambda}/(2\pi)$ , und mit dem Zusammenhang (2.233) zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit bei Schwerewellen in tiefem Wasser

( $u = v/2$ ) die Dispersionsrelation

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (11.26)$$

d. h., normale Dispersion im tiefen ( $h \gg \lambda$ ) Wasser.

Analoge Ableitungen der Dispersionsrelationen für Schwerewellen in flachem Wasser ergeben  $v = \sqrt{gh}$  ( $h \ll \lambda$ , keine Dispersion) und für Kapillarwellen  $v(\lambda) = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}}$  (mit der Oberflächenspannung  $\sigma$ , anomale Dispersion), s. Lehrbuchliteratur in der Bibliographie.

## 11.6 Poiseuille-Strömung

- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Rohrströmung (s. Abb. 3.2) einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit mit Viskosität  $\eta$  aus den Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} \quad (11.27)$$

mit den in Abschn. 3.3 gemachten Annahmen. Der Rohrradius sei  $R$ , das Druckgefälle über die Rohrlänge  $l$  sei  $\delta p$ ; verwende Polarkoordinaten ( $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow v(r)$ ).

- Lösen Sie die Gleichung durch Integration. Beachten Sie dabei die Randbedingungen:  $v(r) = 0$  für  $v = \pm R$ .

### Lösung

- Die Ableitung ist in Abschn. 3.3 durchgeführt. Man erhält in Polarkoordinaten für  $v(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\delta p}{\eta l}. \quad (11.28)$$

- Die Integration der Bewegungsgleichung ergibt

$$v(r) = -\frac{\delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln(r/R) + b, \quad (11.29)$$

und nach Bestimmung der Konstanten  $a$  und  $b$  folgt das parabolische Geschwindigkeitsprofil der Poiseuille-Strömung

$$v(r) = \frac{\delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (11.30)$$

## 11.7 Laminarer Nachlauf

Eine zähe Flüssigkeit mit Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  umströmt einen festen sphärisch symmetrischen Körper (s. Abb. 3.8). Die wahre Strömungsgeschwindigkeit am und hinter dem Körper sei  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ; für  $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$  herrscht Stillstand. Im Nachlauf (hinter dem Körper) erhält man die Lösung des Strömungsproblems bei bekannter Widerstandskraft  $F_r$ , Dichte  $\rho$ , und kinematischer Viskosität  $\nu = \eta/\rho$  aus der Oseen'schen Gleichung (3.75). In Polarkoordinaten folgt in genügend großer Entfernung  $r$  vom umströmten Körper als Funktion vom Winkel  $\vartheta$  (3.78)

$$v_r(\vartheta) = -\frac{F_r}{4\pi\rho\nu r} \exp\left[-\frac{ur\vartheta^2}{4\nu}\right]. \quad (11.31)$$

Berechnen Sie die Varianz  $\sigma_\vartheta^2 = \langle \vartheta^2 \rangle - \langle \vartheta \rangle^2$  der Strömung im Nachlauf (s. Abb. 3.9) für die Winkelvariable  $\vartheta$  bei gegebener Entfernung  $r$  vom umströmten Körper.

### Lösung

Für einen symmetrischen umströmten Körper ist der Mittelwert  $\langle \vartheta \rangle = 0$ . Die Varianz wird dann

$$\sigma_\vartheta^2 = \langle \vartheta^2 \rangle = \int \vartheta^2 \exp(-a(r)\vartheta^2) d\vartheta \Big/ \int \exp(-a(r)\vartheta^2) d\vartheta \quad (11.32)$$

mit  $a(r) \equiv ur/(4\nu)$ . Das Ergebnis des Integrals im Zähler ist  $\sqrt{\pi}/(2a\sqrt{a})$ . Insgesamt erhalten wir

$$\sigma_\vartheta^2 = \frac{1}{2a(r)} = \frac{2\nu}{ur}, \quad (11.33)$$

so dass die Winkelvarianz der Strömung im Nachlauf mit  $1/r$  abfällt.

## 11.8 Stabilität stationärer Strömungen

Mit den Landau'schen Konstanten  $\alpha < 0$  und  $\beta > 0$  lautet die Differenzialgleichung für die Amplitude  $A(t)$  einer kleinen, nicht stationären Störung der Bewegung eines zähen Fluids (mit  $\gamma_1 \geq 0$ )

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6. \quad (11.34)$$

1. Lösen Sie die Gleichung für Glieder bis zur vierten Ordnung (d. h., vernachlässigen Sie den Term in der sechsten Potenz).
2. Wie lautet die Lösung der kompletten Gleichung für  $t \rightarrow \infty$ ? (Probe durch Einsetzen)

### Lösung

1. Die Lösung der Differenzialgleichung bis zur vierten Ordnung ist

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t}. \quad (11.35)$$

$|A|^2$  strebt also für  $t \rightarrow \infty$  gegen den endlichen Grenzwert  $2\gamma_1/\alpha$ .

2. Die Lösung der kompletten Gleichung für  $t \rightarrow \infty$  ist

$$|A|_{\max}^2 = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[ \frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta} \gamma_1 \right]^{1/2}. \quad (11.36)$$

---

## 11.9 Wärmeleitung

In einem unbegrenzten Medium gelte die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T = \chi \Delta T, \quad (11.37)$$

wobei  $T$  die Temperatur und  $\chi$  die Temperaturleitfähigkeit angeben. Berechnen Sie die Temperaturverteilung aus dem Fourier-Integral

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-k^2 \chi t} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3 x' \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (11.38)$$

für eine anfängliche Temperaturverteilung  $T_0(\mathbf{r}) = \text{const} \cdot \delta(\mathbf{r})$  und ein radialsymmetrisches Problem ( $\mathbf{r} \rightarrow r, T(\mathbf{r}, t) \rightarrow T(r, t)$ ).

*Hinweis:*  $\mathbf{k}$ -Integration zuerst ausführen, dann Integration über  $d^3x$ . Mit  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} = \cos \mathbf{k}\cdot\mathbf{R} + i \sin \mathbf{k}\cdot\mathbf{R}$  verschwindet das Integral über die ungerade sin-Funktion, und es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2} \cos \beta\xi d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/(4\alpha)}, \quad (11.39)$$

wobei  $\xi$  eine Komponente des Vektors  $\mathbf{k}$  angibt.

### Lösung

Die Lösung steht in Abschn. 6.3. Man erhält

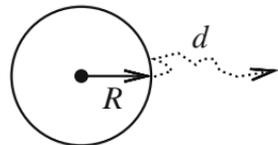
$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{const}}{8(\pi\chi t)^{3/2}} e^{-r^2/(4\chi t)}. \quad (11.40)$$

Bei  $r = 0$  nimmt demnach die Temperatur proportional zu  $t^{3/2}$  ab.

## 11.10 Diffusion

Welche Zeit  $\tau$  benötigt ein in einem Fluid mit der Temperatur  $T$  und der Viskosität  $\eta$  suspendiertes Brown'sches Teilchen mit Radius  $R$ , um eine Distanz  $d \approx 2R$  durch Diffusion (Abb. 11.1) zurückzulegen?

**Abb. 11.1** Brown'sche Bewegung



**Lösung**

Es ist

$$\langle r^2 \rangle = 6Dt \quad \text{und also} \quad (11.41)$$

$$\tau = \frac{d^2}{6D} = \frac{2R^2}{3D}, \quad (11.42)$$

so dass mit der Einstein-Relation

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} \quad (11.43)$$

die Zeit  $\tau$  folgt:  $\tau = 4\pi\eta R^3/(k_B T)$ .

**11.11 Energie-Impuls-Tensor**

Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\alpha\beta} = wu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} \quad (11.44)$$

mit der Enthalpie pro Volumeneinheit  $w = \epsilon + p$ , der inneren Energiedichte  $\epsilon$ , dem Druck  $p$ , der Vierergeschwindigkeit  $u^\alpha$  und dem metrischen Tensor  $g^{\alpha\beta}$  im nichtrelativistischen Grenzfall  $v \ll c$ .

*Hinweis* Im *relativistischen* Fall wird die Teilchenzahldichte  $n$  auf die Einheit des Ruhevolumens bezogen; die Energiedichte ist dann  $mnc^2$ . Im *nichtrelativistischen* Fall wird dagegen die Energiedichte auf die Volumeneinheit im Laborsystem bezogen, in dem sich das Fluid bewegt. Beim nichtrelativistischen Grenzübergang muss deshalb  $mnc^2$  durch  $\rho c^2 - \rho v^2/2$  mit der Ruheenergie des Systems  $\rho c^2$  ersetzt werden, s. (8.10).

**Lösung**

In Abschn. 8.1 sind die Elemente des Energie-Impuls-Tensors in Komponenten angegeben, so dass der nichtrelativistische Grenzfall  $v \ll c$

ausgeführt werden kann. Man erhält für den nichtrelativistischen Grenzwert der Energiedichte

$$T_{\text{nr}}^{00} = \rho c^2 + \epsilon + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (11.45)$$

wobei die letzten beiden Summanden der nichtrelativistischen Energiedichte entsprechen, sowie für den Impulsstromdichtetensor

$$T_{\text{nr}}^{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}. \quad (11.46)$$

---

## 11.12 Entropieerhaltung in idealer relativistischer Hydrodynamik

Die Bewegung idealer relativistischer Fluide verläuft adiabatisch; die auf die Einheit des Ruhevolumens bezogene Entropie  $s$  ändert sich nicht:

$$u^\beta \partial_\beta \left( \frac{s}{n} \right) = 0, \quad (11.47)$$

mit der Vierergeschwindigkeit  $u^\beta = (\gamma, \gamma \mathbf{v}/c)$  und der skalaren Teilchenzahldichte  $n$ .

Zeigen Sie, dass dann die Viererdivergenz des *Entropiestromes*  $su^\beta$  verschwindet:

$$\partial_\beta (su^\beta) = 0. \quad (11.48)$$

### Lösung

Aus der Entropieerhaltung  $u^\beta \partial_\beta \left( \frac{s}{n} \right) = 0$  folgt mit der *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_\alpha (nu^\alpha) = 0. \quad (11.49)$$

wegen  $\partial_\beta (su^\beta) = s \partial_\beta u^\beta + u^\beta \partial_\beta s$  direkt, dass die Viererdivergenz des Entropiestroms verschwindet.

---

# Literatur

- Acheson, D. J.: Elementary fluid dynamics, Clarendon Press (1990)
- Choudhuri, A. R.: The Physics of Fluids and Plasmas, Cambridge University Press (1998)
- Faber, T. E.: Fluid dynamics for physicists, Cambridge University Press (1995)
- Godreche, C. und Manneville, P. (Hrsg.): Hydrodynamics and nonlinear instabilities, Cambridge University Press (2005)
- Greiner, W. und Stock, H.: Hydrodynamik, Verlag H. Deutsch (1991)
- Landau, L. D. und Lifschitz, E. M.: TP VI – Hydrodynamik, 5. Aufl., Akademie Verlag (1991)
- Lüst, R.: Hydrodynamik, B I Wissenschaftsverlag (1978)
- Michalás, D.: Stellar Atmospheres, 2. Aufl., Freeman, San Francisco (1978)
- Shore, S. N.: An introduction to astrophysical hydrodynamics, Academic Press (1992)
- Shu, F. H.: The physics of astrophysics, Bd. 2, Univ. Science books (1994)
- Swinney, H. L. und Gollub, J. P. (Hrsg.): Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Springer-Verlag, New York (1981)
- Sommerfeld, A.: Mechanik der deformierbaren Medien, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden (1947)
- Tritton, D. J.: Physical Fluid Dynamics, 2. Aufl., Clarendon Press (1988)
- Wolschin, G.: Particle production sources at LHC energies, J. Phys. G40, 045104 (2013)
- Yaglom, A. M. und Frisch, U. (Hrsg.): Hydrodynamic Instability and Transition to Turbulence, Springer-Verlag (2012)

---

# Sachverzeichnis

## A

Adiabatengleichung, 4, 10, 93  
Adiabatenkoeffizient, 19, 134  
adiabatisch, 10  
adiabatische Druckänderung, 36  
adiabatische Zustandsänderung, 20  
adiabatische Zustandsgleichung, 132  
Aerodynamik, 14  
Ähnlichkeitsgesetz, 62  
ALICE, 114  
analytische Funktion, 41  
anomale Dispersion, 49, 50  
astrophysikalische Hydrodynamik, 129  
asymmetrische Systeme, 118  
Atmosphärendruck, 17  
Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 110  
äußere Kraft, 12

## B

Bahnkurven, 13  
Bernoulli'sche Gleichung, 13, 14, 35,  
37, 38, 90  
Beweglichkeit, 111, 112  
Bewegungsgleichung, 8  
Bose-Einstein-Statistik, 141  
Bose-Flüssigkeit, 141  
Brown'sches Teilchen, 109, 161  
bulk viscosity, 53

## C

Cauchy-Riemann'sche  
Differenzialgleichungen, 41  
chemisches Potenzial, 147  
CMS, 114

## D

d'Alembert'sche Lösung, 153  
d'Alembert'scher Ansatz, 20  
Dichteschockwellen, 136  
Diffusion, 105, 113  
Diffusionskoeffizient, 108, 111, 112,  
117  
Diffusionsstrom, 107, 112  
direkte Wärmeleitung, 93  
Dispersion, 46, 49, 50  
Dispersionsrelation, 156, 158  
Dissipations-Fluktuations-Theorem, 117  
dissipative Systeme, 78  
doppelte Schwelle, 76  
Drehmoment, 73  
Druck, 55  
Druckstörung, 21  
Druckverteilung, 55  
Durchflussmenge, 58, 60  
dynamische Viskosität, 61  
dynamische Zähigkeit, 55

## E

ebene Wellen, 46

eindimensionale Strömungsprobleme, 43  
 Einlauf, 65  
 Einstein-Relation, 111, 117  
 Elastizitätstheorie, 4  
 Elementaranregungen, 150  
 Energiedichte, 122  
 Energiedissipation, 10, 53, 56, 57, 105  
 Energieerhaltung, 106  
 Energieerhaltungssatz, 94  
 Energie-Impuls-Tensor, 121, 122, 162  
 Energiestromdichte, 26, 37, 94, 122, 147  
 Enthalpie, 26, 124  
 Entropie, 145, 153, 163  
 Entropiestrom, 126  
 Entropiestromdichte, 10  
 entwickelte Turbulenz, 86  
 Erdbeschleunigung, 13  
 Erhaltung der Zirkulation, 31  
 Erhaltungssatz für die Zirkulation, 30  
 Euler'sche Gleichungen, 4, 9, 25, 27, 34, 36, 39, 43, 53, 121, 155  
 Euler'sche Gleichungen für isentrope Bewegung, 11

**F**

Fermi-Flüssigkeit, 141, 142  
 Flares, 135  
 Fluss, 5  
 Fourier-Integral, 98  
 Fourier'sche Gleichung, 96  
 Fouriertransformation, 98  
 Fragmentationsquellen, 120  
 freie Oberfläche, 24  
 Freiheitsgrade, 19  
 Funktionentheorie, 41

**G**

Galaxien, 88  
 Gastheorie, kinetische, 3  
 Gauß'scher Integralsatz, 6, 8, 26, 106  
 Gaußverteilung, 120  
 Gemisch, 105  
 Geschwindigkeitsfeld, 3

Geschwindigkeitspotenzial, 38, 41, 49, 70  
 Geschwindigkeitsprofil, 60, 70  
 Geschwindigkeitsverteilung, 4, 55  
 Gleichgewicht, globales, 3  
 Gleichgewicht, lokales, 2  
 Gleichgewichtsbedingung, 24  
 Gleichgewichtsthermodynamik, 3  
 Gluon-Gluon Stöße, 120  
 Gravitationsfelder, 121  
 Grenzschicht, 89, 90  
 Größen, thermodynamische, 4  
 Gruppengeschwindigkeit, 48

**H**

Hadronen, 117  
 Hagen-Poiseuille'sches Gesetz, 61  
 harmonische Luftschwingungen, 17  
 He II, 145  
 H-II-Regionen, 135  
 Hohlraum, 44, 155  
 Hydrodynamik, molekulare, 3  
 hydrodynamische Approximation, 129  
 hydrodynamisches Chaos, 81  
 hydrostatischer Druck, 15

**I**

ideale Fluide, 5, 9, 124  
 Impulsstrom, 27  
 Impulsstromdichte, 122  
 Impulsstromdichtetensor, 124  
 infinitesimale Instabilitäten, 79  
 Inkompressibilität, 36  
 inkompressible Fluide, 35, 62, 101, 154  
 inkompressible Flüssigkeit, 43, 56  
 innere Energie, 25  
 Instabilitäten, 76, 130  
 Intermittenz, 81  
 interstellares Medium, 87, 130  
 isentrope Bewegung, 10, 29  
 isentrope Strömung, 30  
 isobare Zustandsänderung, 20  
 isotherme Zustandsänderung, 18, 20  
 isotrope Fluide, 53

**J**

Jupiters Großer Roter Fleck, 87

**K**

Kapillarströmung, 144  
 Kapillarwellen, 50  
 kinematische Viskosität, 54  
 kinematische Zähigkeit, 55, 96  
 kinetische Energie, 25  
 kinetische Gastheorie, 129  
 Kármán'sche Wirbelstraße, 78  
 Kolben, 133  
 komplexe Geschwindigkeit, 42  
 komplexes Potenzial, 41  
 kompressible Fluide, 17, 62  
 Kompression, 35  
 Kontinuitätsgleichung, 4, 5, 7, 10, 25,  
 27, 37, 39, 44, 53, 58, 62, 93,  
 101, 124, 153, 155  
 Kontinuitätsgleichung für die Entropie,  
 10  
 Kontinuumsbeschreibung, 4  
 Kontinuumsmechanik, 1  
 Konvektion, 62, 97, 100, 101  
 Konvektionsglied, 9  
 Konvektionsrollen, 80  
 Konvektionsterm, 36  
 konvektive Ableitung, 9  
 Konzentration, 105, 107  
 kritische Reynolds-Zahl, 65, 66

**L**

$\lambda$ -Punkt, 141  
 laminare Strömung, 62  
 laminarer Nachlauf, 69, 159  
 Landau-Kriterium, 150  
 Landau'sche Konstante, 84, 160  
 Laplace-Gleichung, 38, 97  
 Laplace-Operator, 40  
 Large Hadron Collider *LHC*, 114  
 Lichtgeschwindigkeit, 121  
 lokaler Druck, 3  
 lokales Ruhesystem, 122  
 Lorentz-Faktor, 126

Lorentz-Transformation, 121

**M**

Mach-Wellen, 46  
 magnetohydrodynamischer Fluss, 130  
 metastabile Grundströmung, 85  
 mittlere freie Weglänge, 121, 129  
 monochromatische Wellen, 47

**N**

Navier-Stokes-Gleichungen, 54, 55, 57,  
 59, 61, 67, 75, 90, 93, 101, 158  
 Nichtlinearität, 9, 78  
 nichtrelativistischer Grenzfall, 123  
 normale Dispersion, 49  
 Normalenrichtung, 38

**O**

Oberflächenparaboloid, 25  
 Oberflächenspannung, 50  
 Oberflächenwellen, 46  
 Ordnung und Struktur, 78  
 Oseen'sche Gleichung, 68, 159

**P**

Pascal'sches Gesetz, 22  
 Péclet-Zahl, 102  
 Periodenverdopplung, 81  
 periodische Luftschwingungen, 21  
 Phasengeschwindigkeit, 47  
 Phasenübergang, 142  
 Phononen, 150  
 Planeten, 86  
 Poiseuille-Strömung, 58  
 polytrope Prozesse, 19  
 Potenzial, 41  
 Potenzialströmung, 30–32, 34, 35, 38,  
 70, 90, 146  
 Prandtl'sche Gleichungen, 91  
 Prandtl-Zahl, 102  
 Pressluft, 16  
 Produktregel, 153  
 Profil, 76

**Q**

Quantenflüssigkeiten, 141  
 Quark-Gluon-Plasma, 115  
 Quasiperiodischer Weg, 81

**R**

Randbedingungen, 12, 38, 56, 91, 97  
 Rankine-Hugoniot-Bedingungen, 134, 138  
 Rapidität, 116, 119  
 Rapiditätsrelaxation, 117  
 Raumwellen, 46  
 Rayleigh-Bénard-Zelle, 80  
 Reibungstensor, 57  
 Relativistic Heavy Ion Collider *RHIC*, 114  
 relativistische Hydrodynamik, 121  
 relativistische Systeme, 113  
 relativistisches Diffusionsmodell, 117, 118, 120  
 Relaxationszeit, 99, 116  
 Residuen, 42  
 Reynolds'sche Ähnlichkeitstheorie, 65  
 Reynolds-Zahl, 62, 65, 67, 76, 82, 102  
 Riemann-Invarianten, 132  
 Ringwellen, 46  
 Ripples, 52  
 Rohrströmung, 76, 77, 158  
 Rotation, 23  
 rotierende Scheibe, 71  
 Ruelle-Takens-Weg, 81

**S**

Satz von Stokes, 29  
 Schallgeschwindigkeit, 18, 20, 22, 36, 149  
 Schallwellen, 148  
 Schiffswellen, 46  
 Schockfront, 134  
 Schockwellen, 130  
 schwarzes Loch, 138  
 Schwerfeld, 9, 22  
 Schwerewellen, 49, 52  
 Schwerpunktsenergie, 118

schwingende Körper, 32  
 schwingende Membran, 20  
 Schwingungsgleichung, 20, 153  
 shear viscosity, 53  
 singuläre Punkte, 30  
 spezifische Wärmekapazität, 19, 142  
 Spiralarmschock, 136  
 Stabilität, 66  
 Stabilitätsuntersuchung, 81  
 stationäre Konvektion, 101  
 stationäre Strömung, 13, 35  
 statistischer Mittelwert, 75  
 statistisches Gleichgewicht, 115  
 Staupunkt, 38  
 stehende Welle, 22  
 Sternatmosphären, 87  
 Stokes'sche Formel, 67  
 Stokes'scher Integralsatz, 30  
 Stromdichtefeld, 3  
 Stromdichtevektor, 7  
 Stromfunktion, 39, 41, 56  
 Stromlinie, 13, 31, 34, 42  
 Stromlinienkörper, 32, 89  
 substantielle Ableitung, 9  
 Super Proton Synchrotron, 113  
 superfluide Strömung, 145  
 Supernovae, 135  
 Superpositionsprinzip, 9

**T**

Taylor-Couette-Instabilität, 79  
 Teilchenbeschleuniger, 113  
 Teilchenzahlerhaltung, 124  
 Temperatur, 107  
 Temperaturleitfähigkeit, 96, 101  
 Temperaturverteilung, 98, 99  
 thermisches Modell, 117  
 Thermoeffusionskoeffizient, 108  
 Thermodynamik, 18  
 thermodynamische Relation, 25, 27  
 thermodynamisches Gleichgewicht, 112  
 Thomson'scher Satz, 30  
 Tiefseewellen, 46  
 Tiefwasser, 49

Torricelli'sches Theorem, 14  
totales Differenzial, 9  
Trägheit, 66  
turbulente Rohrströmung, 77  
turbulente Strömung, 62  
Turbulenz, 76, 79, 88, 130

**U**

Überschallbewegung, 130  
Überschallgrenzschichten, 130

**V**

Viererddivergenz, 125  
Vierergeschwindigkeit, 122  
viskose Fluide, 53  
viskose Flüssigkeit, 60  
Viskosität, 5, 53, 62, 66, 93, 141  
Viskositätskoeffizient, 53  
Viskositätsterm, 100  
vollständiges Differenzial, 29  
Volumen, spezifisches, 3

**W**

Wärme, 56  
Wärmeleitfähigkeit, 5, 53, 94, 101, 141  
Wärmeleitung, 96

Wärmeleitungsgleichung, 96, 160  
Wärmestrom, 107  
Wärmestromdichte, 94  
Wärmetransport, 93, 95  
Wärmetransportgleichung, 96, 100  
Wasserwelle, 46, 156  
Welle, 46  
Wellenformen, 46  
Widerstandskraft, 67  
Wirbel, 46  
wirbelfrei, 30  
Wirbelströmungen, 30

**Z**

Zähigkeitskoeffizient, 53  
Zentrifugalinstabilität, 79  
Zentrifugalkraft, 23  
Zentrifugalpotenzial, 154  
Zirkulation, 28, 34, 43  
Zustandsänderung, 20  
Zustandsgleichung, 3  
zweiatomige Gase, 19  
zweidimensionale Strömung, 39  
Zweifluidmodell, 142  
zweiter Schall, 150