

LEHRBUCH

Jörg Mareczek

# Grundlagen der Roboter- Manipulatoren – Band 1

Modellbildung von Kinematik  
und Dynamik

**EXTRAS ONLINE**

 Springer Vieweg

---

# Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 1

---

Jörg Mareczek

# Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 1

Modellbildung von Kinematik und  
Dynamik

 Springer Vieweg

Jörg Mareczek  
Fakultät für Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen  
Hochschule Landshut  
Landshut, Deutschland

ISBN 978-3-662-52758-0

ISBN 978-3-662-52759-7 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-52759-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*Für Petra, Felix, Lucas und Patrick.*

---

# Vorwort

**Thema Roboter-Manipulatoren** Ein Großteil des vorliegenden, zweibändigen Werks entstand aus meinen Vorlesungen zur Robotik an der Fakultät für Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen der Hochschule Landshut. Innerhalb des riesigen Themengebiets Robotik wird dabei die Entwicklung von Roboter-Armen (synonym zu Roboter-Manipulatoren bzw. kurz: Manipulatoren) behandelt. Diese gelten als typische Vertreter mechatronischer Systeme. Daher gestaltet sich ihre Entwicklung aus einer eng verwobenen und kompromissreichen Zusammenarbeit der drei Fachbereiche Elektrotechnik, Maschinenbau und Informatik. Eine strikte Einsortierung des Grundlagenwissens in obige drei Fachbereiche ist also nicht sinnvoll. Vielmehr setzt das vorliegende Lehrbuch einen Schwerpunkt auf Themen des Fachbereichs Elektrotechnik und ist durch eine fachbereichsübergreifende Darstellung geprägt.

**Ziel des zweibändigen Werks** ist die Vermittlung eines fundierten und breit angelegten Grundlagenwissens zur Entwicklung von Roboter-Manipulatoren: Grundlegende Entwicklungswerkzeuge bestehen dabei in mathematischen Modellen, zum Beispiel von Kinematik („Bewegungsmodell“) und Dynamik oder von Antriebskomponenten wie Motoren und Getrieben. Sie liefern das zur Auslegung von Roboter-Komponenten notwendige Systemverständnis. Aus diesem Grund liegt ein Hauptaugenmerk auf einer mathematisch fundierten Herleitung der Modelle sowie einer Erläuterung der zugehörigen Physik. Dabei wurde darauf geachtet, den mathematischen Formalismus minimal zu halten und Erklärungen in ausreichend kleinen Schritten zu detaillieren.

Viele der so behandelten mathematischen Methoden lassen sich an der Mechanik des Manipulators veranschaulichen. Als willkommener Nebeneffekt können somit Aspekte der Ingenieurmathematik am Experiment anschaulich begriffen werden. Plakativ könnte man sagen:

*„Robotik ist Mathematik zum Anfassen.“*

Neben dem reinen Erkenntnisgewinn und daraus entwickelten Theorien steht in Ingenieursdisziplinen deren Anwendung im Fokus. Daher findet sich im Anschluss an jede Herleitung stets eine Zusammenfassung in anwendungsorientierter Darstellung, zum Beispiel als Struktogramm oder rezeptartige Vorgehensanweisung.

**Die Lehrbücher richten sich an** Studierende aus einem Bachelor- oder Master-Ingenieurstudiengang der Fachbereiche Elektrotechnik, Maschinenbau und Informatik. Dabei werden Grundkenntnisse im Wesentlichen aus den Bereichen Ingenieurmathematik (Stoffumfang ca. zwei Semester Grundlagen-Vorlesung zu je 8 Semester-Wochenstunden) sowie technische Mechanik (Stoffumfang ca. eine Grundlagen-Vorlesung mit 4 Semester-Wochenstunden) vorausgesetzt. Vorwissen im Bereich elektrischer Antriebssysteme erleichtert das Verständnis, ist jedoch nicht unbedingt notwendig.

Darüber hinaus ist das Werk auch für Entwicklungsingenieure mit Berufserfahrung zum selbständigen Lernen gedacht.

**Organisation / Lesekompass** Für den Fachbereich Elektro- und Informationstechnik lässt sich die Entwicklungsarbeit eines Manipulators grob in zwei Tätigkeitsbereiche aufteilen: Modellbildung und Auslegung. Dies motiviert die Strukturierung des vorliegenden Werks in zwei Bände:

Band 1 führt mit einem einleitenden Kap. 1 in die Robotik sowie die hier betrachtete Roboterart der Manipulatoren ein. Des Weiteren wird hier ein Überblick der behandelten Themen gegeben. Dies erleichtert beim Studieren der nachfolgenden Kapitel das Einbetten des jeweiligen Themas in die Gesamtmaterie.

Die folgenden Kap. 2 bis 4 behandeln die Modellbildung der Kinematik, aufgliedert in die Bereiche direkte Kinematik, inverse Kinematik und differenzielle Kinematik. Die zugehörigen Kapitel bauen aufeinander auf; ein Überspringen von Abschnitten ist nicht zu empfehlen. Eine Ausnahme stellen Beweise und weiterführende Betrachtungen dar, die in allen Kapiteln durch einen kleineren Textsatz gekennzeichnet sind.

Kap. 5 beschließt Band 1 und stellt eine Methode zur Modellbildung der Dynamik vor.

Band 2 behandelt in Kap. 6 Grundlagen der Pfad- und Bahnplanung. Kap. 7 widmet sich der systematischen Auslegung von Gelenkantriebssystemen, Kap. 8 geht auf die Grundlagen der Regelung von Manipulatorgelenken ein.

Dabei sind Kap. 6 und 7 jeweils weitgehend unabhängig von den anderen Kapiteln lesbar. Das letzte Kap. 8 baut hingegen auf einigen Resultaten der Dynamik aus Kap. 5 auf.

**Vorlesungsbegleitung** Im Rahmen einer Grundlagenvorlesung zur Robotik (zum Beispiel im Hauptstudium eines Bachelor-Studiengangs der Elektro- und Informationstechnik) behandle ich in 3 Semester-Wochenstunden folgenden Stoffumfang:

- Kap. 1 bis 4 vollständig
- Grundlagen der Dynamik: Aus Kap. 5 Abschn. 5.1.1, 5.5.1-5.5.3 und 5.5.5
- Grundlagen der Pfad- und Bahnplanung: Abschn. 6.1 und 6.3.2

In einer fortgeschrittenen Robotik-Vorlesung (zum Beispiel im Master-Studiengang Elektro- und Informationstechnik) kann in 3 Semester-Wochenstunden der nahezu restliche Stoff gelehrt werden. Die hierfür notwendigen Robotik-Grundlagen können in wenigen Semester-Wochenstunden behandelt werden, so dass die Grundlagenvorlesung nicht vorausgesetzt werden muss.

**Alleinstellungsmerkmale** Robotik stellt eine junge Ingenieursdisziplin dar: Der erste Industrieroboter, *Unimate 1900*, kam erst im Jahr 1961 zum Einsatz. Daher existieren vergleichsweise wenige Standard-Lehrbücher der Robotik. Meistens werden darin Schwerpunkte gesetzt in den Themen *Modellbildung Mechanik*, *Regelung* sowie *maschinelle Bildverarbeitung*. Das vorliegende Buch setzt andere Schwerpunkte:

*Bildverarbeitung* ist mittlerweile zu einer eigenständigen Ingenieursdisziplin herangewachsen, mit einer Vielzahl spezialisierter Lehrbücher. Außerdem ist Bildverarbeitung thematisch nahezu unabhängig von Robotik. Aus diesem Grund wurde hier darauf verzichtet.

*Regelung* stellt ein intensiv beforschtes Themengebiet dar, mit einer klaffenden Lücke zwischen aktuellem Stand von Forschung und Industrie. Um mit der heute existierenden Vielzahl unterschiedlicher Regelungsmethoden zurechtzukommen, ist ein fundiertes Grundlagenwissen im Bereich der roboterspezifischen Regelungstechnik notwendig. Im Unterschied zu den meisten anderen Lehrbüchern der Robotik, werden daher keine komplexeren Regelungsverfahren behandelt. Vielmehr konzentriert sich das Buch im Bereich der Regelungstechnik auf die ausführliche Vermittlung von Grundlagenwissen. Darauf aufbauend wird ein vergleichsweise einfaches, aber in einer Vielzahl industriell eingesetzter Manipulatoren implementiertes Regelungsverfahren behandelt (dezentrale, antriebsseitige PD-Regelung). Komplexere Regelungsverfahren bauen auf einer Standard-Darstellung der Regelstrecke auf. Damit kann auf Fachbücher der Regelungstechnik verwiesen werden.

In der Entwicklung von Manipulatoren ist ein andauernder Trend hin zu Energieeffizienz und Leichtbau zu verzeichnen. Da die Masse eines Manipulators maßgeblich durch seine *Antriebssysteme* (bestehend aus Motor-Controller, Motor, Getriebe, Achse mit Lagerung, Sensorik) bestimmt wird, gewinnt deren *systematische Auslegung* besondere Bedeutung. Daher wurde diesem Thema ein eigenes Kapitel gewidmet.

**Zusatzmaterial** *Musterlösungen* zu den Aufgaben am Ende jedes Kapitels sowie ein *Errata* finden sich unter [www.springer.com](http://www.springer.com) auf der Seite des vorliegenden Werks.

**Danksagungen** Ich möchte meinen Robotik-Studenten für viele fachliche und stilistische Hinweise danken. Des Weiteren danke ich meinem Kollegen Martin Förg, der sich als Mechanik-Spezialist viel Zeit für angeregte Diskussionen und Probelesen nahm, und damit zum Gelingen des Kapitels *Dynamik* beitrug. Gleiches gilt für meinen Kollegen Alexander Kleimaier (elektrische Antriebstechnik), durch den ich einige persönliche Irrtümer im Bereich permanenterreger Synchronmaschinen und deren Umrichtung im Kapitel *Antriebsauslegung* aufdecken konnte. Mein Dank gilt auch meinen Kollegen Christian Faber (Physik) für wichtige Hinweise zu Kapitel *Differenzielle Kinematik*. Außerdem danke ich meinem Vater und meiner Ehefrau für das Probelesen und viele stilistische Verbesserungshinweise. Nicht zuletzt gilt mein Dank auch den Labor-Ingenieuren, die mir oft im Robotik-Labor den „Rücken freigehalten“ haben.

Ein ganz besonderer Dank gilt natürlich meiner Ehefrau und meinen drei Kindern, die in den vergangenen drei Jahren meiner schriftstellerischen Tätigkeit an so vielen Abenden, Wochenenden und Urlaubstagen auf ihren Ehemann und Vater verzichten mussten.

Vilsbiburg,  
im Mai 2019

*Jörg Mareczek*

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	1
1.1	Kurze Entwicklungsgeschichte der Robotik	1
1.2	Artenvielfalt der Robotik	8
1.3	Manipulatoren	10
1.4	Lesekompass und interessante Aufgabenstellungen	19
1.4.1	Lesekompass	19
1.4.2	Kinematik	20
1.4.3	Dynamik	27
1.4.4	Pfad- und Bahnplanung	28
1.4.5	Antriebsauslegung	31
1.4.6	Regelung	35
	Aufgaben	36
	Literatur	38
<b>2</b>	<b>Direkte Kinematik</b>	41
2.1	Einführung	42
2.2	Koordinatensysteme und Konventionen	44
2.2.1	Lokale Koordinatensysteme	46
2.2.2	Basis eines Koordinatensystems und Rotationsmatrizen	49
2.2.3	Koordinatentransformation durch Rotation und Translation	52
2.2.4	Homogene Transformation und Transformationsgraph	55
2.3	Rotationen	62
2.3.1	Rotationen im 2D	63
2.3.2	Elementar-Rotationen im 3D	66
2.3.3	Verkettete Rotationen und allgemeine Eigenschaften von Rotationsmatrizen	69
2.3.4	Orientierung durch ZYZ Euler-Winkel	73
2.3.5	Alternative Drehwinkel-Darstellungen	78

2.4	Modellbildung der Kinematik . . . . .	82
2.4.1	Definitionen zur Manipulator-Kinematik . . . . .	83
2.4.2	DH-Konvention . . . . .	89
	Aufgaben . . . . .	109
	Literatur . . . . .	116
<b>3</b>	<b>Inverse Kinematik . . . . .</b>	<b>117</b>
3.1	Einführung . . . . .	118
3.2	Basiskinematik 1: Dreh-Neigeelenk . . . . .	128
3.3	Basiskinematik 2: Zwei parallele Drehgelenkachsen/planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator . . . . .	131
3.4	Basiskinematik 3: Pseudo-Kugelgelenk . . . . .	135
3.5	Basiskinematik 4: Anthropomorpher 6-DoF Manipulator . . . . .	137
	Aufgaben . . . . .	143
	Literatur . . . . .	145
<b>4</b>	<b>Differenzielle Kinematik . . . . .</b>	<b>147</b>
4.1	Einführung . . . . .	148
4.2	Geschwindigkeitskinematik . . . . .	150
4.2.1	Geschwindigkeit eines allgemeinen Körpers im Raum . . . . .	150
4.2.2	Geschwindigkeiten bei einer DH-konformen kinematischen Kette . . . . .	154
4.2.3	Geometrische Jacobi-Matrix . . . . .	156
4.2.4	Analytische Jacobi-Matrix . . . . .	160
4.2.5	Inverse Geschwindigkeitskinematik und Manipulator-Bestimmtheit . . . . .	165
4.2.6	Singularitäten . . . . .	177
4.2.7	Ausblick auf Beschleunigungskinematik . . . . .	190
4.3	Statik . . . . .	192
4.3.1	Herleitung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	194
4.3.2	Inverse Statik . . . . .	200
	Aufgaben . . . . .	206
	Literatur . . . . .	208
<b>5</b>	<b>Dynamik . . . . .</b>	<b>209</b>
5.1	Grundlagen . . . . .	210
5.1.1	Freiheitsgrade, Zwangsbindungen und generalisierte Koordinaten . . . . .	211
5.1.2	Lagrangesche Bewegungsgleichungen für Systeme aus Punktmassen . . . . .	216
5.2	Kinetische Energie . . . . .	224
5.2.1	Massenträgheitsmomente und kinetische Energie eines Starrkörpers . . . . .	224
5.2.2	Kinetische Energie des Manipulators . . . . .	235

---

5.3	Potentielle Energie . . . . .	242
5.4	Nichtkonservative Kräfte und Momente . . . . .	244
5.4.1	Gelenkantriebe . . . . .	244
5.4.2	Gelenkreibung . . . . .	245
5.4.3	Externe Kräfte und Momente am Endeffektor . . . . .	247
5.5	Bewegungsgleichung . . . . .	248
5.5.1	Massenmatrix . . . . .	252
5.5.2	Kreiselkräftematrix bzw. Kreiselkräftevektor . . . . .	253
5.5.3	Gelenkreibung und -antriebe . . . . .	254
5.5.4	Algorithmus zum Aufstellen der Bewegungsgleichung . . . . .	254
5.5.5	Realisierung der Bewegungsgleichung in einer Simulationsumgebung . . . . .	263
5.6	Anhang: Differenzierungsregeln für Matrizen und Vektoren . . . . .	265
	Aufgaben . . . . .	267
	Literatur . . . . .	273
	<b>Stichwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>275</b>

---

## Über den Autor

**Prof. Dr.-Ing. Jörg Mareczek** studierte an der TU-München Elektro- und Informationstechnik mit Schwerpunkten Regelungstechnik und Robotik. Für seine anschließende Forschung im Bereich nichtlinearer Regelung am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik erhielt er 2002 den Doktor-Ingenieursgrad. Es folgten 12 Jahre Industrietätigkeit in der Forschung, Entwicklung und Serienreifemachung mobiler Entschärfungsroboter, Manipulatoren und Master-Slave-Systeme. Während dieser Zeit konnte er als Leiter unterschiedlicher Fachbereiche sowie durch diverse Aufgaben im Projektmanagement auch interdisziplinäre Erfahrungen aufbauen.

2014 folgte Dr. Mareczek dem Ruf der Hochschule Landshut und übernahm dort das Lehrgebiet Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen. Seine Lehrtätigkeit umfasst neben der Robotik auch Ingenieurmathematik und Projektmanagement. Seine Forschungsinteressen liegen im Bereich von Master-Slave-Systemen, Regelung von Leichtbau-Manipulatoren, Pfad- und Bahnplanung unter dem Einfluss von Singularitäten, Dynamik sowie künstlicher Intelligenz.

Zur Einführung in die Robotik wird zunächst in Abschn. 1.1 ein kurzer Abriss der Entwicklungsgeschichte gegeben, gefolgt von einem Überblick der heute existierenden Artenvielfalt an Robotern in Abschn. 1.2. Die im vorliegenden Buch betrachtete spezielle Roboterart des Manipulators wird in Abschn. 1.3 eingeführt. Zur Motivation der einzelnen Fachkapitel werden in Abschn. 1.4 interessante Aufgabenstellungen und Sachverhalte vorgestellt.

---

## 1.1 Kurze Entwicklungsgeschichte der Robotik

**Frühe Ansätze** Der Begriff *Roboter*<sup>1</sup> ist ein Kunstwort und geht aus dem slawischen Wort *robota* für *Fronarbeit* hervor, [2, Band 18, S. 440]. Der Begriff taucht zum ersten Mal im sozialkritischen Theaterstück *R.U.R. - Rossum's Universal Robots* des tschechischen Schriftstellers Karel Čapek<sup>2</sup> auf. Das Theaterstück entstand in Prag zu Beginn des 20. Jahrhunderts unter dem Eindruck äußerst prekärer Beschäftigungsverhältnisse für Industriearbeiter. Darin wird eine düstere Zukunftsvision gezeichnet, in der vom Unternehmen R.U.R. künstliche Menschen (heute als *Androide* bezeichnet) gebaut werden, um den Menschen von stupider Industriearbeit zu entlasten. Die künstlichen Menschen lehnen sich jedoch gegen die Menschheit auf und vernichten diese, siehe Abb. 1.1.

Die von Čapek geprägte Bedeutung des Begriffs *Roboter* hat sich bis heute gehalten: So versteht man nach der Enzyklopädie Brockhaus im allgemeinen Sprachgebrauch unter

---

<sup>1</sup> Als Robot, Robath, Robott, Plural: Robote, bezeichnete man im Feudalismus auch in deutschsprachigen Gebieten Frondienste (gekennzeichnet zum Beispiel durch Erbuntertänigkeit, Leibeigenschaft von Bauern für ihre Grundherren), [21, 23].

<sup>2</sup> Karel Čapek: Tschechischer Schriftsteller, Journalist und Fotograf 1890–1938. Die Idee für die Verwendung des Begriffs Roboter geht auf den Bruder Josef Čapek zurück. Die Uraufführung von R.U.R. fand am 25. Januar 1921 in Prag statt, [6].

**Abb. 1.1** Szene aus einer frühen Inszenierung des Theaterstücks R.U.R.: Als Roboter bezeichnete künstliche Menschen rebellieren und vernichten die Menschheit.  
Quelle: [15]



einem Roboter eine Maschine, die dem Aussehen des Menschen nachgebildet ist und<sup>3</sup> die Funktion des Menschen ganz oder teilweise übernimmt, [2, Band 18, S. 440].

Die Idee vom künstlichen Menschen findet sich bereits im 12. Jahrhundert in der jüdischen Legende vom *Golem*. Darin wird mittels Buchstabenmystik eine aus Lehm geformte Figur zum Leben erweckt, [22].

Die Abkehr vom religiös geprägten Weltbild hin zur *anthropozentrischen*<sup>4</sup> Sicht prägt die Kulturepoche der Renaissance im 15. und 16. Jahrhundert als Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit. So steht der Mensch im Mittelpunkt von Kunst und Wissenschaft. Eine zentrale Fragestellung ist dabei, wie Leben aus wissenschaftlicher Sicht entsteht. Eng damit verbunden sind philosophische Fragestellungen hinsichtlich der eigenen Existenz sowie der Bedeutung von Denkfähigkeit und Ich-Bewusstsein.

Eine dem Menschen natürliche Herangehensweise an derartig komplexe Fragestellungen besteht darin, wesentliche Merkmale in Anschauungsmodellen herauszustellen. Dies könnte eine Erklärung für den Drang der Menschheit sein, selbständig schöpferisch zu wirken, im Sinne der künstlichen Erschaffung eines Menschen.

So beschreibt der Schweizer Arzt, Naturforscher und Philosoph Paracelsus<sup>5</sup> in der Schrift *De natura rerum* im Jahr 1538 eine konkrete Vorgehensweise zur Erschaffung eines Menschen auf alchemistischem Wege. Er bezeichnet dieses Wesen als *Homunculum* beziehungsweise *Homunculus*:

<sup>3</sup> Im Original steht hier *oder*. Damit ist die inhaltliche Aussage vom Verfasser leicht modifiziert.

<sup>4</sup> Aus dem Griechischen *ánthrōpos* für *Mensch*, [2, Band 1, S. 653, 657].

<sup>5</sup> Eigentlicher Name: Philipp Aureolus Theophrast Bombast von Hohenheim, 1493–1541, [2, Band 15].

*Man nehme etwas Pferdemist und das Sperma eines Mannes, fülle beides in einen Kolben und erwärme diesen sachte „auf 40 Tage oder so lang bis er lebendig werde und sich beweg und rege, [...] nach solcher zeit wird es etlicher maßen einem menschen gleich sehen, doch durchsichtig on ein corpus.“ Würde er nun „gar weislich gespeiset und erneret [...] bis auf 40 wochen und in steter gleicher werme [...]“ gehalten, dann „wird ein recht lebendig menschlich kint daraus mit allen glitmaßßen wie ein ander kint, das von einem weib geboren wird, doch vil kleiner. dasselbig wir ein homunculum nennen [...].“*

Zitat nach [16, S. 546].

Auch Goethe greift das Motiv des alchemistisch erzeugten Homunculus in Faust II auf und verknüpft damit die „Idee einer erfolgreichen Naturwissenschaft“, [24]:

Wagner: [...]

*Es leuchtet! seht! - Nun läßt sich wirklich hoffen,  
Daß, wenn wir aus viel hundert Stoffen  
Durch Mischung - denn auf Mischung kommt es an -  
Den Menschenstoff gemächlich komponieren, [...]*

Johann Wolfgang von Goethe<sup>6</sup>

Ein wesentlicher erster Schritt zum Verständnis der menschlichen Existenz besteht im Studium des Aufbaus seines Körpers. So führte bereits Leonardo da Vinci<sup>7</sup> detaillierte anatomische Studien durch. Sie führten unter anderem zu einer *Proportionenlehre* des menschlichen Körpers. Darauf aufbauend, entwarf er Konstruktionspläne von Bewegungsmaschinen in Form eines Ritters in Rüstung, eines Tamburin-Mannes sowie eines Löwen. Basierend auf fragmentarischen Originalzeichnungen<sup>8</sup> Leonardos wurden in den vergangenen Jahrzehnten die Konstruktionsweise beider humanoider Bewegungsmaschinen mit Hilfe moderner Simulationstechniken rekonstruiert und damit einige Bewegungsfunktionen im Experiment nachgewiesen, siehe Abb. 1.2 sowie [12, 13]. Man geht heute davon aus, dass Leonardos Bewegungsmaschinen zur Unterhaltung bei Hofe dienten und damit auch tatsächlich aufgebaut wurden. Originale Aufbauten sind jedoch nicht erhalten.

**Roboter in der Automatisierungstechnik** In der industriellen Fertigung wurden bis zur ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts zerspanende Arbeiten mit handgeführten Werkzeugmaschinen durchgeführt. Unterschiedliche Bearbeitungsarten erforderten dabei meist spezialisierte Werkzeugmaschinen, wie zum Beispiel Drehbänke, Bohrmaschinen, Sägen etc.

<sup>6</sup> Faust: Der Tragödie zweiter Teil, zweiter Akt, Laboratorium, Verse 6848–6851, veröffentlicht 1832.

<sup>7</sup> Gilt allgemein als Universalgenie und seiner Zeit weit voraus; italienischer Maler, Bildhauer, Architekt, Kunsthistoriker, Naturforscher und Ingenieur, 1452–1519, [2, Band 3, S. 294 ff].

<sup>8</sup> Sammlung *Codex Atlanticus*, beinhaltet 1119 Blätter im Original, Bibliothek Ambrosiana in Mailand.

**Abb. 1.2** Reproduktion des trommelnden Roboters von Leonardo Da Vinci aus der Niccolai Florence Collection, Museo Leonardo da Vinci Firenze; mit freundlicher Genehmigung von Gabriele Niccolai



Ab der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden diese Fertigungsschritte durch numerisch gesteuerte Werkzeugmaschinen (*NC-Maschine*, NC: Numerical Control) automatisiert, [26]. Diese konnten unterschiedliche Arbeitsanweisungen ausführen, zum Beispiel Fahre zur Position  $X = 20 \text{ mm}$ ,  $Y = 30 \text{ mm}$ ,  $Z = 100 \text{ mm}$  mit Vorschub  $1000 \text{ mm/s}$ . Eine zeitliche Abfolge solcher Arbeitsanweisungen konnte der NC-Maschine durch die anfänglichen Speichermedien Lochstreifen oder Magnetband vorgegeben werden. Auf der NC-Maschine konnte ein solches Programm nur eingelesen und automatisch wiederholt ausgeführt werden. Die Beschreibung beziehungsweise Programmierung der Speichermedien erfolgte auf separaten Maschinen, [26]. Entscheidend für die große Verbreitung der NC-Maschine in der industriellen Massenproduktion war die damit verbundene Kostenersparnis durch Vermeidung von Handarbeit.

Die NC-Maschine wurde ab 1972 durch die *CNC-Maschine* (CNC: Computerized Numerical Control) abgelöst. Im Unterschied zur NC-Maschine steht bei der CNC-Maschine ein integrierter Computer mit Massenspeicher und Display zur Verfügung, auf dem die Ablaufprogramme entwickelt, simuliert und gespeichert werden können, [26].

Neben der Automatisierung von zerspanenden Fertigungsabläufen durch NC-Maschinen entwickelte sich auch ein Konzept zur Automatisierung der Handhabungstechnik in der Fertigung.

Die Beförderung von Objekten in der Fertigung, zum Beispiel vom Lager zur Bearbeitungsmaschine, wurde bis dato vollständig von Hand durchgeführt, durch händisch gesteuerte Transportmaschinen (zum Beispiel Kräne) oder Fließbandsysteme mit nocken-gesteuerten (Englisch: *cam-controlled*) Transporthebeln beziehungsweise mechanischen Mitnehmern zum Be- und Entladen des Bandes. Solche Maschinen waren auf die jeweils zugrunde liegende Fertigungsaufgabe hochspezialisiert, so dass deren Einsatz nur bei ausreichend hoher Stückzahl wirtschaftlich sinnvoll war. Ein rein manuell durchgeführter Transport war arbeitszeitintensiv und somit teuer.

Ein weiteres Hindernis in der Fertigungstechnik bestand darin, dass bei nahezu jeder Änderung im Produktdesign neue Werkzeugmaschinen angefertigt werden mussten.

Diese Unwegsamkeiten in der Fertigungstechnik brachten George Charles Devol<sup>9</sup> auf die Idee einer Maschine, die man heute als *Industrieroboter* bezeichnet: Hierfür reichte er 1954 ein Patent mit dem Titel „Programmed Article Transfer“ ein, welches ihm 1961 zugeteilt wurde. Darin schreibt Devol: „Die vorliegende Erfindung ermöglicht zum ersten Mal eine mehr oder weniger allgemein nutzbare Maschine mit universeller Einsetzbarkeit für eine riesige Vielfalt von Anwendungen mit idealerweise zyklischen Arbeitsprozessen [im Original: Steuerung].“, sinngemäß übersetzt aus [3, Zeilen 42–45]. Im Patent sind folgende Fähigkeiten als weitere Vorteile der Erfindung aufgeführt:

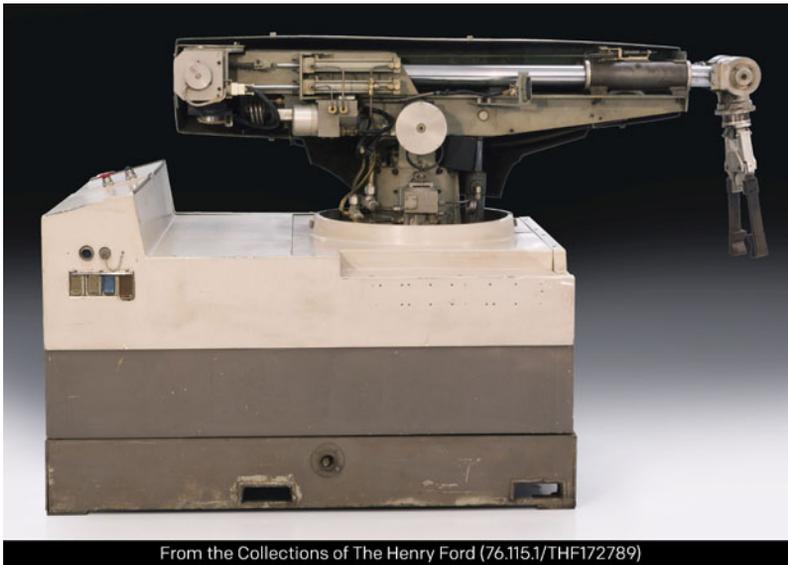
- „Automatisierung in Bereichen, in denen dies aus ökonomischen Gründen mit herkömmlicher Technologie bislang unmöglich war“, sinngemäß nach [3, Zeilen 48–51]
- „[...] Massenfertigung einer universell einsetzbaren automatischen Maschine, die leicht an unterschiedlichste Anwendungen anpassbar ist.“ [3, Zeilen 51–53]
- „[...] schnelles Umrüsten einer an eine spezielle Aufgabenstellung angepassten Maschine, so dass diese neue Aufgabenstellungen verrichten kann [...]“ [3, Zeilen 53–56]

Der *Programmed Article Transfer* sollte durch Programmierung eine dem Menschen konkurrenzfähige Einsatzflexibilität im Bereich der Handhabungstechnik erreichen. Für die so erzielte universelle Automatisierung wird aus dem Englischen *universal automation* das Kunstwort *Unimation* abgeleitet.

Zusammen mit Joseph Engelberger<sup>10</sup> gründete Devol 1962 die Firma *Unimation Inc.* Basierend auf Devols Patent wurde dort unter dem Namen *Unimate 1900* der erste Industrieroboter der Welt entwickelt, [9], Abb. 1.3. Dieser wurde 1961 zum ersten Mal industriell eingesetzt, und zwar in einer Fertigungsstraße für Druckgussteile von General Motors (GM) in Trenton, New Jersey. Dabei entnahm der Roboter heiße Teile aus der Druckgussmaschine und legte sie in einer Wanne zur Kühlung ab. Diese Aufgabe war

<sup>9</sup> US-amerikanischer Erfinder, 1912–2011.

<sup>10</sup> US-amerikanischer Ingenieur, auch „Vater der Robotik“ genannt, 1925–2015.



**Abb. 1.3** Unimate 1900 Roboter der Seriennummer 1, installiert im Jahre 1961 in einer Fertigungsstraße für Druckgussteile von General Motors. Das Bild entstammt der Henry-Ford Sammlung (from the collections of The Henry Ford). Um den inneren Aufbau zu erkennen, wurde das Gehäuse des ersten Armsegments entfernt

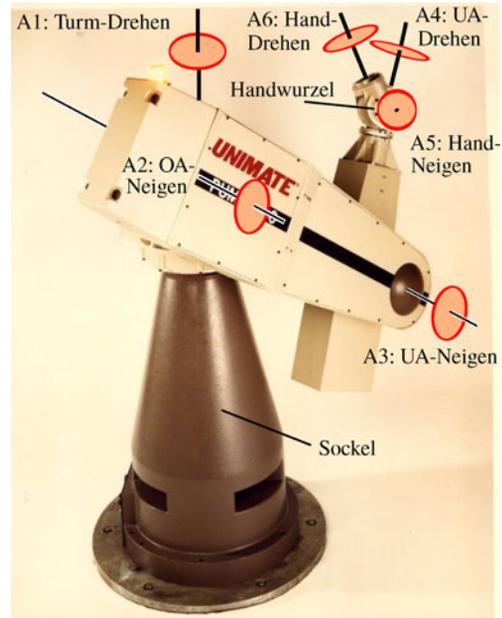
für Industriearbeiter wegen großer Hitze und giftiger Dämpfe gefährlich, so dass der Roboter-Einsatz auf der Hand lag und seitens der Arbeiterschaft begrüßt wurde. Für solche Aufgaben prägte sich der Begriff des **3D-Jobs**:

- **Dirty:** Dreckige, verschmutzte, gesundheitsschädliche Arbeitsumgebung
- **Dull:** Öde, langweilige, zyklisch sich wiederholende Tätigkeiten
- **Dangerous:** für Leib und Leben gefährliche Tätigkeiten

Ab 1969 wurden Unimate 1900 zum Punktschweißen von Automobil-Karosserien in der Fertigungsstraße von GM in Lordstown, Ohio eingesetzt (ca. 500 Schweißvorgänge pro Karosserie), [20]. Dabei handelte es sich um das am weitesten automatisierte Automobilwerk der damaligen Zeit. Die Fertigungsrate von ca. 100 Autos pro Stunde war die höchste weltweit. Der Roboter stieg zum unverzichtbaren Bestandteil erfolgreicher Fertigungsstraßen der Automobilindustrie auf. So wurde Unimate 1900 ab diesem Zeitpunkt auch im europäischen Markt bei vielen großen Automobilherstellern eingesetzt. Hinzu kam der japanische Markt durch ein 1969 getroffenes Lizenzabkommen mit Kawasaki Heavy Industries.

Ab den 1970er-Jahren waren neue Technologien, wie universell einsetzbare Mikroprozessoren (Typ 4004 von Intel), Solid-State-Drives, Getriebetechnik (Harmonic Drive-Getriebe) und Programmiersprachen mit höherem Abstraktionsgrad (zum Beispiel Programmiersprache C) verfügbar. Dies ermöglichte die Entwicklung des für die damalige

**Abb. 1.4** Roboterarm PUMA mit eingezeichneten Gelenkachsen, ohne Endeffektor; mit freundlicher Genehmigung der Stäubli Tec-Systems GmbH Robotics



Zeit sehr fortgeschrittenen Roboterarms PUMA (**P**rogrammable **U**niversal **M**achine for **A**ssembly) von Victor Scheinmann in der Unimation Inc, siehe Abb. 1.4. Die Anordnung seiner Gelenkachsen ist dem menschlichen Arm ähnlich, so dass man von einem *anthropomorphen*<sup>11</sup> Roboterarm spricht. Man bezeichnet die Gelenke der Reihenfolge nach mit

- Taille beziehungsweise Turm-Drehen oder Achse 1,
- **O**berarm-Neigen (kurz: OA-Neigen) beziehungsweise Achse 2,
- **U**nterarm-Neigen (kurz: UA-Neigen) beziehungsweise Achse 3,
- **U**nterarm-Drehen (kurz: UA-Drehen) beziehungsweise Achse 4,
- **H**and-Neigen beziehungsweise Achse 5 und
- **H**and-Drehen beziehungsweise Zange-Drehen oder Achse 6.

Die Anordnung der letzten drei Gelenkachsen ist dabei so gewählt, dass sie sich in einem Punkt, der sogenannten *Handwurzel*, schneiden. Diese konstruktive Anordnung reduziert stark die Rechenkosten der inversen Kinematik, einem Teil der Robotersteuerung der so bedeutend ist, dass man dabei auch vom *Herzstück der Robotersteuerung* spricht, siehe Kap. 3. Bis heute orientiert sich die mechanische Konstruktion vieler Roboter an PUMA. Ein aussagekräftiges Video über die Geschichte von PUMA findet sich in [4].

<sup>11</sup> *Anthropomorph*: zusammengesetzt aus dem Griechischen *ánthrōpos* für *Mensch* und *morphḗ* für *Gestalt*; sinngemäß: von menschlicher Gestalt, menschenähnlich, menschlich, [2, Band 1, S. 653, 657].

Dem Wettbewerb mit europäischen und japanischen Roboter-Herstellern konnte Unimation Inc. letztendlich nicht standhalten, da man den Technologiewechsel von hydraulischen zu elektrischen Antrieben bei Unimation 1900 verpasste, [9]. GM wandte sich in der Folge von der Unimation Inc. ab. Dies führte zu erheblichen Umsatzeinbrüchen bei Unimation Inc. In den USA wurde zur damaligen Zeit der erst kleine Robotermarkt vollständig von Unimation Inc. abgedeckt, so dass sich dort neben Unimation Inc. keine anderen Roboter-Hersteller etablieren konnten. Dies ist wohl einer der Gründe, warum nach dem Untergang von Unimation Inc. bis heute die meisten Industrieroboter in Europa und Asien hergestellt werden.

---

## 1.2 Artenvielfalt der Robotik

Eine in der Automatisierungstechnik eingesetzte Maschine bezeichnet man als *Industrieroboter*<sup>12</sup>, wenn sie automatisch gesteuert und universell einsetzbar ist, sowie mindestens drei programmierbare Bewegungsachsen aufweist und diese Programmierung veränderbar ist. Typische Aufgabengebiete eines Industrieroboters umfassen (siehe auch [17, Part F, Kap. 54] für eine ausführliche Liste):

- Hantieren/Handhabung/Manipulation<sup>13</sup> von Gegenständen wie zum Beispiel Palettieren und andere Pick&Place-Aufgaben, Montage-Aufgaben
- Schweißen, insbesondere Punktschweißen
- Metallverarbeitung wie zum Beispiel Biegen, Bohren
- Lackieren

Solche unterschiedlichen Aufgaben erfordern angepasste Werkzeuge am Ende des Roboterarms, wie zum Beispiel Zwei-Finger-Greifer oder Schweißzangen. Man bezeichnet diese Werkzeuge im Kontext der Robotik als *Endeffektoren* (kurz: EE). Industrieroboter besitzen einen Montageflansch mit elektrischen Schnittstellen, an den der jeweils notwendige Endeffektor montiert und angeschlossen wird. So haben sich heute zwei unterschiedliche Industriezweige herausgebildet: Hersteller von Industrierobotern und solche von Endeffektoren.

---

<sup>12</sup> DIN ISO 8373 sollte deutsche Bezeichnungen in der Robotik klären. Sie wurde jedoch zurückgezogen. In Ermangelung an Alternativen wird diese hier als Orientierungshilfe trotzdem erwähnt. Darin findet sich unter anderem eine Definition des Begriffs *Industrieroboter* wie im Text dargestellt.

<sup>13</sup> Manipulation setzt sich zusammen aus dem Lateinischen *manus* für Hand und *plere* für füllen [2, Band 14]; bedeutet im übertragenen Sinn *etwas in der Hand haben*; im eigentlichen Sinn *Handhabung* beziehungsweise *Hantierung*, [25].

In Analogie zum Begriff der *ökologischen Nische* in der Biologie verwendet man im Kontext der Robotik den Begriff der *ökonomischen Nische*, [1]. Darunter versteht man ein Marktsegment, in dem der Konkurrenzdruck für einen bestimmten Roboter so gering ist, dass der Roboter wirtschaftlich gewinnbringend ist und sich daher seine Absatzzahl (Analogie zur Biologie: Population) vergrößert. In vielen Fällen stellt der Mensch selbst die größte Konkurrenz für den Roboter dar. Dabei ergeben sich ökonomische Nischen in der Regel dort, wo *Fähigkeitslücken des Menschen* durch den Roboter ergänzt werden können.

So sind mit der Zeit in unterschiedlichen ökonomischen Nischen beziehungsweise Nischenmärkten, neben Industrierobotern, eine Vielzahl weiterer Roboterarten entstanden. Typische Beispiele hierfür sind:

- Staubsauger-Roboter, Wisch-Roboter
- Fassadenreinigungs-Roboter
- Telepräsenz- und Teleaktions-Systeme beziehungsweise *Master-Slave-Systeme*:  
Bei einem Telepräsenz- und Teleaktions-System soll der Bediener möglichst realitätsgetreu virtuell in eine entfernte Umgebung eintauchen. Hierzu wird ihm die entfernte Umgebung über alle Sinneskanäle vermittelt; der visuelle Kanal zum Beispiel mittels eines Stereo-Kamera-Paars in der entfernten Umgebung und einem binokularem Display in der lokalen Umgebung. Kräfte und Momente (*Kinästhetik*) werden in der entfernten Umgebung über einen Roboterarm gemessen und mittels eines zweiten Roboterarms in der lokalen Umgebung dem Menschen rückvermittelt. Im Idealfall kann der Bediener nicht mehr zwischen lokaler und entfernter Umgebung unterscheiden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Transparenz*: Der Bediener fühlt sich *telepräsent* und kann *teleaktiv* werden.  
Falls nur der visuelle und kinästhetische Kanal vermittelt wird, spricht man von einem *Master-Slave-System*. Dieses besteht in der lokalen Umgebung aus einem Eingabebotterarm (*Master-Arm*) mit einem visuellen Displaysystem und in der entfernten Umgebung aus einem Ausgabebotterarm (*Slave-Arm*) mit einem Kamerasystem. Master-Slave-Systeme werden zum Beispiel für intuitives Hantieren in gefährlichen Umgebungen benötigt, wie zum Beispiel zur Behebung von Störfällen in der heißen Zelle eines Kernkraftwerks (siehe Abb. 1.5) oder zur Entschärfung von Sprengsätzen.
- Exoskelett-Roboter und Roboter-Prothesen
- Chirurgie-Roboter
- Fahrerlose Transportsysteme (FTS), zum Beispiel in der Automatisierungstechnik zur automatischen Konfektionierung von Bearbeitungsmaschinen
- Tauchroboter zur Talsperreninspektion
- Kanalinspektionsroboter
- Service-Roboter, zum Beispiel für Hol-Bring-Dienste oder zur Kommunikation des Menschen mit einer künstlichen Intelligenz



**Abb. 1.5** Einsatz des Master-Slave-Systems EMSM3 der telerob-GmbH im Kernkraftwerk. *Links:* Kontrollzentrum mit zwei Master-Robotern. *Rechts:* Slave-System, bestehend aus zwei Manipulatoren, in der heißen Zelle eines Kernkraftwerks (dargestellt ist ein Übungs-Szenario); mit freundlicher Genehmigung der Kerntechnischen Entsorgung Karlsruhe GmbH

Die bei diesen Roboterarten auftretenden Forschungs- und Entwicklungsbereiche lassen sich grob in folgende Kategorien zusammenfassen:

- Mechanische Manipulation
- Telepräsenz- und Teleaktion
- Lokomotion (Beförderung)
- Künstliche Intelligenz
- Maschinelles Sehen
- Selbstlokalisierung und Kartenbildung

---

### 1.3 Manipulatoren

**Manipulator als Oberbegriff für Roboterarme** Zum Manipulieren gefährlicher Gegenstände, wie zum Beispiel toxischer oder radioaktiver Stoffe in Laboratorien, werden von Hand geführte Hebelgestänge verwendet, die man *Manipulator* (kurz: MPL) nennt. Diese unterscheiden sich von Industrierobotern dadurch, dass sie keinen automatischen Betrieb ermöglichen. Außerdem sind sie vom Menschen gesteuert und angetrieben. Dabei können jedoch – aufgrund rein mechanischer Kopplung – nur geringe Distanzen zwischen Bediener und Endeffektor überwunden werden. Sind größere Distanzen notwendig, wie

zum Beispiel bei Entschärfungsaufgaben oder bei der Manipulation von Gegenständen in der heißen Zelle eines Kernkraftwerks, ist eine solche rein mechanische Verkopplung zwischen Bediener und Endeffektor nicht mehr möglich.

In diesen Fällen setzt man Master-Slave-Systeme ein. Im einfachsten Fall sind Master- und Slave-Roboter baugleich. Als Endeffektor besitzt der Master einen Eingabegriff, durch den der Bediener Position und Orientierung des Slave-Endeffektors kommandiert. Diese Informationen werden an den entfernten Slave vermittelt und dort durch eine Robotersteuerung umgesetzt, das heißt der Slave bewegt sich im Idealfall simultan zum Master. Des Weiteren ist es in der Regel notwendig, die Kräfte und Momente, die der Slave über seinen Endeffektor auf seine Umgebung ausübt, in herabskaliertem Form dem Menschen rückzuvermitteln. Dies bezeichnet man als *kinästhetisches Feedback*. Hierfür muss der Master-Roboter aktiv angetrieben sein und über Gelenkregelungen verfügen. Typischerweise erfolgt neben dem kinästhetischen Kanal auch noch eine Übertragung auf dem visuellen Kanal durch Kamera- und Display-Systeme.

Obwohl ein solches Master-Slave-System vollständig vom Menschen gesteuert wird, handelt es sich dabei nicht um einen Manipulator nach klassischer Definition: Die darin enthaltenen Roboterarme sind angetrieben und besitzen eine Regelung. Die Roboterarme des Master-Slave-Systems stellen aber auch keine Industrieroboter dar, da diese nicht automatisch betrieben werden.

Ein weiteres Beispiel einer Roboterart, die sowohl Eigenschaften eines klassischen Manipulators, als auch die eines Industrieroboters aufweist, sind *CoBots* (Kunstwort aus dem Englischen **C**ollaborative **R**obots). Solche Roboterarme besitzen ausreichend hohe Sicherheitsstandards, um sich den Arbeitsraum mit dem Menschen teilen zu können. Eine Absperrung der Roboterzelle ist somit nicht notwendig. Ziel ist es, die Aufgabenstellung zwischen Roboter und Werker gemäß der jeweiligen Stärken aufzuteilen. Hierfür kann es auch notwendig sein, dass Roboter und Mensch Kräfte und Momente aufeinander ausüben. Eine solche *hybride Fertigungszelle* bezeichnet man als **Mensch-Roboter-Kollaborations-System** (MRK-System).

Aufgrund der Überschneidung der Merkmale von klassischem Manipulator und Industrieroboter hat sich, insbesondere im englischen Sprachgebrauch, der Begriff des *Manipulators* (Englisch: *manipulator*) als Oberbegriff für einen Roboterarm durchgesetzt. Ein Industrieroboter stellt somit den häufig anzutreffenden Sonderfall eines rein automatisch funktionierenden Manipulators in der Automatisierungstechnik dar.

**Zugpferd Industrieroboter** Von allen Roboterarten sind Industrieroboter am häufigsten vertreten. Sie schließen Fähigkeitslücken des Menschen in Form von 3D-Jobs's im Bereich der Automatisierungstechnik wie zum Beispiel Hantieren schwerer Gegenstände, schnelles Hantieren mit hoher Präzision oder zyklische Bewegungen. Steigende Stückzahlen, ausgereifte technische Komponenten (wie zum Beispiel elektrische Antriebsstränge) mit Plug&Play-Fähigkeit sowie Selbstdiagnosesysteme sind Hauptgründe dafür, dass die

Kosten für Herstellung, Inbetriebnahme und Wartung von Industrierobotern nahezu kontinuierlich seit 1990 sinken.

Gleichzeitig steigen in den Industrieländern die Lohnkosten, so dass die Konkurrenzfähigkeit von Industrierobotern zunimmt, siehe zum Beispiel Abbildung „Cost of automation“ aus [18]. Dies führt zu rasch anwachsenden Umsatzzahlen von Industrierobotern: Aus Abb. 1.6 (oben) erkennt man, dass der Bestand an derzeit sich im Betrieb befindlichen Industrierobotern mit einer hohen Zuwachsrate über die Zeit zunimmt. Im unteren Teilbild von Abb. 1.6 sind die Absatzzahlen von Industrierobotern über die Zeit, nach Kontinenten sortiert, dargestellt. Seit 2012 steigt demnach die Zahl der verkauften Industrieroboter in allen Kontinenten kontinuierlich an. Asien zusammen mit Australien weisen dabei deutlich höhere Absatzzahlen auf, als Europa mit Amerika zusammen. Der Knick in 2009 geht auf die weltweite Wirtschaftskrise in diesem Jahr zurück.

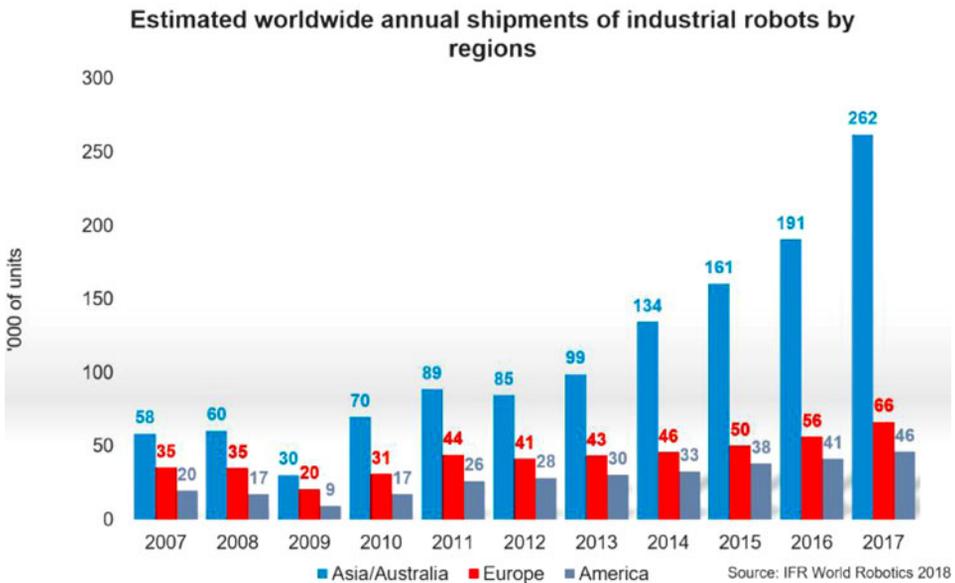
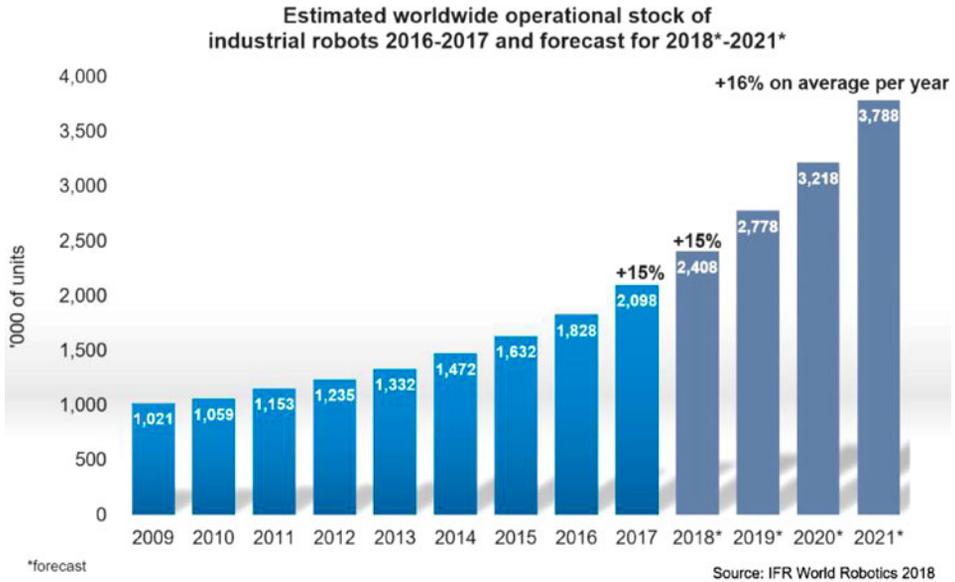
Das IFR (**I**nternational **F**ederation of **R**obotics) untersucht seit Jahrzehnten wirtschaftliche Faktoren der Robotik und erstellt dazu Statistiken. Demnach betrug im Jahr 2017 die weltweite *Roboterdichte* (definiert als Anzahl Industrieroboter bezogen auf 10 000 angestellte Arbeiter) im Bereich des produzierenden Gewerbes 85 Roboter pro 10 000 angestellte Arbeiter. Dabei besitzt Europa die höchste Roboterdichte mit 106 Robotern, gefolgt von Amerika mit 91 Robotern und Asien und Australien zusammen mit 75 Robotern – immer bezogen auf 10 000 angestellte Arbeiter, [5].

Aufgrund der großen wirtschaftlichen Bedeutung von Industrierobotern und deren Zugehörigkeit zur Klasse der Manipulatoren werden im vorliegenden Buch ausschließlich Roboter vom Typ Manipulator betrachtet.

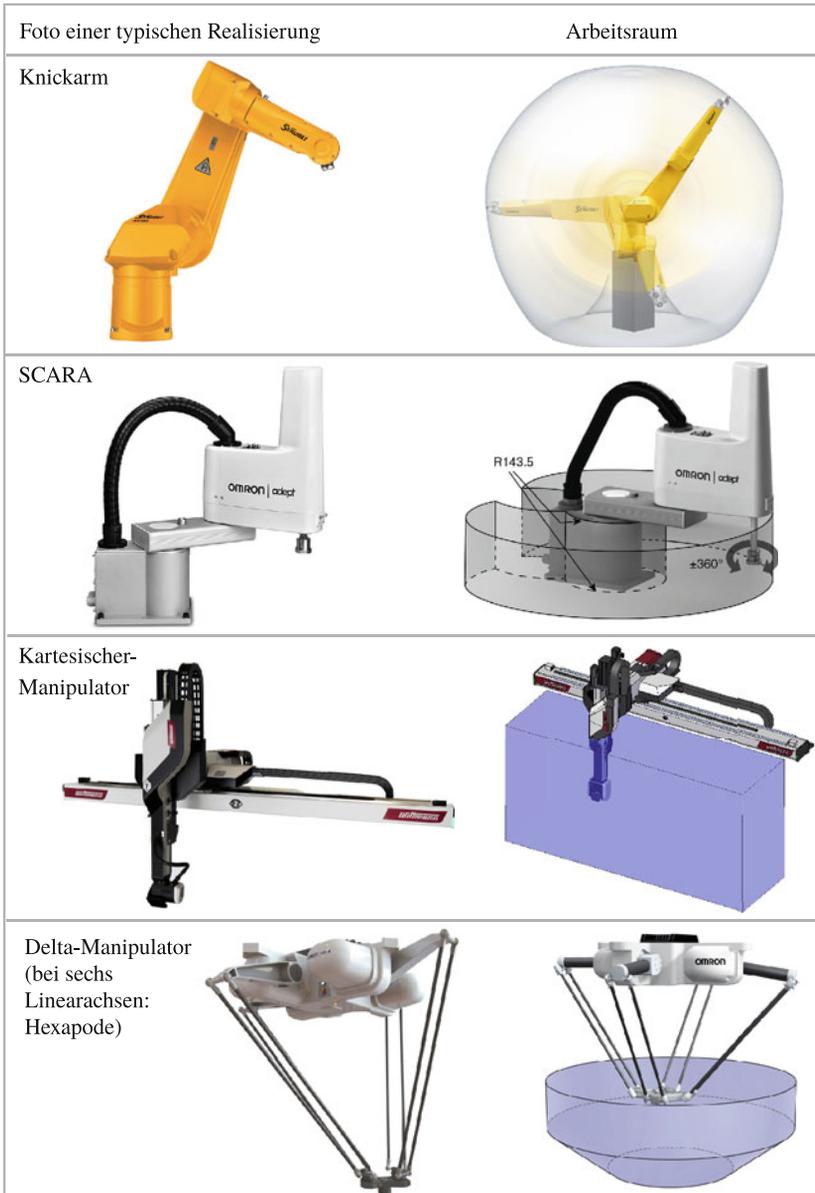
**Manipulator-Arten** Manipulatoren unterscheiden sich hauptsächlich nach Art und Anordnung der durch mechanische Gelenke realisierten Bewegungsachsen. Gelenke können dabei entweder Drehungen beziehungsweise Rotationsbewegungen (*Drehgelenk, rotatorisches Gelenk, Drehachse*) oder geradlinige Bewegungen beziehungsweise Linearbewegungen (*Linearachse, translatorisches / prismatisches Gelenk, Teleskopachse*) realisieren. Die in der Robotik üblicherweise angewendete Konvention nach Denavit-Hartenberg (kurz: DH-Konvention) sieht pro Gelenk nur eine Bewegungsachse vor. Die Zahl der Gelenke bestimmt dann die Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade (kurz: Freiheitsgrade), die man abkürzend mit DoF<sup>14</sup> bezeichnet. Die Spezifikation von Robotertypen erfolgt daher oft durch Angabe der Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade (DoF) sowie der geometrischen Anordnung der Bewegungsachsen. So bezeichnet man beispielsweise den Knickarm-Manipulator aus Abb. 1.7 (oberste Zeile) als anthropomorphen 6-DoF Manipulator oder den Manipulator aus Abb. 2.24 als planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulator.

Man unterscheidet grundsätzlich die drei in Abb. 1.7 dargestellten Manipulator-Arten:

<sup>14</sup> Kurzform aus dem Englischen für *Degrees of Freedom*.



**Abb. 1.6** *Oben:* Zeitliche Entwicklung des weltweiten Bestands an derzeit sich im Betrieb befindlichen Industrierobotern, [8, S. 537]. *Unten:* Zeitliche Entwicklung des Umsatzes von Industrierobotern, getrennt nach den Kontinenten Europa, Amerika sowie Asien zusammen mit Australien, [8, S.51]. Mit freundlicher Genehmigung des IFR (International Federation of Robotics)



**Abb. 1.7** Tabellarische Übersicht unterschiedlicher Arten von Industrierobotern: 1. Zeile Knickarm-Manipulator von Staubli, Typ RX160, drei Rotationsachsen, mit freundlicher Genehmigung der Staubli Tec-Systems GmbH Robotics; 2. Zeile SCARA-Manipulator von Omron Electronics, Typ COBRA 450, drei Rotationsachsen, eine Linearachse, mit freundlicher Genehmigung der Omron Electronics GmbH; 3. Zeile Kartesischer Manipulator von Wittmann, Typ: WX143, drei Linearachsen, mit bis zu drei Rotationsachsen, mit freundlicher Genehmigung der Wittmann Kunststoffgeräte GmbH Wien; 4. Zeile Delta-Manipulator von Omron Electronics, Typ: Quattro 650H/HS, vier Rotationsachsen, mit freundlicher Genehmigung der Omron Electronics GmbH

- *Knickarm-Manipulator* (Synonym: *Gelenkarm-Manipulator*; Englisch: *articulated manipulator*), siehe 1. Zeile aus Abb. 1.7:

Ein Knickarm-Manipulator besitzt in der Regel sechs Drehachsen, die hintereinander angeordnet sind (sogenannte *Seriell-Kinematik*). Der Arbeitsraum ist typischerweise kugelförmig mit Aussparungen, die Gelenkanordnung anthropomorph wie bei PUMA aus Abb. 1.4. Die ersten<sup>15</sup> drei Gelenkachsen dienen in erster Näherung der Positionierung (in allen drei kartesischen Koordinaten) des Endeffektors. Mit den hinteren drei Gelenkachsen wird dann, ebenfalls in erster Näherung, die Orientierung des Endeffektors in allen drei Achsen eingestellt. Die kartesische Position ist im Allgemeinen wichtiger als die Orientierung. Daher spricht man bei den ersten drei Achsen auch von *Hauptachsen*, bei den hinteren drei Achsen von *Nebenachsen*, [19].

Linearachsen sind gegenüber Drehachsen zur Positionierung eines kartesischen Punkts im Raum deutlich intuitiver und damit einfacher in der Steuerung. Trotzdem werden aus konstruktiven Gründen Drehachsen in den meisten Fällen vorgezogen: Sie sind einfacher abzudichten und zu lagern.

Sonderfälle:

- Es liegen nur fünf Bewegungsachsen vor. In diesem Fall bestimmt man nur zwei Orientierungswinkel (typisch: Rollen und Neigen) des Endeffektors.
- Es liegen sieben Bewegungsachsen vor. Eine Bewegungsachse ist somit redundant, das heißt für eine gegebene Position und Orientierung des Endeffektors ist die Position einer Bewegungsachse frei wählbar. Man bezeichnet diese Bewegungsachse auch als *Redundanzachse*. Sie ermöglicht eine sogenannte *Nullraumbewegung*, eine Art „innere Bewegung“ des Manipulators bei feststehendem Endeffektor, siehe Abb. 1.13. Eine Redundanzachse ermöglicht es beispielsweise, den Manipulator in Positionen zu bringen, in denen er eine besonders große Beweglichkeit aufweist, oder Kollisionen mit der Umgebung vermeidet. Falls es sich bei der Redundanzachse um eine Linearachse handelt, so wird diese oft dazu verwendet, die Reichweite des Endeffektors beziehungsweise den Arbeitsraum zu vergrößern.

Besitzt der Knickarm-Manipulator sechs Achsen, so kann der Endeffektor im zugehörigen Arbeitsraum in allen sechs Bewegungs-Freiheitsgraden (je drei Freiheitsgrade für die Orientierung und kartesische Position) bestimmt werden. Damit zeichnet er sich durch eine hohe Beweglichkeit aus, woher auch das englische Attribut „articulated“, zu Deutsch „frei beweglich“, „gelenkig“, stammt. Damit ist der Knickarm-Manipulator prädestiniert für eine Vielzahl unterschiedlicher Aufgaben, wie zum Beispiel Laserschweißen, Punktschweißen, Lackieren, Kleben, Montieren, Entgraten, Fräsen, Bohren, bin-picking (Entnehmen unsortierter Gegenstände aus einer Kiste, so dass für

---

<sup>15</sup> Die Reihenfolge der Gelenkachsen wird immer von der Achse aus begonnen, die am nächsten an der starren Verbindung mit dem Untergrund beziehungsweise der Umgebung liegt. Der Endeffektor ist somit starr mit der letzten Gelenkachse verbunden.

jeden Gegenstand neben der Position auch die Orientierung separat einstellbar sein muss).

Nachteile des Knickarm-Manipulators sind:

- Relativ hoher Energieverbrauch, da Gravitationseinflüsse vorwiegend von den Antrieben kompensiert werden müssen. Man kann dies durch Festhaltebremsen in den Gelenkachsen sowie durch Gegengewichte etwas reduzieren.
  - Relativ geringe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, da diese die Armsegmente zum Schwingen anregen. Außerdem muss ein Großteil der Antriebsmomente beziehungsweise -kräfte zur Kompensation der Gravitationseinflüsse aufgewendet werden.
  - Relativ geringe Steifigkeit und damit auch geringe Wiederholgenauigkeit.
  - Relativ hohe Anschaffungs- und Inbetriebnahmekosten.
- *SCARA-Manipulator* (Synonyme: *Schwenkarm-Manipulator*, *horizontaler Knickarm-Manipulator*, *artikulierter Ellenbogen-Manipulator*; SCARA aus dem Englischen **S**elective **C**ompliance **A**ssembly **R**obot **A**rm), siehe 2. Zeile aus Abb. 1.7:

Bei einem SCARA bestehen in der Regel die ersten drei Bewegungsachsen aus vertikal, hintereinander angeordneten, parallelen Drehachsen (Seriell-Kinematik). In manchen Fällen sind die Bewegungsachsen durch parallele Armsegmente verbunden (Parallel-Kinematik), um die Steifigkeit und Nutzlast zu erhöhen.

An diese parallelen Achsen schließt sich als vierte Bewegungsachse eine Linearachse in vertikaler Richtung an. Sie wird oft gemeinsam mit der letzten Drehachse mit Hilfe einer Kugelrollspindel realisiert.

Der Arbeitsraum beschränkt sich auf ein zylinderförmiges Volumen mit nierenförmiger Deckfläche und mittiger Aussparung für den Sockel.

Mit den ersten drei Drehachsen wird der Endeffektor innerhalb des Arbeitsraums auf einen Punkt positioniert (nur in zwei kartesischen Koordinaten) und orientiert (nur im Orientierungswinkel um die vertikale Achse). Mittels Linearachse wird dann der Endeffektor auf die gewünschte Höhe gefahren, um dort zum Beispiel einen Körper aufzunehmen oder abzulegen.

Durch die vertikale Anordnung der ersten drei Bewegungsachsen werden Gravitationskräfte von den Lagerungen aufgenommen. So steht die Antriebsleistung vollständig für die Bewegung zur Verfügung. Damit zeichnen sich SCARA-Manipulatoren durch hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aus. Da die Herstellkosten eines Manipulators maßgeblich von der Zahl der Bewegungsachsen bestimmt werden, sind SCARA-Manipulatoren relativ preisgünstig. Damit sind sie gut geeignet für einfache Pick & Place-Aufgaben (zum Beispiel Palettieren, Zuführung von Teilen von einem Fließband, Leiterplattenbestückung) sowie Fügen (zum Beispiel Verstiften) oder Pressen (zum Beispiel Schließen eines Klick-Verschlusses) in vertikaler Richtung.

- *Kartesischer-Manipulator* (Synonyme: *Portalroboter*, *Linearroboter*; Englisch: *gantry type robot*, *cartesian robot*), siehe 3. Zeile aus Abb. 1.7: Ein kartesischer Manipulator besitzt typischerweise drei Linearachsen, die hintereinander angeordnet sind und wie die Achsen eines Koordinatensystems gegenseitig aufeinander senkrecht stehen. Daher kann jede Bewegungsachse, unabhängig von den anderen Bewegungsachsen, eine kartesische Koordinate des Endeffektors bestimmen. In manchen Fällen ist noch eine vierte Bewegungsachse als Drehgelenk realisiert, um die Orientierung des Endeffektors einstellen zu können.

Kartesische Manipulatoren weisen vergleichsweise hohe Steifigkeiten auf, so dass damit große Wiederholgenauigkeiten auch bei schweren Nutzlasten und hohen Geschwindigkeiten realisierbar sind. Typische Einsatzgebiete sind: CNC-Maschine, 3D-Drucker, xy-Plotter oder Pick & Place-Aufgaben wie zum Beispiel Palettieren von IC's. Oft werden auch kartesische Manipulatoren zur Vergrößerung des Arbeitsraums von Knickarm-Manipulatoren eingesetzt. Weitere Vorteile eines kartesischen Manipulators sind:

- Aufgrund eines typischerweise modularen Aufbaus der Bewegungsachsen ist deren Anordnung mit vergleichsweise geringem Aufwand umkonfigurierbar.
  - Die einzelnen Koordinaten der (kartesischen) Endeffektorposition werden stets von einer einzigen Linearachse bestimmt. Dies führt zu einer einfachen, intuitiven Steuerung.
- *Delta-Manipulator* (bei drei Linearachsen: *Tripod*, bei sechs Linearachsen: *Hexapode*), siehe 4. Zeile aus Abb. 1.7: Delta-Manipulatoren bestehen aus drei bis sechs Linearachsen. Diese sind über Kugelenke mit einer Platte verbunden, auf der der Endeffektor befestigt wird. Damit teilen sich die Kräfte und Momente, die der Endeffektor mit der Umgebung ausübt, parallel auf die vorhandenen Linearachsen auf. Daher bezeichnet man diese Anordnung der Gelenke auch als *Parallel-Kinematik*. Dies führt zu einer signifikant höheren Steifigkeit des Manipulators, verglichen mit Manipulatoren mit hintereinander geschalteten Gelenken (Seriell-Kinematik). Ein weiterer Vorteil ergibt sich daraus, dass die Antriebe außerhalb der bewegten Armsegmente verbaut sind und damit nur wenig Masse bewegt werden muss. Dies ermöglicht einen sparsamen Betrieb und vergleichsweise hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Nachteile von Delta-Manipulatoren:

- Geringer Arbeitsraum, insbesondere können nur kleine Bereiche der Orientierung eingestellt werden. In manchen Fällen ist auf der Verbindungsplatte ein Drehgelenk vorhanden, so dass in der zugehörigen Achse (normalerweise zur Platte senkrecht stehend) ein größerer Orientierungsbereich realisiert wird.
- Sehr aufwendige Steuerung (bei einem Hexapoden ist die Kinematik und inverse Kinematik nicht analytisch lösbar; es sind aufwendige Algorithmen zur numerischen Berechnung notwendig).
- Geringe Flexibilität im Einsatz.

Anwendungen finden sich überwiegend im Bereich schneller Pick & Place-Aufgaben, wie zum Beispiel bei der Leiterplattenbestückung oder IC-Palettierung. Aufgrund der aufwendigen Steuerung und der dafür notwendigen hohen Rechenleistung werden Delta-Roboter erst seit einigen Jahren in größerem Stil industriell eingesetzt.

**Mechatronischer Charakter eines Manipulators** Die Entwicklung von Manipulatoren erfordert ein interdisziplinäres Team, das typischerweise mit Vertretern folgender Ingenieurs-Disziplinen besetzt ist:

- Mechanische Konstruktion (Beispiele: Konstruktion von Gelenkverbindern und Gelenken, Arbeitsraum-Simulationen zur Bestimmung der notwendigen Kinematik, Auslegung von Getriebesystemen, FEM-Simulationen zur Thermik und Festigkeit, Maßnahmen zur Realisierung von Leichtbau)
- Elektro-Konstruktion und Elektronik (Beispiele: Leitungsführung/Kabelbäume, Steckverbinder, Leistungselektronik, Messwerterfassung und -filterung, BUS-Systeme, Bereitstellung lokal verteilter Rechenleistung mit Hilfe von Mikroprozessoren, EMV)
- Antriebstechnik (Beispiele: Auswahl von Motor-Getriebe-Sätzen, Auslegung und Simulation von Antriebssträngen, Berechnung und Simulation der elektrischen Zwischenkreisgrößen)
- Regelungstechnik und Sensorik (Beispiele: Simulation des dynamischen Verhaltens, Reglerauslegungen, Messwertfilterung durch Kalmanfilter)
- Informatik (Beispiele: Echtzeitfähige und numerisch stabile Implementierung von Steuerungs- und Regelungsalgorithmen, Online-Diagnose- und -Wartungssysteme, Mensch-System-Schnittstelle)

Arbeitspakete sind von häufigen Iterationsschritten zwischen diesen Fachbereichen gekennzeichnet. Lösungen sind damit stark geprägt von technischen Kompromissen, die die Fachbereiche untereinander aushandeln müssen. Nur so kann eine optimale Lösung erzielt werden. Dies stellt das Wesen *mechatronischer Systeme* dar, zu denen die Robotik als einer der wesentlichen Vertreter gezählt wird. Vorabkenntnisse über diese grundlegenden Zusammenhänge der Mechatronik erleichtern die Akzeptanz der oft als schmerzhaft empfundenen technischen Kompromisse. Dies trägt maßgeblich zur reibungslosen und effektiven Zusammenarbeit in der Entwicklung von Manipulatoren bei.

Neben den aufgezählten technischen Fachbereichen sind auch enge Kontakte zu den Bereichen Controlling, Einkauf, Qualitätsmanagement und Fertigung unabdingbar.

**Beispiel 1.1.** für einen iterativen Entwicklungsprozess bei Manipulatoren:

Basierend auf einem Entwurf der mechanischen Konstruktion des Manipulators ergeben sich bestimmte maximale Drehmomente für die Motoren der Gelenkantriebe. Die Antriebstechnik strebt möglichst große und schwere Motoren für die Gelenkantriebe an, um die Hitzeentwicklung bei diesen maximalen Drehmomenten zu reduzieren (siehe Abschn. 7.5 für eine Erläuterung dieses Zusammenhangs).

Je schwerer die Motoren der Gelenkantriebe, desto schwerer fallen aber auch die von der mechanischen Konstruktion vorzusehenden Verbindungselemente zwischen den Gelenkantrieben aus, um zum Beispiel notwendige Steifigkeiten zu realisieren. Somit erhöhen sich die maximal notwendigen Drehmomente gegenüber der ursprünglichen Forderung, so dass die Antriebstechnik erneut eine Motorenauslegung durchführen muss. Dies stellt den nächsten Iterationsschritt dar. <

Siehe Aufgabe 1.5 für weitere Beispiele.

---

## 1.4 Lesekompass und interessante Aufgabenstellungen

In diesem Abschnitt wird die inhaltliche Struktur des vorliegenden, zweibändigen Werks vorgestellt. Dies soll dem Leser einen Anhaltspunkt dafür liefern, in welcher Reihenfolge die Kapitel gelesen werden sollten und welche mathematischen Kenntnisse dabei jeweils benötigt werden.

Außerdem werden plakativ für jedes Kapitel die grundlegende Aufgabenstellung sowie daraus erwachsende interessante Probleme und Sachverhalte herausgestellt.

### 1.4.1 Lesekompass

Das vorliegende Buch gliedert sich der Reihe nach in folgende sieben Fachkapitel: Kinematik, inverse Kinematik, differenzielle Kinematik, Dynamik, Pfad- und Bahnplanung, Antriebstechnik und Regelung.

Dabei bauen die ersten vier Fachkapitel (also von *Kinematik* bis *Dynamik*) aufeinander auf und sollten der Reihe nach studiert werden. Alle Fachkapitel setzen die allgemein üblichen Grundkenntnissen der Mathematik (Schulwissen auf dem Stand der Hochschulreife) voraus. Für die ersten vier Kapitel werden außerdem Grundlagen der linearen Algebra benötigt. Hier wird auf klassische Lehrbücher der Ingenieur-Mathematik verwiesen, wie zum Beispiel [10] oder [7]. In den Aufgaben zum vorliegenden Kapitel finden sich außerdem einige Kontrollaufgaben zur linearen Algebra.

Das Kapitel *Pfad- und Bahnplanung* benötigt nur einige Grundkenntnisse aus den Bereichen Kinematik und inverse Kinematik, so dass es weitgehend unabhängig von den anderen Kapiteln bearbeitet werden kann. Dabei sind mathematische Grundkenntnisse aus dem Bereich der Graphentheorie wünschenswert.

Das Kapitel *Antriebstechnik* kann weitgehend unabhängig von den anderen Kapiteln bearbeitet werden. In diesem Kapitel liegt der Schwerpunkt auf der Auslegung der Antriebssysteme der Robotergelenke. Die durchaus komplexe Theorie der Antriebstechnik

wird dabei nur insoweit behandelt, als es für ein grobes Verständnis notwendig ist. Grundlagenwissen der Antriebstechnik ist also nicht erforderlich, erhöht jedoch das Verständnis der dargestellten Methoden. Für dieses Kapitel werden mathematische Kenntnisse aus dem Bereich der Fourierreihen-Darstellung sowie der komplexen Zahlen benötigt. Insbesondere ist dabei die Anwendung komplexer Zahlen zur Beschreibung harmonischer Schwingungen mittels komplexer Zeiger notwendig, siehe zum Beispiel [11] oder [7].

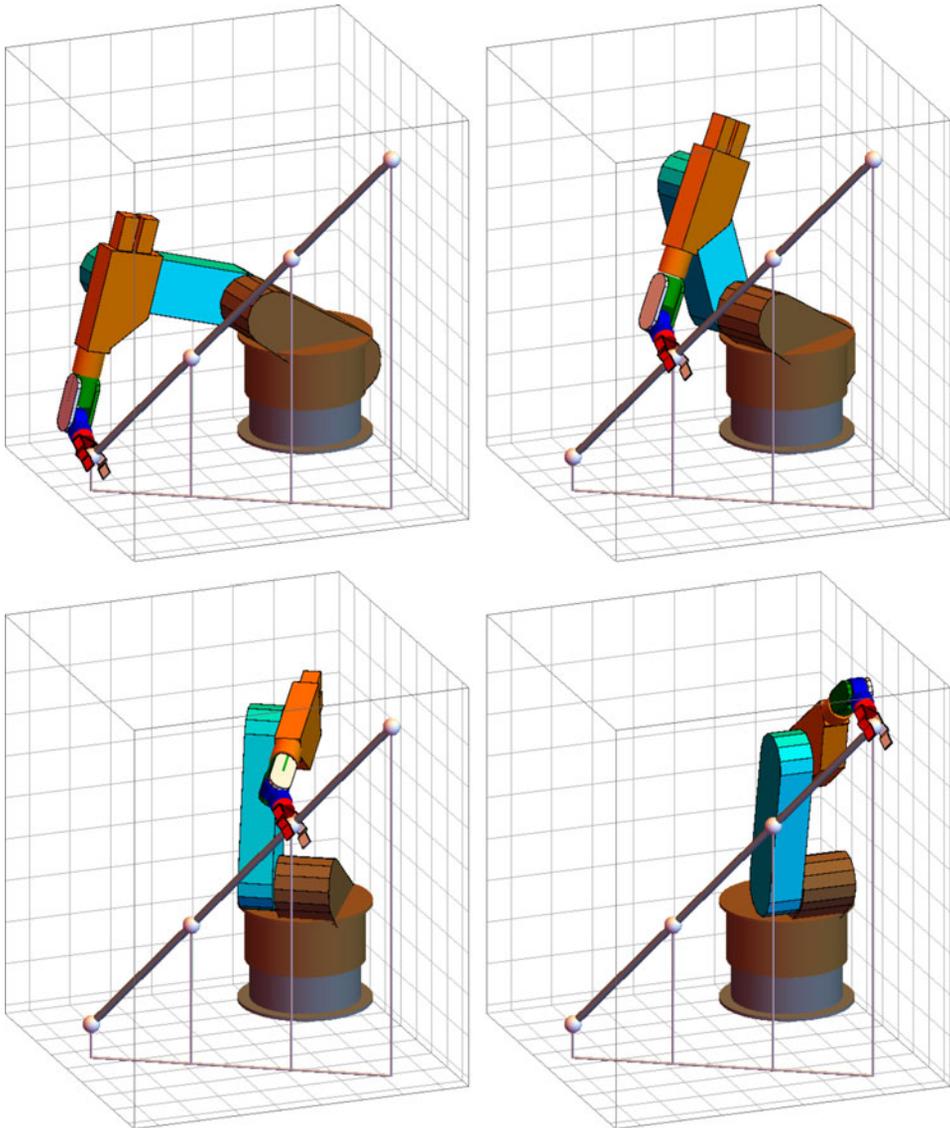
Das letzte Kapitel *Regelung* benötigt einige wenige Resultate aus dem Kapitel *Dynamik*; es kann damit ebenfalls weitgehend unabhängig bearbeitet werden. Die dargestellte Theorie erfolgt im Zeitbereich. Daher werden mathematische Grundkenntnisse gewöhnlicher Differenzialgleichungen und deren Systeme benötigt. Die verwendete Stabilitätstheorie nach Ljapunov sowie deren Erweiterung werden durchgängig im Text erläutert, so dass hierzu keine gesonderten Kenntnisse benötigt werden.

## 1.4.2 Kinematik

**Direkte und inverse Kinematik** Eine Grundaufgabe jedes Manipulators besteht darin, den Endeffektor in eine vorgegebene beziehungsweise gewünschte Position und Orientierung zu fahren. In Abhängigkeit der Anordnung der Gelenke sowie der Ausdehnung und Länge der Gelenkverbinder beziehungsweise Armsegmente ist dabei nur ein beschränkter Bereich für den Endeffektor erreichbar, der sogenannte *Arbeitsraum*. Abb. 1.8 zeigt beispielsweise einen 6-achsigen Manipulator, der mit einem Greifer als Endeffektor auf einer Geraden im Raum vier unterschiedliche Positionen anfahren soll. Dabei soll die Orientierung des Greifers konstant bleiben. Abb. 1.9 zeigt den Fall einer konstanten Position mit vier unterschiedlichen Orientierungen.

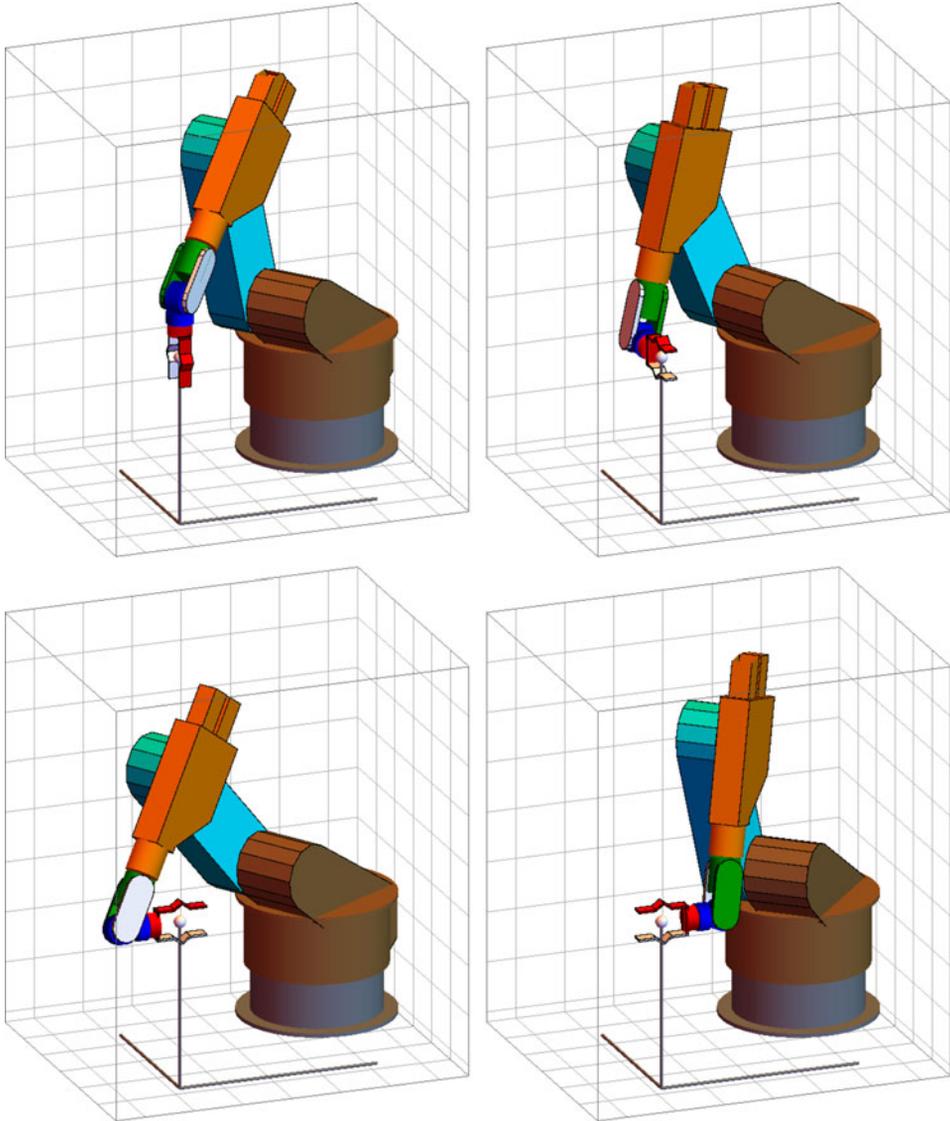
Man kann die Gelenkwinkel für solche Aufgaben einfach ermitteln, in dem man den Greifer von Hand in die gewünschte Position und Orientierung bringt und dann die sich einstellenden Gelenkwinkel ausliest. Hierfür werden typischerweise Gewichts- und Massenträgheitskräfte von einer sogenannten *Nullmomentenregelung* kompensiert, so dass der Mensch mit wenig Kraft und Moment Positionsänderungen des Manipulators durchführen kann. Dieses Vorgehen nennt man *Teachen*. In vielen Applikationen ist ein solches Teachen jedoch nicht praktikabel. Es besteht vielmehr die Notwendigkeit der automatischen Berechnung der Gelenkwinkel für eine gewünschte Position und Orientierung des Endeffektors. Dies bezeichnet man als *inverse Kinematik*.

Hierfür benötigt man zunächst die Lösung der Umkehraufgabe: Für gegebene Gelenkwinkel wird die korrespondierende Position und Orientierung des Endeffektors gesucht. Dies bezeichnet man als *direkte Kinematik*. Sie stellt für viele Bereiche der Robotik die notwendigen Grundlagen bereit, so dass sich das erste Fachkapitel eingehend damit beschäftigt. Im folgenden Kap. 3 wird dann ein Lösungsverfahren der inversen Kinematik hergeleitet. Das Ergebnis stellt einen Algorithmus dar, der die Gelenkwinkel für eine gegebene Position und Orientierung des Endeffektors liefert. Falls eine Lösung für die inverse Kinematik existiert, so ist diese in der Regel nicht eindeutig. Dies bedeutet, dass mehrere Sets an



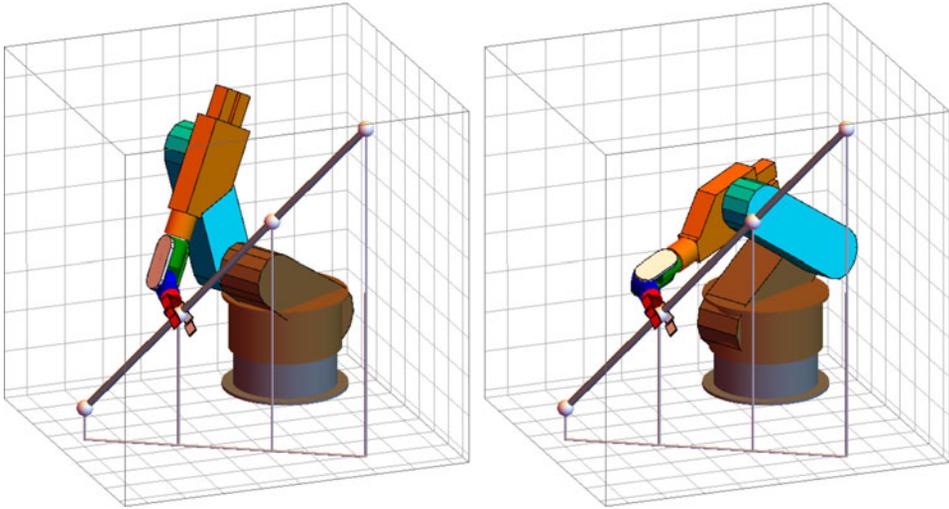
**Abb. 1.8** Linearbahn für einen 6-achsigen Manipulator (siehe auch Beispiel 2.18 und Abschn. 3.1): Die Gelenke sind so gesteuert, dass der Endeffektor mit konstanter Orientierung entlang einer vorgegebenen Geraden im Raum fährt

Gelenkwinkeln zu ein und derselben Position und Orientierung des Endeffektors führen können. Man bezeichnet die unterschiedlichen Sets im Kontext der Robotik als *Konfigurationen*. Abb. 1.10 zeigt beispielhaft den 6-achsigen Manipulator in zwei unterschiedlichen Konfigurationen. Sie unterscheiden sich durch eine um  $180^\circ$  gedrehte Turmposition (Konfiguration *Turm links* und *Turm rechts*). Außerdem befindet sich der Ellbogen im linken



**Abb. 1.9** Orientierungen für einen 6-achsigen Manipulator (siehe auch Beispiel 2.18 und Abschn. 3.1): Die Gelenke sind so gesteuert, dass der Endeffektor in konstanter Position unterschiedliche Orientierungen einnimmt

Teilbild in einer nach oben geklappten Position (Konfiguration *Ellenbogen oben*); im linken Teilbild ist der Ellenbogen hingegen nach unten geklappt (Konfiguration *Ellenbogen unten*). Insgesamt lassen sich für den dargestellten Manipulator bis zu acht unterschiedliche Konfigurationen finden.



**Abb. 1.10** Beispiel für Mehrdeutigkeit der inversen Kinematik: Zwei unterschiedliche Sets an Gelenkwinkeln führen zu ein und derselben Position und Orientierung des Endeffektors

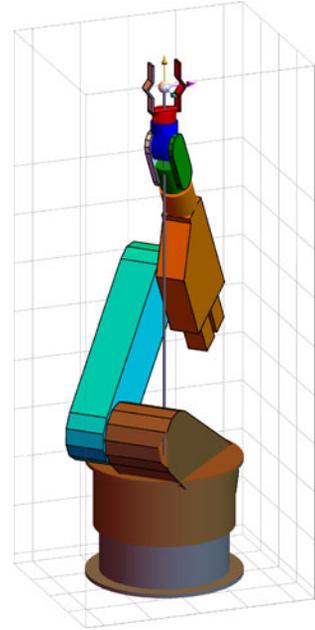
**Singularitäten** In bestimmten Positionen treten nicht nur einzelne<sup>16</sup>, sondern unendlich viele Lösungen der inversen Kinematik auf. Einen solchen Fall zeigt Abb. 1.11: Der Endeffektor liegt in diesem Fall genau auf der Verlängerung der ersten Drehachse (*Turm-Drehen*) sowie der letzten Drehachse (*Greifer-Drehen*). Die vorgegebene Orientierung des Endeffektors bestimmt daher lediglich die Summe oder Differenz der beiden Gelenkwinkel, so dass unendlich viele Lösungen auftreten. Dies bezeichnet man als *Singularität*.

Das Hauptproblem von Singularitäten besteht darin, dass in deren Nähe sehr hohe Geschwindigkeiten der Gelenkwinkel auftreten können: So verläuft der Pfad des Endeffektors in Abb. 1.12 nahe der singulären Position, bei der die erste und letzte Gelenkachse im Raum aufeinander fallen. Je näher der Endeffektor der Singularität kommt, desto stärker verändern sich die Gelenkwinkel. Zwischen dritter und vierter Position muss so das erste Gelenk um fast  $180^\circ$  drehen. Fordert man zusätzlich eine konstante Fahrgeschwindigkeit des Endeffektors, so ergeben sich hohe Geschwindigkeiten der Gelenke. Diese tendieren (betragsmäßig) gegen unendlich, je näher der Endeffektorpfad der Singularität kommt. Da die Antriebssysteme in den Gelenken aber nur eine bestimmte Maximalgeschwindigkeit zulassen, können massive Steuerungsprobleme des Manipulators auftreten.

**Geschwindigkeitskinematik** Zur Steuerung der Geschwindigkeit des Endeffektors wird in Kap. 4 mit der sogenannten *Geschwindigkeitskinematik* der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten der Gelenke und den Geschwindigkeiten des Endeffektors herge-

<sup>16</sup> In der Mathematik verwendet man hierfür auch den Begriff *abzählbar viele*.

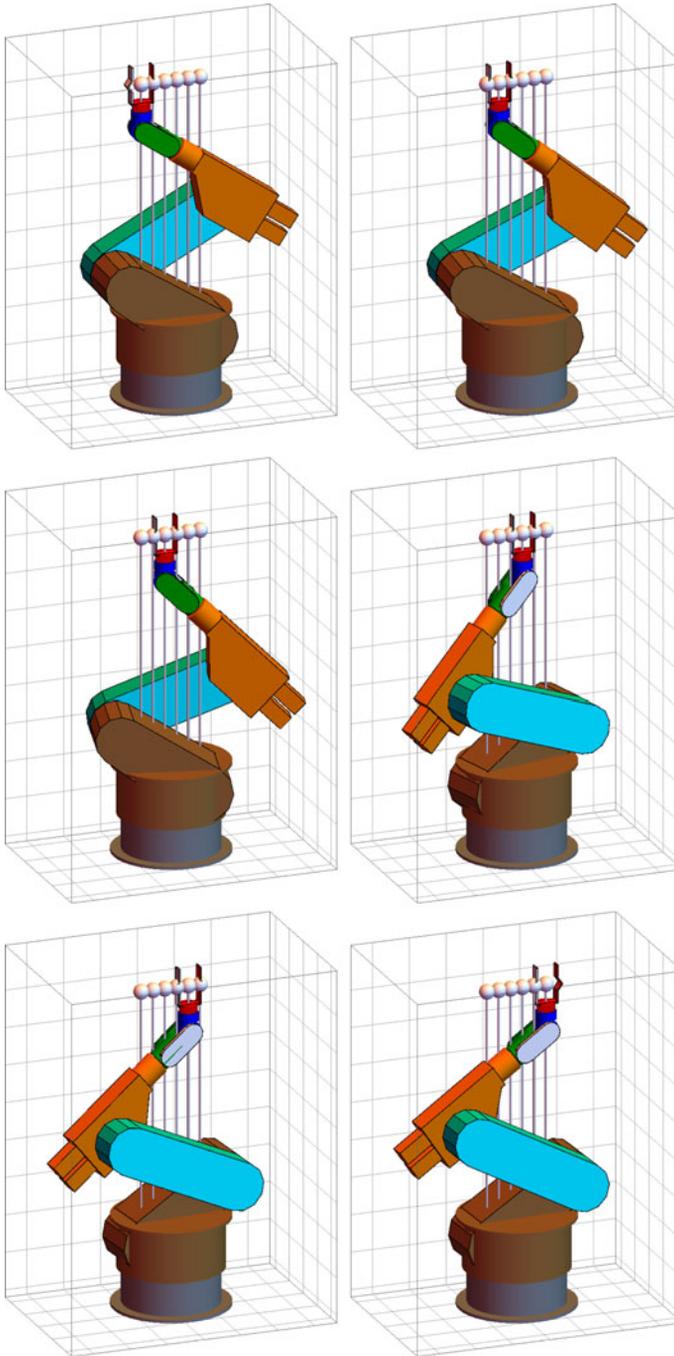
**Abb. 1.11** Singuläre Position: Die geforderte Position und Orientierung des Endeffektors kann durch unendlich viele Sets an Gelenkwinkeln realisiert werden



leitet. Dieser Zusammenhang hängt stark von der Position der Gelenke ab. Betrachtet man einen momentanen Zeitpunkt, das heißt nimmt man eine konstante Positionen der Gelenke an, so ist dieser Zusammenhang linear; er wird durch die sogenannte *Jacobi-Matrix* ausgedrückt.

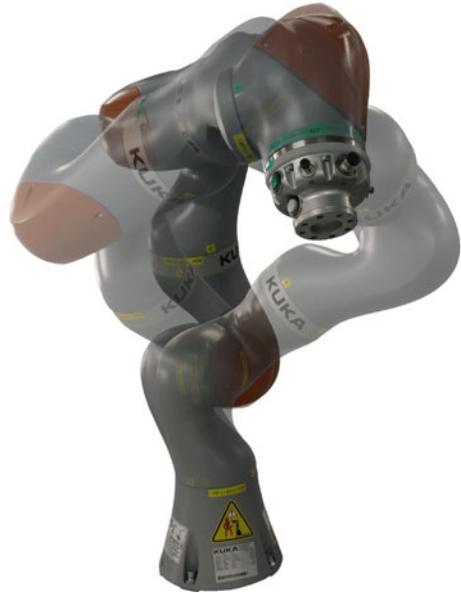
Jede Spalte dieser Matrix stellt einen Geschwindigkeitsvektor dar, in dessen Richtung sich der Endeffektor bewegt, wenn ein bestimmtes Gelenk bewegt wird. Durch Vektoraddition dieser Geschwindigkeitsvektoren ergeben sich die Anteile der Gesamtgeschwindigkeitsvektoren, bestehend aus Linear- und Drehgeschwindigkeit. Falls Spalten der Jacobi-Matrix linear abhängig sind und einen Rangabfall verursachen, reduziert sich die Dimension der Endeffektorgeschwindigkeiten, das heißt der Endeffektor kann nicht in jede beliebige Richtung bewegt werden. Auf einer Singularität erfährt die Jacobi-Matrix einen Rangabfall und wird damit *singulär*. Daraus motiviert sich die Bezeichnung *Singularität*. Im einfachsten Fall bedeutet der Rangabfall, dass zwei Spalten der Jacobi-Matrix kollinear<sup>17</sup> Vektoren enthalten. Die zwei zugehörigen Gelenke führen daher beim Endeffektor zur selben Bewegungsrichtung. Im Beispiel von Abb. 1.12 sind dies das erste und letzte Gelenk, welche jeweils eine Rotationsbewegung um die Hochachse bewirken. Hinsichtlich möglicher Bewegungsrichtungen „degradiert“ der Manipulator auf dieser Singularität also von ursprünglich sechs auf nur noch fünf „wirksame“ Gelenke.

<sup>17</sup> Kollineare Vektoren sind parallel oder antiparallel gerichtet.



**Abb. 1.12** Auswirkungen einer singulären Position: Eine konstante Fahrgeschwindigkeit des Endeffektors führt in der Nähe einer Singularität zu sehr hohen Geschwindigkeiten der Gelenke. Zwischen dritter und vierter Endeffektorposition dreht sich der Turm um ca.  $180^\circ$

**Abb. 1.13** Nullraumbewegungen bei LBR iiwa; aus [14]. Dargestellt sind drei unterschiedliche Sets an Gelenkwinkeln, die alle zu ein und derselben Position und Orientierung des Endeffektors führen



Singularitäten können zum Beispiel durch *redundante Gelenke* verhindert werden.

Die Lage eines Körpers im Raum (kurz: 3D) kann durch Position und Orientierung beziehungsweise Ausrichtung eines körperfesten Koordinatensystems definiert werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden für *Position und Orientierung* kurz der Begriff *Lage* verwendet. In der angelsächsischen Literatur verwendet man hierfür den Begriff *pose*. In Anlehnung daran wird teilweise auch in der deutschsprachigen Literatur von der *Pose* als *Lage* gesprochen.

Die Festlegung der Position erfordert drei Koordinaten, zum Beispiel kartesische Koordinaten. Auch die Orientierung erfordert drei Koordinaten. Hierfür zieht man oft drei Orientierungswinkel heran, wie zum Beispiel die sogenannten *Euler-Winkel*. Insgesamt sind damit sechs Koordinaten notwendig, um die Lage eines Körpers im Raum vollständig zu bestimmen. Es ist anschaulich klar, dass es die gleiche Anzahl an Gelenken (also sechs) benötigt, um die Lage des Endeffektorkörpers beliebig einstellen zu können. Liegt noch eine siebte Gelenkachse vor, so ergibt sich damit ein Freiheitsgrad bei der inversen Kinematik. Abb. 1.13 zeigt einen solchen Fall, bei dem der Manipulator sieben Gelenke aufweist. Bei konstanter Position und Orientierung des Endeffektors können die Gelenke unterschiedliche Positionen einnehmen. Diese Bewegung wurde bereits oben als *Nullraumbewegung* eingeführt.

**Statik** Eng verbunden mit der Geschwindigkeitskinematik ist das Problem der Statik. Dabei geht es um die Frage, welche Gelenkmomente und -kräfte notwendig sind, um den Manipulator „gegen“ eine äußere Belastung am Endeffektor im Stillstand zu halten. Mit dem aus der Mechanik bekannten Prinzip der *virtuellen Verrückung* kann man leicht

zeigen, dass der Zusammenhang zwischen Gelenkmomenten und -kräften und den am Endeffektor angreifenden externen Momenten und Kräften mit der transponierten Jacobi-Matrix aus der Geschwindigkeitskinematik gegeben ist. Dies stellt eine enorme Reduzierung des Berechnungsaufwands dar, verglichen mit der in der Statik üblichen Berechnungsmethode, bei der für alle Körper Kräfte- und Momentengleichgewichte aufgestellt werden müssen. Aufgrund der engen Verwandtschaft von Geschwindigkeits-Kinematik und Statik werden beide Themen unter der Überschrift *differenzielle Kinematik* in Kap. 4 zusammengefasst.

### 1.4.3 Dynamik

Im vorangegangenen Abschnitt wurden interessante Aspekte der Kinematik aufgezeigt. Dabei geht es um den Zusammenhang zwischen Gelenkwinkeln und Endeffektorposition und -orientierung sowie zwischen deren Geschwindigkeiten. Um tatsächlich Bewegungen zu realisieren, müssen die Gelenkantriebe Drehmomente beziehungsweise Kräfte aufbringen. Diese hängen zum einen von Gravitation, Reibung und Massenträgheit ab, zum anderen von der durch Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung vorgegebenen Gelenkbewegung. Die Lehre dieser Bewegung bezeichnet man im Unterschied zur *Kinematik* als *Kinetik*, im Kontext mechanisch bewegter Körper als *Mechanik*. Dies stellt einen Teilbereich der *Dynamik* dar.

Für jedes Gelenk ergibt sich der Zusammenhang zwischen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Gelenkbewegung und dem dafür notwendigen Gelenkmoment (bei einem Rotationsgelenk) beziehungsweise der dafür notwendigen Gelenkkraft (bei einem Translationsgelenk) durch eine gewöhnliche, nichtlineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Fasst man alle Gelenke zusammen, so führt dies zu einem verkoppelten Differenzialgleichungs-System, das in Kap. 5 als *Bewegungsgleichung* eingeführt wird.

**Lastfall-Simulationen** Zur Auslegung der Antriebssysteme in den Gelenken benötigt man die auftretenden *Lastfälle* in Form von Wertepaaren aus Geschwindigkeit und zugehörigem Drehmoment beziehungsweise Kraft. Auch deren Verlauf über der Zeit ist von großer Bedeutung, da sich hieraus zum Beispiel die thermische Belastung der Antriebe simulieren lässt. Aus diesem Grund wird die Bewegungsgleichung bereits zu einem frühen Zeitpunkt der Entwicklung eines Manipulators benötigt. Zur Simulation der Lastfälle werden Bewegungsabläufe definiert, die dann jeweils über die Bewegungsgleichung zu Lastfall-Verläufen führen.

**Rapid-Prototyping** Bewegungsgleichungen finden außerdem Anwendung zur Auslegung von Gelenk-Reglern sowie zur Simulation des Regelungsverhaltens. Beim sogenannten *Rapid-Prototyping* werden Systemkomponenten, die nicht oder nur mit hohem Unsicherheitsgrad modellierbar sind, in Hardware ausgeführt. Die anderen Sys-

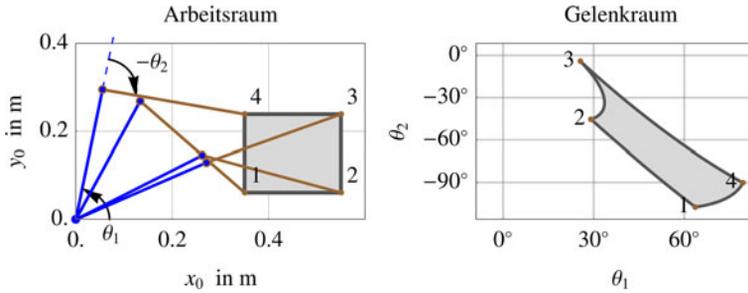
temkomponenten werden mit Hilfe der Bewegungsgleichung als Simulationsmodell berücksichtigt. Das resultierende hybride Gesamtsimulationssystem bezeichnet man auch als *Hardware-in-the-Loop-System*. Damit können wichtige Entwicklungstätigkeiten zeitgleich durchgeführt werden. Ein mechanisches Modell in Form der Bewegungsgleichung trägt so maßgeblich zur Reduzierung der Entwicklungsdauer sowie zur Effizienzsteigerung der Entwicklungstätigkeit bei.

#### 1.4.4 Pfad- und Bahnplanung

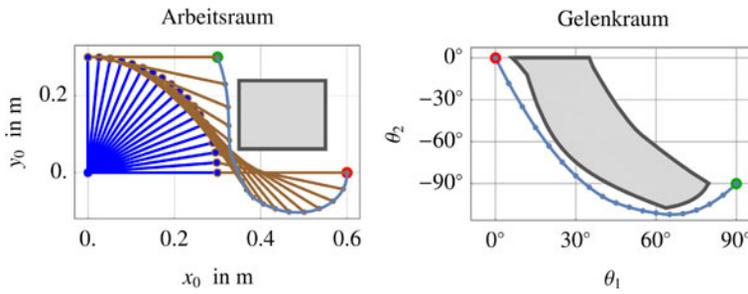
Damit der Endeffektor eines Manipulators von einer Start- in eine vorgegebene Zielposition und Zielorientierung fahren kann, benötigt man zunächst eine Beschreibung des *Pfads* (Synonym: Weg), auf dem sich der Endeffektor bewegen soll. Dabei muss der Pfad kollisionsfrei sein, das heißt kein Punkt der Außenhüllen der Manipulatorsegmente beziehungsweise Manipulatorkontur sowie des Endeffektors darf mit Hindernissen im Arbeitsraum kollidieren. Des Weiteren dürfen die Manipulatorsegmente nicht untereinander oder mit dem Endeffektor kollidieren (sogenannte *Eigenkollisionen*). Dies bezeichnet man als *Pfadplanung*.

In einem zweiten Schritt definiert man, wie schnell sich der Manipulator in den einzelnen Pfadpunkten bewegen soll. Dies bedeutet, dass man, vom Start- zum Zielpunkt gerichtet, aufeinanderfolgenden Pfadpunkten streng monoton steigende Zeitpunkte zuweist. Diese Abbildung von Zeit- zu Pfadpunkten bezeichnet man als *Bahn*.

**Pfadplanung** Die inverse Kinematik stellt eine Abbildung zwischen Arbeitsraum und Gelenkraum dar. Damit kann die Pfadplanung in einem der beiden Räume durchgeführt werden. Da die inverse Kinematik in der Regel hochgradig nichtlinear ist, verzerren sich die Konturen der Hindernisse bei einer Transformation zwischen den beiden Räumen. Ein einfaches Beispiel dafür zeigt Abb. 1.14. Dabei liegt ein Manipulator mit zwei parallelen Drehachsen zugrunde. Die Manipulatorsegmente sind vereinfacht als geradlinige Verbinder mit Länge 0.3 m dargestellt. Das erste Drehgelenk befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems. Der erste Gelenkwinkel  $\theta_1$  wird von der  $x_0$ -Achse aus gemessen, der zweite Gelenkwinkel  $\theta_2$  in negativer Zählrichtung von der Verlängerung des ersten Gelenkverbinders aus zum Endeffektor. Im linken Teilbild von Abb. 1.14 sind diese Winkel beispielhaft für Punkt 4 eingetragen. Der Endeffektor ist zur Übersichtlichkeit nur mit einem kleinen braunen Punkt am Ende des zweiten Gelenkverbinders dargestellt. Der Manipulator ist in vier unterschiedlichen Positionen eingetragen, wobei jede Position mit einer der Ecken des eingezeichneten Rechtecks korrespondiert. Im rechten Teilbild sind die Gelenkwinkel dargestellt, die sich ergeben, wenn der Endeffektor die Rechteckkontur abfährt. Daraus erkennt man, dass Geraden im Arbeitsraum mit gekrümmten Linien im Gelenkraum korrespondieren. Dabei wurde nur Konfiguration „Ellenbogen oben“ berücksichtigt, so dass für den zweiten Gelenkwinkel die zusätzliche Einschränkung  $0 \geq \theta_2 \geq -180^\circ$  gilt.



**Abb. 1.14** Rechteckiger Bereich im Arbeitsraum (*links*) und korrespondierender Bereich im Gelenkraum (*rechts*) bezogen auf den Endeffektor und für Konfiguration „Ellenbogen oben“. Die inverse Kinematik führt zu einer stark deformierten Hinderniskontur im Gelenkraum, siehe auch Abb. 6.2



**Abb. 1.15** Kollisionsfreier Pfad: Das rechteckige Hindernis Bereich im Arbeitsraum (*links*) ergibt im Gelenkraum (*rechts*) den *grau schattierten verbotenen Bereich*. Außerhalb dieses Bereichs treten keine Kollisionen der Berandungspunkte des Manipulators mit dem Hindernis auf

Plant man einen Pfad für den Endeffektor im Arbeitsraum, so können damit nur Kollisionen des Endeffektors vermieden werden. Es müssen natürlich auch Kollisionen aller anderen Punkte der Manipulatorkontur ausgeschlossen werden. Eine Möglichkeit dafür besteht darin, die Kontur mit einem feinmaschigen Punktenetz zu überziehen. Analog zum Vorgehen beim Endeffektorpunkt aus Abb. 1.14 wird dann für jeden dieser Punkte der verbotene Bereich im Gelenkraum ermittelt. Die Vereinigungsmenge aller dieser verbotenen Bereiche ergibt die umrandete graue Fläche aus Abb. 1.15 (rechts). Dabei wurde wieder nur Konfiguration „Ellenbogen oben“ berücksichtigt.

Für einen gegebenen Start- und Zielpunkt (rot und grün markiert) außerhalb des verbotenen Bereichs kann dann im Gelenkraum ein kollisionsfreier Pfad ermittelt werden. Für einige Punkte auf diesem Pfad zeigt Abb. 1.15 (links) die zugehörigen Manipulator-Stellungen. Daraus erkennt man, dass der Pfad tatsächlich auch im Arbeitsraum kollisionsfrei verläuft.

Zur Planung des Pfads im Gelenkraum existieren viele Methoden: So überzieht man bei der *zufallsorientierten Wegenetz-Methode* (siehe Abschn. 6.2.2) den Arbeitsraum in

iterativen Schritten so lange mit zufällig verteilten Punkten, bis man durch die Verbindung der Punkte zu einem kollisionsfreien Pfad zwischen Start- und Zielpunkt gelangt. Dabei kommen mathematische Methoden der Graphentheorie zur Anwendung.

Die Berechnung gesperrter Bereiche im Gelenkraum ist jedoch äußerst aufwendig: Sowohl Hindernis-, als auch Manipulatorkonturen müssen mit einem feinmaschigen Punktnetz überzogen werden. Für jeden Punkt der Manipulatorkontur müssen dann die Gelenkpositionen für eine mögliche Kollision mit jedem Punkt der Hinderniskonturen berechnet werden.

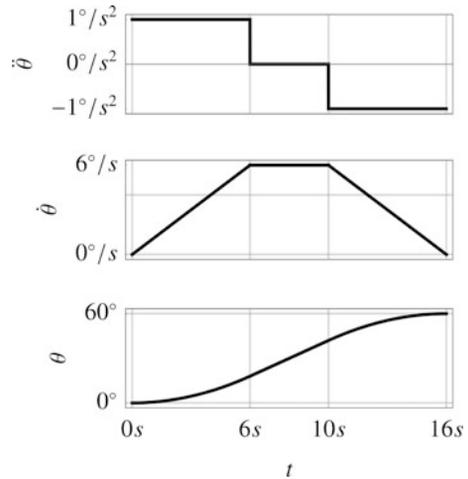
Alternativ kann man einen kollisionsfreien Pfad auch im Arbeitsraum planen. Eine interessante Methode orientiert sich dabei am physikalischen Prinzip der Abstoßung oder Anziehung geladener Teilchen im elektrischen Feld. Bei dieser sogenannten *Potentialfeld-Methode* (siehe Abschn. 6.2.1) weist man dem Start- und Zielpunkt unterschiedlich gepolte, virtuelle elektrische Ladungen zu. Damit ergibt sich ein elektrisches Feldlinienbild. Darin enthalten ist eine Feldlinie vom Start- zum Zielpunkt, die als Pfad dienen kann. Hindernisse werden mit virtuellen Ladungen derselben Polarität wie die Ladung im Startpunkt überzogen. Da sich elektrische Feldlinien nur in Gleichgewichtspunkten schneiden, kann damit die Feldlinie von Start- zum Zielpunkt nicht mit Hindernissen kollidieren. Um Kollisionen mit Punkten der Manipulatorkontur zu vermeiden, können ebenfalls virtuelle Ladungen zugewiesen werden. Die virtuellen Kräfte im virtuellen elektrischen Feld können mit Hilfe der Jacobi-Matrix sogar zur Steuerung des Manipulators herangezogen werden.

**Bahnplanung** Steht ein kollisionsfreier Pfad im Gelenkraum fest, so muss jedem Pfadpunkt eine passende Geschwindigkeit zugeordnet werden. Eine Methode hierfür besteht darin, den Pfad durch ein Interpolationspolynom mit der Zeit als unabhängiger Variable anzunähern, siehe Abschn. 6.3.1. Leitet man dieses Polynom nach der Zeit ab, so erhält man den gesuchten Geschwindigkeitsverlauf.

Ein zentraler Nachteil dieser Methode besteht darin, dass die numerische Berechnung der Polynomkoeffizienten sehr aufwendiger ist, wenn viele Pfadpunkte interpoliert werden sollen. Außerdem tendieren Polynome mit vielen Pfadpunkten zu einem welligen Verlauf zwischen aufeinanderfolgenden Pfadpunkten. Abhilfe schafft hier die *Spline-Interpolation* (auf Kosten nichtglatter Übergangsstellen).

Besteht ein Pfad nur aus Start- und Zielpunkt (und keinen Zwischenpunkten), so lässt sich eine einfache Bahn mit Hilfe eines trapezförmigen Geschwindigkeitsverlaufs berechnen, siehe Abschn. 6.3.2. Dabei wählt man stückweise konstante (treppenförmige) Beschleunigungsverläufe und erhält so einen trapezförmigen Geschwindigkeitsverlauf, wie in Abb. 1.16 beispielhaft dargestellt. Der Winkelverlauf ergibt sich in der Zeitspanne von  $\ddot{\theta} = 0$  zu einer Geraden, die von parabelförmigen Anfangs- und Endverläufen eingefasst ist.

**Abb. 1.16** Beispiel einer Gelenkwinkelbahn mit trapezförmigem Geschwindigkeitsverlauf. Anfangs- und Endgeschwindigkeit sollen dabei verschwinden, die maximale Winkelgeschwindigkeit soll  $6^\circ/s$  betragen. Für die Verfahrdauer ist 16 s gefordert



### 1.4.5 Antriebsauslegung

**Zentrale und dezentrale Antriebe** Man unterscheidet *zentrale* und *dezentrale Gelenkantriebe*. Im ersten Fall ist der Stator des Motors starr mit dem Armsegment befestigt, welches dem vom Motor angetriebenen Armsegment vorangeht. Im zweiten Fall ist der Stator des Motors mit einem anderen als dem Vorgänger des angetriebenen Armsegments verbunden. So sind beispielsweise die Motoren der letzten drei Gelenke eines anthropomorphen Manipulators oft am Ellenbogen-Gelenk montiert. In häufig eingenommenen Manipulator-Stellungen dienen diese Motoren als Gegengewicht zum Gewicht der nachfolgenden Armsegmente, des Endeffektors sowie der Nutzlast. Für die mechanische Konstruktion sind dezentrale Gelenkantriebe aufwendig, da die Antriebsmomente über bewegte Gelenke hinweg übertragen werden müssen. Dadurch ergeben sich mechanische Verkopplungen zwischen den Bewegungen der Gelenke, die in der Kinematik berücksichtigt werden müssen. Die grundsätzlichen Antriebseigenschaften ändern sich dadurch aber nicht, so dass im vorliegenden Buch der einfachere Fall zentraler Antriebe betrachtet wird.

**Vor- und Nachteile unterschiedlicher Antriebsarten** Man unterteilt Motoren nach ihrem Prinzip der Kraftübertragung in *pneumatische*, *hydraulische* und *elektrische Antriebe*. Pneumatische Antriebe sind für eher geringere Kräfte und Momente geeignet. Ein typisches Anwendungsgebiet ist der Schließmechanismus von Greifern.

*Elektrische Antriebssysteme* bestehen aus einem elektrischen Motor, einem Getriebe sowie häufig Sensorik zur Messung der aktuellen Position des Rotors. Bei sogenannten *Direct-Drive*-Antriebssystemen verzichtet man auf Getriebe; damit entfallen das störende Getriebeispiel sowie Wärmeverluste durch Getriebereibung. Der elektrische Motor muss von einer Elektronikeinheit angesteuert werden, dem sogenannten *Motorcontroller*. Bei bürstenlosen Motoren realisiert er eine elektronische Umrichtung als Ersatz der bürstenbehafteten Umrichter beziehungsweise Stromwender von Gleichstrommaschinen.

Außerdem verfügen Motorcontroller in der Regel über eine Stromregelung, mit der ein gewünschtes Drehmoment einstellbar ist. Der Motorcontroller ist entweder in einem separaten *Schaltschrank* oder direkt im Manipulatorsegment in unmittelbarer Nähe des Motors integriert.

*Hydraulische Antriebe* liefern von allen drei Antriebsarten die größten Kräfte und Momente. Die Antriebsenergie wird dabei von einer elektrischen Pumpe geliefert, die in einem ölgefüllten Tank Druck erzeugt. Von dort aus werden über Druckleitungen, Ventile und Drosseln in den Gelenken *Hydraulikzylinder* (lineare Bewegung), selten auch *Hydromotoren* (rotative Bewegung) angetrieben. Dabei ergeben sich gegenüber elektrischen Antrieben eine Reihe von Vorteilen: So kann man beispielsweise oft auf verlust- und spielbehaftete Getriebe verzichten. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die installierte Antriebsleistung auf die vom Manipulator maximal abrufbare Antriebsleistung ausgelegt werden kann. Dieses Problem tritt zum Beispiel bei den letzten beiden Gelenkachsen des anthropomorphen Manipulators auf, dem sogenannten Hand-Neigen- und Hand-Drehen-Gelenk. Diese beiden Drehachsen stehen konstruktionsbedingt oft senkrecht aufeinander. Damit gibt es keine Position, in der die Gewichtskraft des Greifers mit Nutzlast für beide Achsen gleichzeitig zum jeweils maximalen Antriebsmoment führt. Da die Antriebsleistung bei hydraulischen Antrieben dezentral über einen einzigen elektrischen Motor erzeugt wird, kann dieser auf die maximal abrufbare Leistung ausgelegt werden. Bei Robotern mit elektrischen Antrieben übersteigt hingegen oft die installierte Motorleistung die maximal abrufbare beziehungsweise benötigte Motorleistung. Dies führt zu unnötiger Masse, Bauraum und Kosten.

Hydraulische Antriebe sind für Anwendungen mit sehr großen Antriebskräften und -momenten und relativ geringen Bewegungsbereichen prädestiniert, wie zum Beispiel bei großen und schweren Baumaschinen. Die zentralen Nachteile hydraulischer Antriebe für Manipulatoren sind daher im Bereich der mechanischen Konstruktion und der Wartung zu finden. Dies betrifft vor allem folgende Themen:

- Die Durchführung von Druckleitungen durch den Manipulatorarm ist konstruktiv kompliziert und voluminös.
- Manipulatoren besitzen meistens Rotationsgelenke. Hierfür können Hydraulikzylinder nur stark eingeschränkte Drehbereiche realisieren.  
Hydraulisch betriebene Drehantriebe (sogenannte *Hydromotoren*) sind vergleichsweise voluminös und schwer.
- Bei bestimmten Wartungs- und Reparaturarbeiten muss das Hydrauliköl abgelassen werden. Dies ist mit erhöhtem Aufwand verbunden.
- Eine vollständige Integration aller Komponenten des Antriebssystems im Manipulatorarm ist nicht möglich, da der Kompressor zu groß und zu schwer ist. Damit können Leichtbau-Manipulatoren nicht realisiert werden.

Aus diesen Gründen haben sich für Manipulatoren elektrische Antriebssysteme durchgesetzt, so dass im vorliegenden Buch nur diese betrachtet werden.

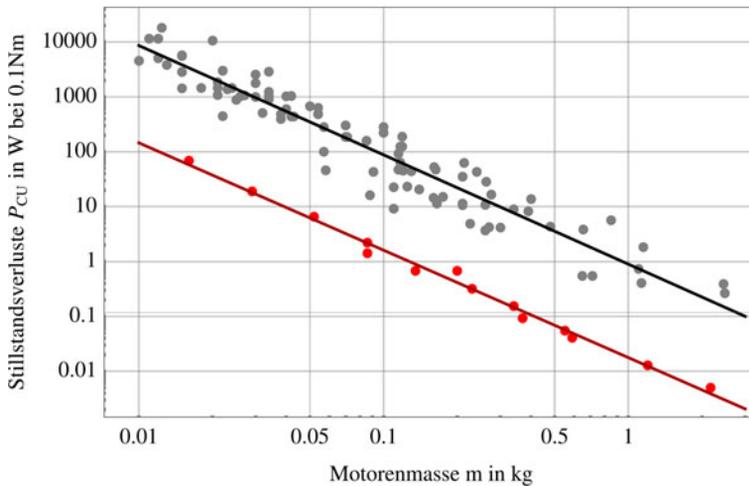
### Wärmeverluste als dominanter Faktor bei der Entwicklung von Manipulatoren

Abb. 1.17 zeigt für viele Motoren zweier großer Motorenhersteller (rot entspricht Hersteller D aus Abb. 7.29) die Wärmeverlustleistung  $P_{\text{CU}}$ , die bei einem Drehmoment von 0.1 Nm im Stillstand durch den Stromfluss in den Kupferdraht-Windungen des Motors entsteht. Diese Verlustleistung ist über der zugehörigen Motorenmasse  $m$  doppelt-logarithmisch angetragen (jeder Punkt entspricht einem Motor). Diese sogenannten Stillstandsverluste sind bei Roboterantrieben in der Regel gegenüber drehzahlabhängigen Verlusten dominant. Die für die Darstellung notwendigen technischen Parameter sind dem Hersteller-Katalog entnommen. Zusätzlich ist in Abb. 1.17 für jeden Hersteller die Ausgleichsgerade eingezeichnet. Damit ergibt sich jeweils näherungsweise ein Zusammenhang von

$$\begin{aligned} \text{rot: } P_{\text{CU}}(m) &= 896.7 \cdot 10^{-3} \text{ W} \left( \frac{1}{m/1 \text{ kg}} \right)^{1.992} \\ \text{grau: } P_{\text{CU}}(m) &= 17.7 \cdot 10^{-3} \text{ W} \left( \frac{1}{m/1 \text{ kg}} \right)^{1.957} \end{aligned}$$

Daraus folgt empirisch: Bei einem konstanten Antriebsmoment ist im Stillstand die Wärmeverlustleistung näherungsweise umgekehrt proportional zum Quadrat des Motorengewichts. Dies bedeutet zum Beispiel:

Halbes Motorgewicht  $\iff$  4-fache Wärmeverluste (im Stillstand).



**Abb. 1.17** Stillstandsverluste (ohne Eisensättigungseffekte) über Motorenmasse in doppelt-logarithmischem Maßstab für viele Motoren zweier unterschiedlicher Hersteller. Die Ausgleichsgerade fällt bei beiden Herstellern um zwei Dekaden Hochwert pro einer Dekade Rechtswert. Daher verhalten sich die Stillstandsverluste näherungsweise umgekehrt proportional zum Quadrat der Motorenmasse. (Aufgeführt sind auch kleinere Motoren, für die das Vergleichsmoment von 0.1 Nm aufgrund von Eisensättigungseffekten nicht realisierbar wäre.)

Dieser Zusammenhang gilt unabhängig vom Hersteller. Der Vorfaktor (hier  $896.7 \cdot 10^{-3} \text{ W}$  und  $17.7 \cdot 10^{-3} \text{ W}$ ) ist hingegen stark vom Hersteller abhängig und ergibt sich durch unterschiedliche Fertigungsarten und Materialien. Wärme führt zur Erhöhung der Motortemperatur. Ab einer bestimmten Grenztemperatur verbrennt der Isolierlack des Wicklungsdrahts im Motor, was zu einem irreversiblen Schaden führt. Aus diesem Grund stellen Wärmeverluste einen wichtigen Auslegungsparameter dar.

Durch ein Getriebe können die Drehmomente, die von den Motoren geliefert werden müssen, um ein sogenanntes *Getriebeübersetzungsverhältnis* herabgesetzt werden. Dies führt zu einer Reduzierung der Wärmeverluste in den Motoren. Dabei entstehen jedoch auch Wärmeverluste in den Getrieben, die mit dem Übersetzungsverhältnis steigen. Aus diesem gegenläufigen Verhalten von Verlustleistung im Motor und Getriebe folgt, dass ein Übersetzungsverhältnis existiert, bei dem die Gesamtverlustleistung minimal wird.

Die Motor-Getriebe-Sätze der Manipulator-Antriebe verursachen in der Regel den Hauptanteil des Manipulator-Gesamtgewichts, zum einen durch das Gewicht der Motor-Getriebe-Sätze selbst, zum anderen durch entsprechend große Wandstärken von Gelenkverbindern und Gelenkgehäusen. Verwendet man große (und damit schwere) Motor-Getriebe-Sätze, sinken zwar tendenziell die Wärmeverluste. Da jedoch mit dieser Maßnahme das Gesamtgewicht steigt, müssen die Motor-Getriebe-Sätze mehr Drehmoment für das Eigengewicht aufbringen, so dass damit wieder höhere Wärmeverluste entstehen. Aus dieser qualitativen Betrachtung wird klar, dass eine Vergrößerung der Motor-Getriebe-Sätze alleine nicht zwangsläufig das Wärmeproblem löst. Entscheidend ist vielmehr eine hohe Effizienz der Motor-Getriebe-Sätze, um von Haus aus wenig Wärme zu erzeugen. Außerdem muss die mechanische Konstruktion Kühlmaßnahmen, wie zum Beispiel Kühlrippen, vorsehen, um Wärme an die Umgebung abzuführen.

**Komplexität der Auslegung elektrischer Antriebssysteme** Bei der Auslegung von Motor-Getriebe-Sätzen gibt es eine Vielzahl zu bestimmender Parameter. Selbst mit einfachster Modellierung von Motor und Getriebe ergeben sich immer noch fünf Parameter: Drehmomentkonstante  $k_i$  (Verhältnis Drehmoment zu Motorstrom), Motorkonstante  $k_M$  (dient zur Berechnung der Kupferverluste im Motor), Getriebeübersetzungsverhältnis  $N$ , Zwischenkreisspannung  $U_D$  (Gleichspannung zur Versorgung des Motorcontrollers), maximaler Motorstrom  $I$ .

Ein möglicher Ansatz zur Auslegung besteht dabei darin, systematisch alle möglichen Kombinationen dieser fünf Parameter zu probieren (sogenanntes *Monte-Carlo-Vorgehen*). Selbst wenn für jeden Parameter nur die geringe Zahl von zum Beispiel sechs unterschiedlichen Werten betrachtet wird, führt dies zu einer Kombinationsvielfalt von  $6^5 = 7776$ . Nun muss jede dieser Kombinationen für jede Auslegungsbahn simuliert werden, um zum Beispiel die Wärmeentwicklung und den resultierenden Temperaturverlauf zu überprüfen. Eine einzige Simulation kann mehrere Minuten dauern, so dass der Simulationsaufwand schnell nicht mehr handhabbar ist: Bei einer einminütigen Simulationsdauer und insgesamt fünf Auslegungsbahnen ergäbe sich zum Beispiel eine Gesamtsimulationszeit von

$5 \text{ min} \cdot 7776 = 38\,880 \text{ min} = \frac{38\,880}{60 \cdot 24} \text{ Tage} = 27 \text{ Tage}$ . Aus diesem Grund behandelt Kap. 7 eine systematische Auslegungsmethodik, die in wenigen Schritten zu einer optimalen Parametrierung von Motor und Getriebe führt.

### 1.4.6 Regelung

Mit Kenntniss der Kinematik und Dynamik lässt sich bereits ein gutes mathematisches Modell des Manipulators aufstellen. Damit können die für eine gewünschte Bahn (sogenannte *Soll-Bahn*) notwendigen Drehmomentverläufe für die Motoren berechnet werden. Dies bedeutet: Beaufschlagt man das Simulationsmodell beziehungsweise das mathematische Modell mit diesen Drehmomentverläufen, so folgt der Manipulator ohne Abweichung der Soll-Bahn. Diese Betriebsart nennt man *Steuerung*.

Selbst kleine Parameterschätzfehler (sogenannte *Perturbationen*) und kleine strukturelle Modellfehler (zum Beispiel schwierig modellierbare Haftreibungseffekte) führen dazu, dass der Manipulator in einem solchen gesteuerten Betrieb rasch von seiner Soll-Bahn abweicht.

Erfasst man die Bahnabweichung durch geeignete Messsysteme und korrigiert damit die Steuerung, so spricht man von einer *Regelung*. Im Unterschied zur Steuerung wird also bei einer Regelung die Bahnabweichung auf die Stellgrößen (hier Drehmomente der Motoren) signaltechnisch zurückgeführt. Dies kann einen nahezu abweichungsfreien Bahnverlauf auch im Falle von Modellfehlern garantieren.

Die meisten Regelungsverfahren benötigen profunde mathematische Spezialkenntnisse. Diese würden den Umfang des vorliegenden Buchs bei weitem sprengen. In den meisten Anwendungsfällen sind diese komplexen Verfahren aber nicht notwendig. So findet in der industriellen Praxis oft eine vergleichsweise einfache Regelung Anwendung, die sogenannte *dezentrale, antriebsseitige PD-Regelung*, die Gegenstand von Kap. 8 ist:

- *Dezentral* bedeutet, dass die Regler in den einzelnen Gelenken keine Informationen über die anderen Gelenke nutzen. Die Wechselwirkung der Gelenke (zum Beispiel inertielle Verkopplung der Manipulatorsegmente) wird im Reglerentwurf nur als reine Störgröße angesehen, die der Regler kompensieren muss.
- *Antriebsseitig* bedeutet, dass als zu regelndes dynamisches System „nur“ die Mechanik des Motors (Trägheit des Rotors und Reibung) betrachtet wird. Die störende Rückwirkung des angekoppelten Armsegments wird im Reglerentwurf wieder nur als reine Störgröße betrachtet.

Darüber hinaus können anhand dieses relativ überschaubaren Regelungsverfahrens auch grundsätzliche Fragestellungen und Stabilitätsdefinitionen erläutert werden, die die Grundlage weiterführender Regelungskonzepte darstellen.

## Aufgaben

*Musterlösungen* finden sich unter [www.springer.com](http://www.springer.com) auf der Seite des vorliegenden Werks.

### 1.1 Skalarprodukt

- a) Berechnen Sie allgemein Norm  $\|\mathbf{a}\|$  von  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ .  
 b) Berechnen Sie allgemein das *Skalarprodukt* von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ :

$$S = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- c) Mit  $\phi$  als Winkel zwischen den beiden Vektoren gilt:  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\phi)$ . Was bedeutet dies für Winkel  $\phi$  bei  $S = 0$ ? Wie ist dieser Fall geometrisch zu deuten?

### 1.2 Kreuzprodukt

- a) Berechnen Sie allgemein das *Kreuzprodukt*

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- b) Nennen Sie Beispiele zur Anwendung des Kreuzprodukts in der Physik.  
 c) Betrachtet wird ein sich im Raum frei drehender Körper. Die Drehung erfolge dabei um eine Achse  $\boldsymbol{\omega}$ , und mit einer Drehgeschwindigkeit  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ . Ein Punkt auf dem Körper besitze den Abstandsvektor  $\mathbf{r}$  von der Drehachse. Bestimmen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts den Geschwindigkeitsvektor des Punktes.

### 1.3 Matrizen

- a) Berechnen Sie für die beiden Matrizen

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}$$

allgemein Matrixprodukt  $\tilde{R} \tilde{U}$ .

- b) Sei  $\tilde{A}$  eine  $(3 \times 2)$ -Matrix (3 Zeilen, 2 Spalten, *stehende Matrix*). Für welche Zeilen- und Spalten-Anzahl ist das Matrix-Produkt  $\tilde{A} \tilde{B}$  definiert?
- c) Überführen Sie das lineare Gleichungssystem in Matrixform:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

- d) Wann besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?
- e) Berechnen Sie allgemein die Determinante von  $\tilde{A} = [a_{ij}]$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .
- f) Bestimmen Sie für  $\text{Det}(\tilde{A}) = 0$  die Zahl der Lösungen. Wie bezeichnet man die unterschiedlichen Fälle?

#### 1.4 Business Case „Robotik“

- a) In welche Hauptarbeitsgebiete lässt sich die Robotik einteilen?
- b) Was ist der Hauptgrund für die Verbreitung von Robotern in der industriellen Automatisierungstechnik?
- c) Recherchieren Sie die Bedeutung des Begriffs „ökologische Nische“ in der Biologie. Ziehen Sie eine Analogie zum Begriff der „ökonomischen Nische“. Erklären Sie damit, warum sich Forschungsansätze in Richtung von
- Multifunktionsrobotern (=Roboter mit vielen möglichen Anwendungen),
  - humanoider Laufmaschinen und
  - kognitiver Roboter-Intelligenz
- bislang nicht durchgesetzt haben.

#### 1.5 Mechatronischer Charakter der Robotik

- a) Erläutern Sie den mechatronischen Charakter eines Manipulators in der Automatisierungstechnik am technischen Merkmal der *Manipulations-Geschwindigkeit*.
- b) Welche Fachbereiche sind typischerweise bei der Entwicklung eines Manipulators für die Automatisierungstechnik beteiligt?
- c) Benennen Sie die typischen Hauptarbeitsgebiete des Fachbereichs Elektrotechnik bei einem solchen Entwicklungsvorhaben.
- d) Recherchieren Sie eine Projektmanagement-Struktur, die dem iterativen Charakter der Entwicklung mechatronischer Systeme wie Manipulatoren gerecht wird.

## Literatur

1. Arkin Ronald, C.: Behavior-Based Robotics, 3. Aufl. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England (2000)
2. Brockhaus GmbH, F.A.: Brockhaus – Die Enzyklopädie, 20. Aufl. F. A. Brockhaus GmbH, Leipzig, Mannheim (1998)
3. Devol George, C.: Patent: Programmed Article Transfer. United States Patent Office, Patent-Number 2 988 237 (1961). <https://patentimages.storage.googleapis.com/6a/78/93/6b7927856c9bee/US2988237.pdf>, zugegriffen: 9. Nov. 2018
4. Grealish, D.: Unimate PUMA robot history. <http://vimeo.com/2276417>, zugegriffen: 15. Nov. 2018
5. Statistical Department, I.F.R.: Executive Summary World Robotics 2018 Industrial Robots (2018). [https://www.ifr.org/downloads/press2018/Executive\\_Summary\\_WR\\_2018\\_Industrial\\_Robots.pdf](https://www.ifr.org/downloads/press2018/Executive_Summary_WR_2018_Industrial_Robots.pdf), zugegriffen: 14. Nov. 2018
6. Margolius, I.: The Robot of Prague (2017). <https://czechfriends.net/images/RobotsMargoliusJul2017.pdf>, zugegriffen: 7. Nov. 2018. In: The Friends of Czech Heritage – Newsletter, Vol. 17, pp. 3–6
7. Meyberg, K., Vachenaue, P.: Höhere Mathematik, 6. Aufl. Bd. 1. Springer, Berlin (2003)
8. Müller, C. (Hrsg.): World Robotics – Industrial Robots 2018 (2018). <http://www.ifr.org>, zugegriffen: 13. Nov. 2018
9. Munson George, E.: The Rise an Fall of Unimation Inc. – A Story of Robotics Innovation & Triumph That Changed the World (2010). <http://www.botmag.com/the-rise-and-fall-of-unimation-inc-story-of-robotics-innovation-triumph-that-changed-the-world/>, zugegriffen: 9. Nov. 2018
10. Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, 13. Aufl. Springer-Vieweg Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2012)
11. Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, 14. Aufl. Springer-Vieweg Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (2014)
12. Pedretti, C., Niccolai, G.: Leonardo da Vinci: Automazioni e robotica. CB Edizioni, Poggio a Caiano (2010)
13. Rosheim Mark, E.: Leonardo’s Lost Robots, 1. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg (2006)
14. Rottenwöhler, A.: Minimalrestriktive Bahn-Umplanung für Master-Slave Manipulatorsysteme zur Passage singulärer Regionen. Bachelor-Arbeit, Robotik-Labor der Fakultät Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen, Hochschule für angewandte Wissenschaften Landshut (2018)
15. Wikimedia commons: Photograph of R.U.R. by Capek (1922). [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capek\\_RUR.jpg?uselang=de](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capek_RUR.jpg?uselang=de), zugegriffen: 8. Nov. 2018. Primärquelle: <http://www.umich.edu/~engb415/literature/pontee/RUR/RURsmry.html>
16. Schlich, T.: Vom Golem zum Roboter – Der Traum vom künstlichen Menschen. In: Van Dülmen, R. (Hrsg.) Erfindung des Menschen – Schöpfungsträume und Körperbilder 1500–2000. Böhlau Verlag, Wien, Köln, Weimar (1998)
17. Siciliano, B., Khatib, O.: Springer Handbook of Robotics, 2. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg (2016)
18. Tilley, J.: Automation, robotics, and the factory of the future (2017). <https://www.mckinsey.com/business-functions/operations/our-insights/automation-robotics-and-the-factory-of-the-future>, zugegriffen: 15. Nov. 2018
19. Weber, W.: Industrieroboter – Methoden der Steuerung und Regelung, 3. Aufl. Buchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, Wien (2017)

20. Weller, K.: The Lordstown Struggle and the Real Crisis in Production – Ken Weller (2009). <https://libcom.org/library/lordstown-struggle-ken-weller>, zugegriffen: 10. Nov. 2018
21. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Frondienst (2018). [https://de.wikipedia.org/wiki/Frondienst#cite\\_note-1](https://de.wikipedia.org/wiki/Frondienst#cite_note-1), zugegriffen: 7. Nov. 2018
22. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Golem (2018). <https://de.wikipedia.org/wiki/Golem>, zugegriffen: 8. Nov. 2018
23. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Robot (Frondienst im Königreich Böhmen) (2018). [https://de.wikipedia.org/wiki/Robot\\_\(Frondienst\\_im\\_K%C3%B6nigreich\\_B%C3%B6hmen\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Robot_(Frondienst_im_K%C3%B6nigreich_B%C3%B6hmen)), zugegriffen: 7. Nov. 2018
24. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Homunkulus (2018). [https://de.wikipedia.org/wiki/Homunkulus#Der\\_Homunculus\\_in\\_Goethes\\_Faust](https://de.wikipedia.org/wiki/Homunkulus#Der_Homunculus_in_Goethes_Faust), zugegriffen: 5. Nov. 2018
25. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Manipulation (2017). <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Manipulation>, zugegriffen: 7. März 2017
26. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Numerische Steuerung (2018). [https://de.wikipedia.org/wiki/Numerische\\_Steuerung](https://de.wikipedia.org/wiki/Numerische_Steuerung), zugegriffen: 9. Nov. 2018

**Zusammenfassung** Direkte Kinematik betrachtet die Aufgabenstellung, für gegebene Gelenkvariablen Position und Orientierung (zusammen kurz: Lage) der Segmente eines Manipulators zu berechnen. Insbesondere interessiert dabei die Lage des letzten Manipulatorsegments, da daran der Endeffektor befestigt ist.

Für diese Aufgabenstellung wird jedem Manipulatorsegment ein körpereigenes Koordinatensystem zugewiesen. Zusätzlich legt man ein mit der Umgebung fest verankertes und damit ruhendes Weltkoordinatensystem fest. Es dient als Bezug zur Definition von Lage und Orientierung der körpereigenen Koordinatensysteme: So definiert man die Position eines Manipulatorsegments durch die Position des Ursprungs seines körpereigenen Koordinatensystems in Weltkoordinaten. Demgegenüber gestaltet sich die Beschreibung der Orientierung eines Manipulatorsegments deutlich komplexer. Eine Methode besteht darin, die Ausrichtung der Einheitsvektoren des körpereigenen Koordinatensystems in Weltkoordinaten zu bestimmen. Als Matrix zusammengefasst, ergibt sich daraus die Rotationsmatrix des Manipulatorsegments, mit der die Orientierung definiert ist.

Man kann die Orientierung auch durch drei hintereinander ausgeführte Drehungen um jeweils eine der drei Achsen eines Bezugskordinatensystems definieren. Dies bezeichnet man als Euler-Drehung, die drei Drehwinkel als Euler-Winkel.

Eine dritte Möglichkeit zur Spezifikation der Orientierung besteht schließlich in der Drehung um eine vorgegebene Drehachse um einen bestimmten Drehwinkel. Diese sogenannte äquivalente Drehung ist verwandt mit dem in der Avionik häufig anzutreffenden Konzept der Quaternionen.

Die zum Wechsel zwischen Koordinatensystemen erforderliche Translation und Rotation lässt sich in einer Matrix zusammenfassen. Dies führt zur homogenen Koordinatentransformation. Hintereinander durchgeführte Koordinatensystemwechsel können damit als Matrizenprodukt homogener Transformationsmatrizen realisiert werden.

Oftmals liegen mehrere lokale Koordinatensysteme vor, zwischen denen nicht alle Transformationen bekannt sind. Dabei hilft ein Transformationsgraph, den Überblick zu

behalten: So kann aus gegebenen Transformationen mittels graphenorientierter Pfadsuche eine gewünschte Transformation zusammengesetzt werden.

Die Kinematik eines Manipulators hängt im Allgemeinen von allen Gelenkvariablen ab und ist daher schon bei wenigen Gelenken umfangreich und komplex. Da sich ein Gelenk per Definition nur in einer Achse bewegen kann, hängt die Kinematik zweier benachbarter Gelenke auch nur von dieser einen Gelenkvariablen ab. Man kann zeigen, dass die Transformation der zugehörigen körpereigenen Koordinatensysteme höchstens vier hintereinander ausgeführte Elementartransformationen erfordert. Diese bestehen aus jeweils zwei Rotationen und Translationen um Achsen von Koordinatensystemen. Durch den nach seinen zwei Erfindern benannten Denavit-Hartenberg-Algorithmus (kurz: DH-Algorithmus) formalisiert sich diese Transformation. Hierfür legt er zunächst die körpereigenen Koordinatensysteme fest. Anschließend werden für jedes Gelenk vier sogenannte DH-Parameter (ein Parameter pro Elementartransformation) bestimmt, mit denen die Transformation zum Koordinatensystem des angrenzenden Manipulatorsegments bestimmt wird. Zum Schluss erfolgt die Anbindung des Endeffektorkoordinatensystems, welches in der Regel nicht DH-konform vorgegeben ist.

Der große Vorteil des DH-Algorithmus besteht darin, dass sich die Fehleranfälligkeit beim Aufstellen der Koordinatensystem-Transformationen reduziert. Außerdem führt er, wie bei jedem Standard, zu einer vereinfachten Dokumentation und Reproduzierbarkeit. Ein geringer Nachteil besteht darin, dass in wenigen Fällen der Formalismus nicht eindeutig ist. Man nutzt die daraus erwachsenden Freiheitsgrade, um möglichst viele DH-Parameter zu Null zu machen.

---

## 2.1 Einführung

Die gezielte Veränderung von Position und Orientierung eines Objekts bezeichnet man im Kontext der Robotik als *Manipulation*. Ein Gerät zur Manipulation ist ein *Manipulator*, siehe auch Kap. 1 für eine ausführlichere Erläuterung des Begriffs.

Eine grundlegende Manipulationsaufgabe besteht darin, einen Greifer oder allgemein ein Werkzeug durch einen Manipulator in eine gewünschte Position und Orientierung bzw. Ausrichtung zu überführen. Diese Aufgabenstellung bezeichnet man als *Inverse Kinematik*. Kapitel 3 widmet sich ausführlich diesem Thema. Die dafür benötigten Grundlagen werden im vorliegenden Kapitel behandelt.

Für *Position* und *Orientierung* eines Körpers wird hier als synonyme Kurzform der Begriff *Lage* eingeführt. Das Problem<sup>1</sup> der mathematischen Beschreibung der Lage eines Körpers bezeichnet man als *Kinematik*<sup>2</sup> (deutsches Synonym: Bewegungslehre). Nach Brockhaus beinhaltet sie „(. . .) die Untersuchung und Beschreibung von Bewegungen oh-

---

<sup>1</sup> *Problem* wird hier nach dem Französischen „le probleme“ im Sinne einer komplizierten Frage bzw. Aufgabenstellung verstanden.

<sup>2</sup> *Kinematik* kommt aus dem Griechischen *kinema*: Bewegung.

ne Berücksichtigung der sie verursachenden Kräfte (im Unterschied zur *Dynamik* und zur *Kinetik*)“, [1].

Diese Definition beinhaltet allgemein Bewegungen und bezieht damit auch zeitliche Ableitungen wie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ein. Im Unterschied dazu wird hier unter dem Begriff *Kinematik* lediglich die *Lage* betrachtet. Die Beschreibung zeitlicher Ableitungen der Lage bezeichnet man als *Geschwindigkeitskinematik* bzw. *differenzielle Kinematik*. Dies ist das Thema von Kap. 4.

Zur Beschreibung der Lage eines Körpers weist man ihm ein körpereigenes Koordinatensystem zu. Dessen Ursprungsposition in einem Bezugskoordinatensystem verwendet man dann als Körperposition. Zur Beschreibung der Orientierung des Körpers kann die Ausrichtung des beschreibenden Dreibeins (also die Ausrichtung der Basisvektoren) des körpereigenen Koordinatensystems im Bezugskoordinatensystem herangezogen werden. Hierfür benötigte Grundlagen zu Koordinatensystemen werden in Abschn. 2.2 behandelt.

Eine Voraussetzung zur Manipulation ist, die Lage eines am Manipulator befestigten Greifers oder Werkzeugs im Raum bestimmen zu können. Dabei sind die Auslenkungen der Gelenke des Manipulators gegeben. Um die daraus erwachsende Aufgabenstellung von oben erwähnter inverser Kinematik zu unterscheiden, verwendet man den Begriff der *direkten Kinematik*. Falls keine Verwechslungsgefahr vorliegt, wird dafür im Folgenden kurz von *Kinematik* gesprochen.

Ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel in der Kinematik stellt die *homogene Koordinatensystemtransformation* (kurz: *homogene Transformation*) aus Abschn. 2.2.4 dar. Sie kombiniert Position und Orientierung eines Koordinatensystems in einer speziellen Matrix. Dies vereinfacht die Darstellung von Koordinatensystemtransformationen mit Hilfe der linearen Algebra.

Eine ebenso wichtige Grundlage für Kinematik ist die Darstellung der Orientierung eines Körpers im Raum durch sogenannte *Euler-Winkel*. Hierfür werden in Abschn. 2.3 *Euler-Drehungen* eingeführt. Sie bestehen aus einer Abfolge dreier hintereinander ausgeführter Rotationen um einzelne Achsen.

Der letzte Abschn. 2.4 behandelt schließlich die Modellbildung der Kinematik eines Manipulators. Hierfür steht in der Regel aus Konstruktionszeichnungen eine Fülle geometrischer Informationen über den Manipulator zur Verfügung. Davon werden nur wenige Informationen für ein kinematisches Modell tatsächlich benötigt. Wesentliche Informationen für das kinematische Modell bestehen in den Lagen der Gelenkachsen. Eine darauf reduzierte Darstellung wird hier als *topologische Anordnung* eingeführt. Sie verwendet einfache Stangen als Gelenkverbinder und normierte einfache Formen für die unterschiedlichen Gelenktypen.

Mit Hilfe der topologischen Anordnung und einem De-facto-Standard nach Denavit-Hartenberg lässt sich schließlich verhältnismäßig einfach ein kinematisches Modell aufstellen. Das dafür notwendige Vorgehen wird in einem dreigeteilten Algorithmus in Form eines Struktogramms beschrieben und in einigen Beispielen ausführlich geübt.

## 2.2 Koordinatensysteme und Konventionen

Dieser Abschnitt behandelt die für die Kinematik notwendigen Grundlagen von Koordinatensystemen. Um Prinzipskizzen und Beispiele übersichtlicher zu halten, sind die folgenden Ausführungen zunächst auf eine Ebene (kurz: 2D) beschränkt. Die Erweiterung auf den Raum (kurz: 3D) kann ohne Einschränkung der dargestellten Sachverhalte durch ein einfaches Hinzufügen der dritten Dimension ( $z$ -Achse) erfolgen.

Im vorliegenden Buch werden Längen, Linear- und Rotationsgeschwindigkeiten oftmals ohne physikalische Einheit dargestellt. Dafür werden folgende Normierungen vereinbart: Längen auf 1 m, Lineargeschwindigkeiten auf 1 m/s und Rotationsgeschwindigkeiten auf 1 rad/s. Dies dient zur Reduzierung des Umfangs mathematischer Ausdrücke und damit zur Verbesserung der Lesbarkeit. Die jeweils zugehörige physikalische Einheit geht dabei stets aus dem Formelkontext hervor.

### Konventionen für Koordinatensysteme:

- Alle verwendeten Koordinatensysteme stellen kartesische Rechtssysteme dar.
- Die Bezeichnung für ein Koordinatensystem ist immer in Form  $S_i$  mit fortlaufend nummeriertem, tiefgestelltem Index  $i$ .  
Der Ursprung von  $S_i$  wird ebenfalls mit  $S_i$  bezeichnet. Ob es sich um den Ursprung oder das Koordinatensystem im Ganzen handelt, geht dabei aus dem Kontext hervor. Alternativ zur Nummerierung kann auch eine Kurzbezeichnung als Index verwendet werden, zum Beispiel  $S_{EE}$  für Endeffektorkoordinatensystem oder  $S_{TCP}$  für TCP-Koordinatensystem (siehe weiter unten für eine Definition des TCP).
- Die dem Koordinatensystem  $S_i$  zugeordneten Koordinaten lauten  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , die Basisvektoren  $e_{xi}$ ,  $e_{yi}$ ,  $e_{zi}$ .
- Zur Beschreibung der Lage bewegter Körper benötigt man ein ruhendes Bezugskoordinatensystem. Dafür wählt man ein Koordinatensystem, dessen Position immer mit der Umgebung (als Welt bezeichnet) fixiert ist. Dieses spezielle Koordinatensystem bezeichnet man als *Weltkoordinatensystem* (synonym zu *Inertialkoordinatensystem*). In diesem Buch wird es durch Index 0 gekennzeichnet:  $S_0$ .
- Der Vektor von Ursprung  $S_i$  zu Ursprung  $S_k$  wird als *Translationsvektor*  $t_{ik}$  bezeichnet. Einen häufigen Sonderfall stellt der Translationsvektor vom Ursprung des Weltkoordinatensystems  $S_0$  zum Ursprung eines anderen Koordinatensystems  $S_k$  dar. Anstelle von  $t_{0k}$  wird hierfür abkürzend  $t_k$  geschrieben.

- Ein hochgestellter Index kennzeichnet das beschreibende Koordinatensystem. Fehlt der hochgestellte Index, so ist  $S_0$  gemeint. Damit stellt beispielsweise  $x_k^i$  einen Vektor  $x_k$  mit beschreibendem Koordinatensystem  $S_i$  dar.
- Ein Vektor von Punkt  $A$  zu Punkt  $B$  wird mit  $\mathbf{AB}$  bezeichnet.
- Ortsvektoren<sup>3</sup> (synonym zu gebundene Vektoren) und Richtungsvektoren werden in der Schreibweise nicht unterschieden, da die jeweils zutreffende Interpretation aus dem Kontext hervorgeht.
- Ein Punkt  $P$  in  $S_i$ -Koordinaten kann entweder in Koordinatenschreibweise (synonym zu Komponentenschreibweise)

$$P^i = (P_{xi} ; P_{yi} ; P_{zi})$$

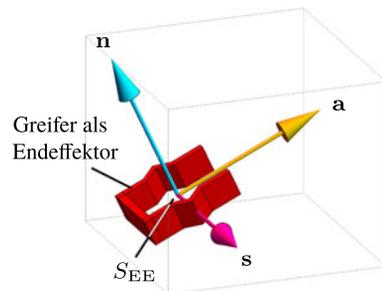
oder äquivalent als Ortsvektor von Ursprung  $S_i$  zu  $P$  gemäß

$$\mathbf{v}^i = (S_i P)^i = \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Der Startpunkt des Ortsvektors ist in diesem Fall der Ursprung des beschreibenden Koordinatensystems.

**TCP und Endeffektorkoordinatensystem** Besteht der Endeffektor aus einem Greifer, so liegt das Endeffektorkoordinatensystem in der Regel im räumlichen Zentrum der Greifer-Zangen. Der Ursprung dieses Koordinatensystems wird in diesem Fall als *Tool-Center-Point* (kurz: TCP) bezeichnet. Generell stellt der TCP einen wichtigen Bezugspunkt für den Endeffektor dar. Oft werden für einen Endeffektor sogar mehrere TCPs definiert. Gemäß Abb. 2.1 definiert man die Achsen des Endeffektorkoordinatensystems wie folgt:

**Abb. 2.1** Konvention für die Achsbezeichnungen des Endeffektorkoordinatensystems  $S_{EE}$  am Beispiel eines Greifers als Endeffektor



<sup>3</sup> Bei einem Ortsvektor sind Anfangs- und Endpunkt fest. In diesem Buch dienen Ortsvektoren zur Bestimmung eines Punktes in einem Koordinatensystem.

- Die  $z_{EE}$ -Achse zeigt senkrecht vom Greifer weg. Die Richtung kennzeichnet der *Annäherungsvektor* (Englisch: *approach-vector*)  $\mathbf{a}$ .
- Die  $y_{EE}$ -Achse ist in Manipulator-Nullposition horizontal ausgerichtet. Die Richtung kennzeichnet der *Gleitvektor* (Englisch: *sliding-vector*)  $\mathbf{s}$ .
- Die  $x_{EE}$ -Achse ist in Manipulator-Nullposition senkrecht nach oben ausgerichtet. Die Richtung kennzeichnet der *Normalenvektor* (Englisch: *normal-vector*)  $\mathbf{n}$ .

## 2.2.1 Lokale Koordinatensysteme

Zur Bestimmung von Position und Orientierung eines Körpers weist man diesem ein eigenes Koordinatensystem zu, das sogenannte *körper eigene* oder auch *lokale Koordinatensystem*.

**Beispiel 2.1.** Ein Körper sei gemäß Abb. 2.2 durch einen Polygonzug mit Punkten A bis G sowie  $S_A$  definiert. Weltkoordinatensystem  $S_0$  besitze Basisvektoren  $\mathbf{e}_{x_0}$  und  $\mathbf{e}_{y_0}$ . Als körpereigenes Koordinatensystem werde  $S_1$  mit Basisvektoren  $\mathbf{e}_{x_1}$  und  $\mathbf{e}_{y_1}$  gewählt. Die Orientierung des betrachteten Körpers wird damit durch die Orientierung der Basisvektoren  $\mathbf{e}_{x_1}$  und  $\mathbf{e}_{y_1}$  bezogen auf das Weltkoordinatensystem festgelegt. In der dargestellten Position ist der Körper um  $45^\circ$  bezüglich Strecke  $[S_1 G]$  nach links gedreht. Damit können die Koordinaten der Basisvektoren von  $S_1$  in  $S_0$ -Koordinaten einfach abgelesen werden zu

$$\text{Drehwinkel } 45^\circ: \quad \mathbf{e}_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei resultiert der Skalierungsfaktor  $1/\sqrt{2}$  aus der Forderung, dass die Länge von Basisvektoren stets 1 betragen muss. An der Orientierung ändert dieser Skalierungsfaktor natürlich nichts.

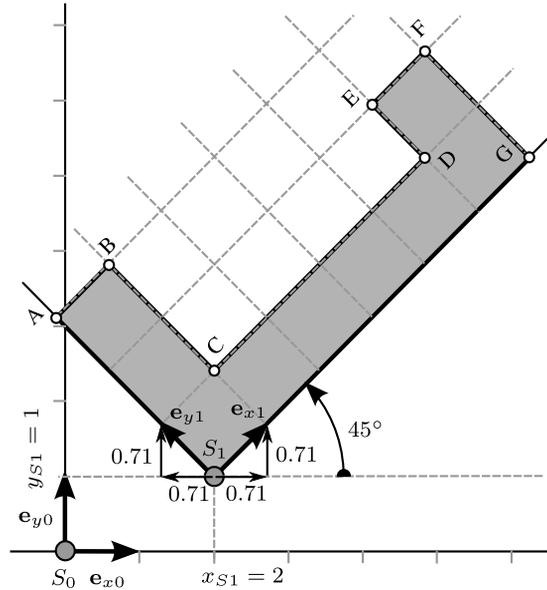
Auf diese Weise geht die Orientierung des Körpers eindeutig aus Basisvektoren des körpereigenen Koordinatensystems hervor. Beispielsweise ergäbe sich bei einer Drehung von  $0^\circ$  (Strecke  $[S_1 G]$  horizontal) für die Basisvektoren von  $S_1$ :

$$\text{Drehwinkel } 0^\circ: \quad \mathbf{e}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{y_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \triangleleft$$

Als Referenzpunkt zur Positionsbestimmung verwendet man zweckmäßigerweise den Ursprung des lokalen Koordinatensystems. In Beispiel 2.1 wäre dies Punkt  $S_1$  mit Weltkoordinaten  $S_1 = (x_{S_1}; y_{S_1}) = (2; 1)$ .

Die Lage des körpereigenen Koordinatensystems ist prinzipiell frei wählbar. Praktischerweise wird es aber so gelegt, dass sich die Beschreibung des Körpers einfach gestaltet. So können oft Symmetrien des Körpers oder besondere Winkелеigenschaften vorteilhaft ausgenutzt werden. Im vorliegenden Beispiel erzielt man durch die getroffene Wahl

**Abb. 2.2** Beschreibung von Position und Orientierung eines Körpers durch sein körpereigenes Koordinatensystem



des körpereigenen Koordinatensystems die besonders einfachen  $S_1$ -Koordinaten der Polygonpunkte gemäß

$$S_1^1 = (0; 0), A^1 = (0; 3), B^1 = (1; 3), C^1 = (1; 1), D^1 = (5; 1), \dots$$

Die hochgestellte Eins  $\bullet^1$  steht dabei für Bezugskordinatensystem  $S_1$ .

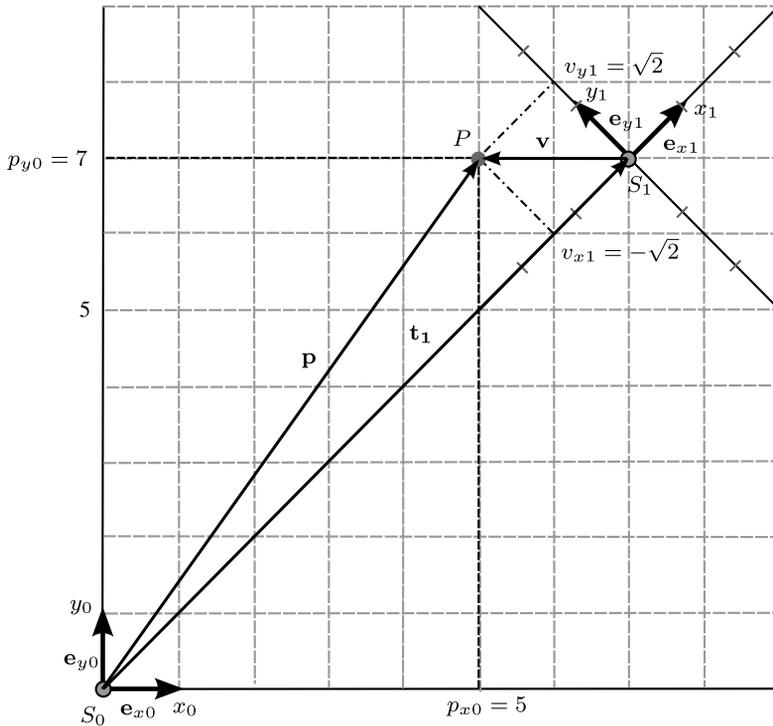
Am Beispiel 2.1 ist zu erkennen, dass ein und derselbe Punkt in  $S_0$  und  $S_1$  jeweils unterschiedliche Koordinaten besitzen kann. Beispielsweise weist Punkt  $A$  körpereigene Koordinaten  $A^1 = (0; 3)$  auf. Die Weltkoordinaten von  $A$  können graphisch aus Abb. 2.2 abgeschätzt werden zu  $A^0 \approx (-0.1; 3.1)$ .

Der Umstand, dass die Koordinatendarstellung eines Punkts vom Bezugskordinatensystem abhängt, wird am folgenden Beispiel nochmals verdeutlicht:

**Beispiel 2.2.** Darstellung eines Punkts in unterschiedlichen Koordinatensystemen:

Gegeben sei ein lokales Koordinatensystem  $S_1$  sowie ein Punkt  $P$  gemäß Abb. 2.3. Gesucht sind die Koordinaten von  $P$  in beiden Koordinatensystemen sowie der Translationsvektor von  $S_0$  nach  $S_1$ .

Punkt  $P$  wird in Weltkoordinaten durch Ortsvektor  $\mathbf{p} = \mathbf{S}_0 \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \end{pmatrix}$  dargestellt. Die Koordinaten ergeben sich damit zu  $P = (P_{x0}; P_{y0}) = (p_{x0}; p_{y0}) = (5; 7)$  (gestrichelte Linien).



**Abb. 2.3** Darstellung eines Punktes  $P$  in unterschiedlichen Koordinatensystemen

Derselbe Punkt wird in  $S_1$ -Koordinaten durch Ortsvektor  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{P} = \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{pmatrix}$  repräsentiert. Man erhält seine  $S_1$ -Koordinaten durch die senkrechte Projektion von  $\mathbf{v}$  auf die  $S_1$ -Achsen zu  $P^1 = (P_{x1}; P_{y1}) = (v_{x1}; v_{y1}) = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$  (Strich-Punkt-Linien).

Hinweis:  $\mathbf{v}$  ist als Ortsvektor  $\mathbf{S}_1 \mathbf{P}$  definiert mit dem Ziel,  $P$  in  $S_1$ -Koordinaten darzustellen. Daher lässt  $\mathbf{v}$  nur in  $S_1$ -Koordinatendarstellung eine sinnvolle Interpretation zu. Ebenso ist Ortsvektor  $\mathbf{p} = \mathbf{S}_0 \mathbf{P}$  nur in Weltkoordinaten aussagekräftig.

Der Translationsvektor von  $S_0$  zu  $S_1$  ist in Weltkoordinaten durch  $\mathbf{t}_{01}^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$  (Kurzform:  $\mathbf{t}_{01}^0 = \mathbf{t}_1$ ) gegeben. Dagegen befindet sich aus  $S_1$ -Sicht das Weltkoordinatensystem auf dem negativen Ast der  $x_1$ -Achse an Position  $\mathbf{t}_{10}^1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\triangleleft$

Die Ermittlung der unterschiedlichen Koordinaten von  $P$  im vorangegangenen Beispiel geschah durch Ablesen der Längen aus dem Graphen. Für komplexere Situationen benötigt man Methoden zur Umrechnung der Koordinaten eines Punktes in unterschiedliche Koordinatensysteme. Der Schlüssel zum Verständnis dieser Methode liegt in den Basisvektoren. Durch sie werden Koordinatensysteme definiert. Die dazu notwendigen Grundlagen behandelt der nachfolgende Abschnitt.

## 2.2.2 Basis eines Koordinatensystems und Rotationsmatrizen

Ein Koordinatensystem  $S_k$  definiert durch zugeordnete Basisvektoren  $e_{xk}$ ,  $e_{yk}$ ,  $e_{zk}$  die Orientierung und Skalierung seiner Achsen. Im vorliegenden Buch werden nur Basisvektoren der Länge 1 betrachtet, das heißt es handelt sich dabei um Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen. Per Definition sind Basisvektoren stets voneinander linear unabhängig. Daher kann jeder beliebige Ortsvektor  $\mathbf{v} = S_k \mathbf{P}$  durch eine gewichtete Vektorsumme bzw. Linearkombination dieser Basisvektoren dargestellt werden. Die Gewichtungsfaktoren stellen dabei die Koordinaten von  $P$  im zugrunde liegenden Koordinatensystem dar.

Gemäß Abb. 2.4 soll  $P$  in  $S_k$ -Koordinaten durch Ortsvektor  $\mathbf{v}^k = S_k \mathbf{P}$  dargestellt werden. Hinter der bekannten Koordinatendarstellung

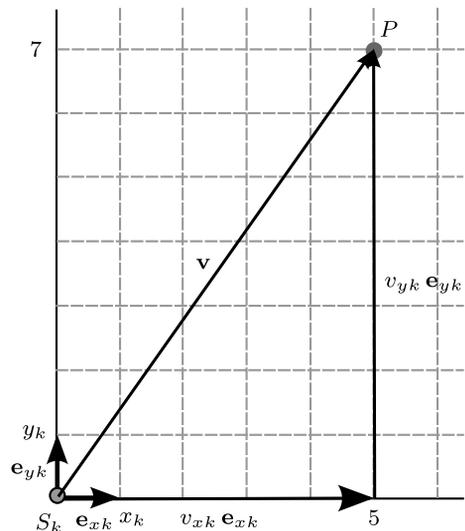
$$\mathbf{v}^k = \begin{pmatrix} v_{xk} \\ v_{yk} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

verbirgt sich die Definition in Form einer Summe gewichteter Basisvektoren

$$\mathbf{v}^k = v_{xk} \mathbf{e}_{xk}^k + v_{yk} \mathbf{e}_{yk}^k \quad (2.2)$$

mit  $\mathbf{e}_{xk}^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_{yk}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Die Gewichtungsfaktoren können aus Abb. 2.4 abgelesen werden zu  $v_{xk} = 5$  und  $v_{yk} = 7$ .

**Abb. 2.4** Darstellung eines Punkts durch eine gewichtete Vektorsumme von Basisvektoren



Koordinatendarstellung (2.1) stellt also lediglich eine Kurzform von Darstellung (2.2) als Summendarstellung von Basisvektoren dar. Diese beiden äquivalenten Darstellungen werden nun noch ergänzt durch Matrixdarstellung

$$\mathbf{v}^k = \tilde{\mathbf{B}}_k^k \begin{pmatrix} v_{xk} \\ v_{yk} \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^k = [\mathbf{e}_{xk}^k \quad \mathbf{e}_{yk}^k] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

als Basis von Koordinatensystem  $S_k$ .

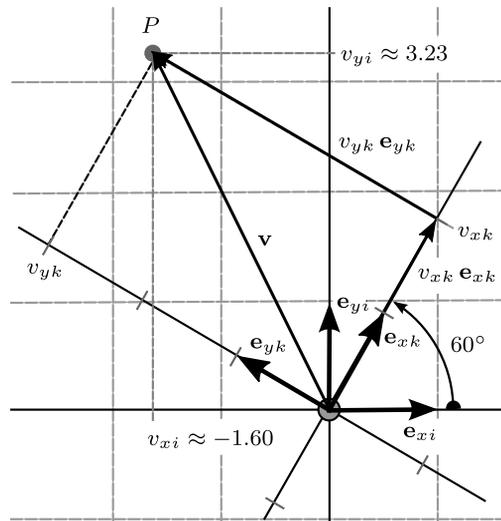
Bislang wurde lediglich die Darstellung des Punkts  $P$  in  $S_k$ -Koordinaten betrachtet. Nun sollen, wie in Abb. 2.5 dargestellt, die Koordinaten in ein verdrehtes Koordinatensystem  $S_i$  umgerechnet werden. Liegt mit  $\tilde{\mathbf{B}}_k^i = [\mathbf{e}_{xk}^i \quad \mathbf{e}_{yk}^i]$  eine Darstellung der Basis von  $S_k$  in Koordinatensystem  $S_i$  vor, so liefert Vektorsumme

$$\mathbf{v}^i = v_{xk} \mathbf{e}_{xk}^i + v_{yk} \mathbf{e}_{yk}^i = \tilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{v}^k \quad (2.3)$$

die gesuchte Umrechnung von  $S_k$ -Koordinaten von  $P$  in  $S_i$ -Koordinaten.

Daraus wird der Vorteil einer Darstellung mittels Basis klar: Zur Umrechnung eines Ortsvektors in ein gedrehtes Koordinatensystem muss lediglich die Basis in diesem gedrehten Koordinatensystem bekannt sein.

**Abb. 2.5** Umrechnung der Koordinaten eines Punkts in ein verdrehtes Koordinatensystem



**Beispiel 2.3.** Die Basis von  $S_k$  lautet in eigenen Koordinaten

$$\tilde{B}_k^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie später in Beispiel 2.10 noch gezeigt wird, ergibt sich die Basis von  $S_k$  in  $S_i$ -Koordinaten für einen Drehwinkel von  $60^\circ$  zu

$$\tilde{B}_k^i = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Die  $S_k$ -Koordinaten von  $P$  können aus Abb. 2.5 abgelesen werden zu  $P^k = (2; 3)$ . Eingesetzt in (2.3) ergeben sich Koordinaten

$$v^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - 3\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.60 \\ 3.23 \end{pmatrix}.$$

Ein graphischer Vergleich mit der Position von  $v_{xi}$  und  $v_{yi}$  in Abb. 2.5 validiert dieses Ergebnis. ◀

Aus dem in Abb. 2.5 dargestellten Beispiel erkennt man:  $S_k$  geht durch eine Rotation von  $-60^\circ$  (Drehung nach rechts) in  $S_i$  über. Die Lage des Punktes  $P$  verändert sich dabei natürlich nicht. Die eingangs formulierte Aufgabe bestand ja darin, die Koordinaten ein und desselben Punktes in einem gedrehten Koordinatensystem zu berechnen.

Eine andere Interpretation dieser Rotation ergibt sich, wenn die Position von  $P$  in den beiden Koordinatensystemen verglichen wird: Aus Sicht des um  $-60^\circ$  (nach rechts) gedrehten Koordinatensystems – also in  $S_i$ -Koordinaten – erscheint dieser Punkt nun um  $+60^\circ$  (nach links) gedreht gegenüber der Ausgangslage in  $S_k$ -Koordinaten. Diese Interpretation eröffnet die Möglichkeit, innerhalb ein und desselben Koordinatensystems einen Punkt bzw. den zugehörigen Ortsvektor zu rotieren. Hierzu benennt man das Ergebnis der Drehung in  $S_k$ -Koordinaten um. So erhält man aus (2.3) eine Vorschrift zum Drehen eines Ortsvektors  $v$  in

$$v_*^k = \tilde{B}_k^i v^k. \quad (2.4)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Ergebnis-Ortsvektor wieder in  $S_k$ -Koordinaten interpretiert wird (hochgestelltes  $k$ ).

Zusammenfassend ergibt sich: (2.3) dreht ein Koordinatensystem um einen bestimmten Winkel  $\varphi$  bei feststehenden Ortsvektoren. Demgegenüber dreht (2.4) die Ortsvektoren innerhalb eines feststehenden Koordinatensystems um  $-\varphi$ .

Für das hier betrachtete, übergreifende Thema der Kinematik ist nur die erste der beiden Varianten interessant, das heißt die Interpretation als Rotation des beschreibenden Koordinatensystems nach (2.3). Variante 2 findet sich in der Regel in Grundlagen-Lehrbüchern der Mathematik und wird oft mit Variante 1 verwechselt. Variante 2 wird an dieser Stelle also nur präsentiert, um sie von Variante 1 abzugrenzen.

Da Basis  $\tilde{B}_k^i$  zu einer Rotation des Bezugskordinatensystems von  $S_k$  nach  $S_i$  führt, bezeichnet man in der Robotik  $\tilde{B}_k^i$  als *Rotationsmatrix* (synonym zu *Drehmatrix*). Daher wird ab jetzt mit der Ersetzung

$$\tilde{B}_k^i \rightarrow \tilde{R}_{ik}$$

auf die in der Robotik übliche Notation einer Rotationsmatrix übergegangen. Damit ergibt sich (2.3) zu

$$\mathbf{v}^i = \tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k. \quad (2.5)$$

Diese Notation besitzt den Vorteil, durch die Reihenfolge der Indizes  $ik$  bereits Aufschluss über die Zuordnung der Koordinatensysteme zu liefern. Es gilt die Verkettungs-Regel: Benachbarte Indizes müssen gleich sein; in (2.5) oben durch die hoch- und tiefgestellte eckige Klammer dargestellt. Rechts von  $\tilde{R}_{ik}$  stehende Größen beziehen sich also auf das  $S_k$ -System, links stehende Größen auf das  $S_i$ -System.

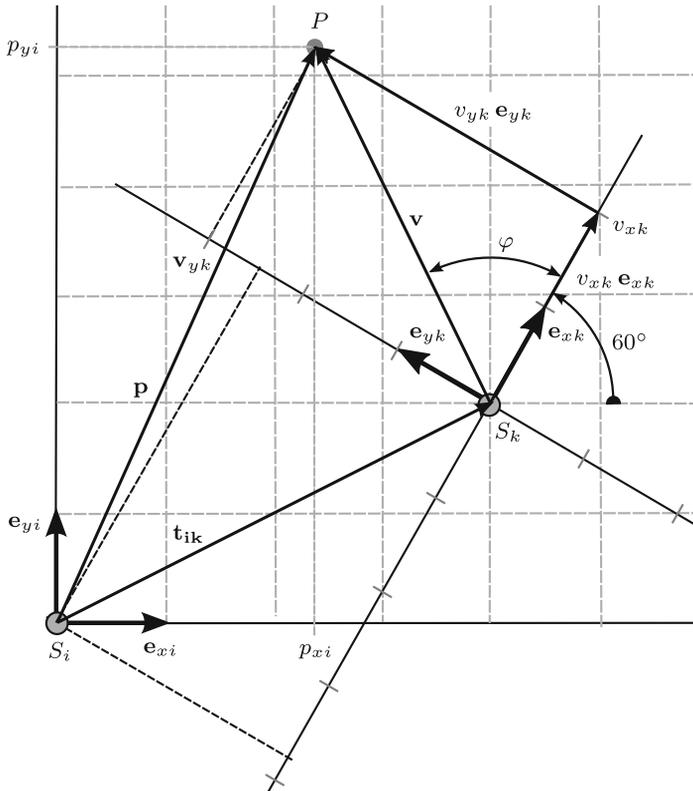
Neben einer Rotation kann zwischen Koordinatensystemen auch eine Verschiebung der Ursprünge vorliegen. Zusammen ergibt sich eine vollständige Koordinatentransformation. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

### 2.2.3 Koordinatentransformation durch Rotation und Translation

Koordinatensystem  $S_i$  soll nun zusätzlich zur Rotation auch gegenüber dem Ursprung von  $S_k$  verschoben sein. Dies bezeichnet man als *Translation*. Position und Orientierung von  $S_k$  sei durch *Translationsvektor* (synonym zu *Verschiebevektor*)  $\mathbf{t}_{ik}^i$  und Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{ik} = [\mathbf{e}_{xk}^i \ \mathbf{e}_{yk}^i]$  gegeben. Die Koordinaten von  $P$  sollen wie im vorangegangenen Abschnitt von  $S_k$  nach  $S_i$  umgerechnet werden.

Die Punktkoordinaten sind durch die Koordinaten von Ortsvektor  $\mathbf{p}^i = \mathbf{S}_i \mathbf{P}^i$  gegeben. Dieser kann mittels Vektorsumme zusammengesetzt werden und man erhält die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned} S_k \rightarrow S_i : \quad \mathbf{p}^i &= \mathbf{t}_{ik}^i + v_{xk} \mathbf{e}_{xk}^i + v_{yk} \mathbf{e}_{yk}^i = \mathbf{t}_{ik}^i + \tilde{R}_{ik} \begin{pmatrix} v_{xk} \\ v_{yk} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{t}_{ik}^i + \tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$



**Abb. 2.6** Umrechnung der Koordinaten eines Punkts in ein rotiertes und verschobenes Koordinatensystem

Nun wird der umgekehrte Fall betrachtet: Gegeben seien die Koordinaten von  $P$  in  $S_i$ , gesucht die  $S_k$ -Koordinaten. Als Zwischenschritt wird zunächst

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{p}^i - \mathbf{t}_{ik}^i$$

berechnet. Die Längen der senkrechten Projektion von  $\mathbf{v}$  auf die Koordinatenachsen von  $S_k$  liefern im zweiten Schritt die gesuchten  $S_k$ -Koordinaten. Mit  $\varphi$  als Winkel zwischen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{e}_{xk}$  (siehe Abb. 2.6) lässt sich das Skalarprodukt in der Form

$$\mathbf{e}_{xk}^i \circ \mathbf{v}^i = \underbrace{\|\mathbf{e}_{xk}^i\|}_{=1} \|\mathbf{v}^i\| \cos(\varphi)$$

aufstellen. Da die Länge  $v_{xk}$  der Projektion von  $\mathbf{v}$  auf die  $x_k$ -Achse gerade  $\|\mathbf{v}^i\| \cos(\varphi)$  beträgt, folgt

$$v_{xk} = \mathbf{e}_{xk}^i \circ \mathbf{v}^i = (\mathbf{e}_{xk}^i)^T \mathbf{v}^i.$$

Analog ergibt sich für die  $y_k$ -Achse

$$v_{yk} = \mathbf{e}_{yk}^i \circ \mathbf{v}^i = \left( \mathbf{e}_{yk}^i \right)^T \mathbf{v}^i .$$

Dies lässt sich als Matrixprodukt zusammenfassen und man erhält schließlich die gesuchte Transformationsvorschrift

$$S_i \rightarrow S_k : \quad \mathbf{v}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xk}^i & \mathbf{e}_{yk}^i \end{bmatrix}^T \mathbf{v}^i = \tilde{R}_{ik}^T (\mathbf{p}^i - \mathbf{t}_{ik}^i) . \quad (2.7)$$

Alternativ lässt sich  $\mathbf{v}^k$  auch durch Auflösen von (2.6) nach  $\mathbf{v}^k$  mit Hilfe der Matrixinversen aus der linearen Algebra herleiten:

$$\mathbf{v}^k = \tilde{R}_{ik}^{-1} (\mathbf{p}^i - \mathbf{t}_{ik}^i)$$

Da es sich bei  $\tilde{R}_{ik}$  um eine orthonormale Matrix handelt, ergibt sich nach den Rechenregeln der linearen Algebra die Matrixinverse der Rotationsmatrix aus deren Transponierten: Mit  $\tilde{R}_{ik}^{-1} = \tilde{R}_{ik}^T$  validiert dieser alternative Rechenweg also (2.7).

Aus (2.5) und (2.7) folgt allgemein der praktische Zusammenhang

$$\tilde{R}_{ki} = \tilde{R}_{ik}^T . \quad (2.8)$$

**Beispiel 2.4.** Ergänzung von Beispiel 2.3 um Translation.

Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{ik}$  ist bereits zahlenmäßig bekannt. Aus Abb. 2.6 kann der Translationsvektor abgelesen werden zu

$$\mathbf{t}_{ik}^i = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus den bekannten  $S_k$ -Koordinaten von Punkt  $P$  ergibt Transformation (2.6)

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{t}_{ik}^i + \tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.40 \\ 5.23 \end{pmatrix}$$

Ein graphischer Vergleich mit der Position von  $p_{xi}$  und  $p_{yi}$  in Abb. 2.6 validiert dieses Ergebnis.

Die so erhaltenen  $S_i$ -Koordinaten sollen zur Übung in das  $S_k$ -Koordinatensystem zurück transformiert werden. Hierzu ergibt sich aus (2.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^k &= \tilde{R}_{ik}^T (\mathbf{p}^i - \mathbf{t}_{ik}^i) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{pmatrix} 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{7}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \\ -\sqrt{3} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

◁

**Beispiel 2.5.** Fortsetzung von Beispiel 2.2

Die  $S_1$ -Basis in  $S_0$ -Koordinaten kann direkt aus Abb. 2.3 abgelesen werden, wobei die Skalierung mit  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sicherstellt, dass die Länge der Basisvektoren 1 beträgt:

$$\tilde{R}_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aus (2.8) folgt die  $S_0$ -Basis in  $S_1$ -Koordinaten zu

$$\tilde{R}_{10} = \tilde{R}_{01}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe dieser Rotationsmatrix bzw. Basis-Darstellung folgt der in  $S_1$  gegebene Vektor  $v^1$  in  $S_0$ -Koordinaten zu:

$$\begin{aligned} v^0 &= e_{x1}^0 v_x^1 + e_{y1}^0 v_y^1 = \begin{bmatrix} e_{x1}^0 & e_{y1}^0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x^1 \\ v_y^1 \end{pmatrix} = \tilde{R}_{01} v^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ -1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Weltkoordinaten von  $P$  erhält man schließlich aus Vektorsumme

$$p^0 = t_1^0 + v^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

**2.2.4 Homogene Transformation und Transformationsgraph**

Die aus Translation und Rotation bestehende Transformation (2.6) wird in der Robotik oft mehrfach hintereinander angewendet, um von einem Start-Koordinatensystem über mehrere Zwischenkoordinatensysteme zu einem Zielkoordinatensystem zu gelangen. Beispielsweise möchte man Endeffektorkoordinaten eines Manipulators nach Weltkoordinaten (im Sockel des Manipulators) transformieren. Die lokalen Koordinatensysteme jedes Manipulatorsegments zwischen Sockel und Endeffektor stellen in diesem Fall die Zwischenkoordinatensysteme dar.

Um solche Ketten von Transformationen mit weniger Aufwand beschreiben zu können, fasst man die in (2.6) enthaltenen Teiltransformationen (Rotation und Translation) zu einer gemeinsamen Transformationsmatrix zusammen.

Hierzu führt man *homogene Koordinaten*<sup>4</sup> ein. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung der bestehenden Koordinaten um eine zusätzliche, fiktive Dimension. Diese wird mit dem konstanten Wert 1 belegt. Für Ortsvektor  $\mathbf{p}$  folgen daraus die homogenen Koordinaten

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden werden – wie in diesem Beispiel – homogene Koordinaten durch Großschreibung gekennzeichnet. Dementsprechend bezeichnet man Matrix

$$\tilde{T}_{ik} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{ik} & \mathbf{t}_{ik}^i \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{ik} & \mathbf{t}_{ik}^i \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \quad (2.10)$$

als *homogene Transformationsmatrix*. Diese definiert *homogene Transformation*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^i &= \tilde{T}_{ik} \mathbf{V}^k \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{p}^i \\ 1 \end{pmatrix} &= \tilde{T}_{ik} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^k \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k + \mathbf{t}_{ik}^i \cdot 1 \\ \mathbf{0}^T \mathbf{v}^k + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k + \mathbf{t}_{ik}^i \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die obere Zeile stellt dabei Transformationsvorschrift (2.6) dar. Die homogene Transformation (2.11) fasst also tatsächlich Rotation und Translation in nur einer einzigen Matrizenmultiplikation zusammen. Im Folgenden wird für *homogene Transformationsmatrix* kurz *homogene Transformation* verwendet. Die korrekte Bedeutung geht dabei jeweils aus dem Kontext hervor.

Eine Erweiterung der homogenen Transformation vom bisher diskutierten 2D- auf den 3D-Fall ist problemlos möglich und wird ab Abschn. 2.4.2 benötigt. Wie in Abschn. 2.3.2 dargestellt, erweitert sich die Rotationsmatrix für eine allgemeine Drehung im Raum auf eine  $(3 \times 3)$ -Matrix. Der Translationsvektor beinhaltet dann natürlich auch eine dritte Dimension. Damit erweitert sich  $\tilde{T}_{ik}$  aus (2.10) von einer  $(3 \times 3)$ - auf eine  $(4 \times 4)$ -Matrix mit drei Nullen in der letzten Zeile.

Neben den hier behandelten Anwendungen in der Robotik kommen homogene Koordinaten besonders in der maschinellen Bildverarbeitung zum Einsatz. Hier können zusätzlich eine *perspektivische Transformation* sowie eine Skalierung durch Modifikation der

<sup>4</sup>Die Bezeichnung *homogen* kommt aus der projektiven Geometrie. Eine weitere Erklärung der Eigenschaften homogener Koordinaten ist im Kontext der Robotik nicht so elementar, so dass hier darauf verzichtet werden kann.

letzten Zeile der homogenen Transformationsmatrix erfolgen. Beispielsweise erhält man eine Skalierung, indem das Element ganz unten rechts (süd-östlichstes Element) zu  $1/s$  mit  $s > 0$  gewählt wird:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{ik} & \mathbf{t}_{ik}^i \\ \mathbf{0}^T & \frac{1}{s} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{v}^k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k + \mathbf{t}_{ik}^i \cdot 1 \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis beinhaltet im letzten Element  $1/s$ . Um es auf homogene Koordinaten-Form zu bringen (letztes Element 1!), muss es mit  $s$  skaliert werden. So erhält man

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}^i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s (\tilde{R}_{ik} \mathbf{v}^k + \mathbf{t}_{ik}^i) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erkennt man:  $s > 1$  führt zu einer Streckung,  $0 < s < 1$  zu einer Stauchung.

Die rechte Seite der inversen Transformation (2.7) ergibt ausmultipliziert

$$\mathbf{v}^k = \tilde{R}_{ik}^T \mathbf{p}^i - \tilde{R}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik}^i.$$

Für die Inverse zu (2.11)

$$\mathbf{V}^k = \tilde{T}_{ik}^{-1} \mathbf{P}^i = \tilde{T}_{ki} \mathbf{P}^i$$

folgt daraus sofort die inverse homogene Transformationsmatrix

$$\tilde{T}_{ik}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{ik}^T & -\tilde{R}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik}^i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]. \quad (2.12)$$

Damit erleichtert sich die sonst aufwendige Berechnung der Matrixinversen.

**Beispiel 2.6.** Weiterführung von Beispiel 2.4: Es sollen die homogenen Transformationsmatrizen  $\tilde{T}_{ik}$  und  $\tilde{T}_{ki}$  berechnet werden. Aus Beispiel 2.3 ist hierfür bereits Basis bzw. Rotationsmatrix

$$\tilde{B}_k^i = \tilde{R}_{ik} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

und aus Beispiel 2.3 Translationsvektor

$$\mathbf{t}_{ik}^i = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bekannt. Aus (2.10) folgt daraus die gesuchte homogene Transformationsmatrix zu

$$\tilde{T}_{ik} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{ik} & \mathbf{t}_{ik}^i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 4 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Mit transponierter Rotationsmatrix

$$\tilde{R}_{ik}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} -\tilde{R}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik}^i &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} \\ 2 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} -3.73 \\ +2.46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich nach (2.12) die gesuchte inverse homogene Transformationsmatrix zu

$$\tilde{T}_{ki} = \tilde{T}_{ik}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{ik}^T & -R_{ik}^T \mathbf{t}_{ik}^i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1/2 & \sqrt{3}/2 & -2 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & -1 + 2\sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Plausibilitäts-Check: Der Translationsvektor aus  $\tilde{T}_{ki}$  stellt den Ursprung von  $S_i$  in  $S_k$ -Koordinaten dar. Aus Abb. 2.6 kann man die  $S_k$ -Koordinate des Ursprungs von  $S_i$  graphisch abschätzen zu  $\tilde{S}_i^k = (-3.8; 2.5)$ . Dies bestätigt obige Rechnung.  $\triangleleft$

Löst man (2.11) nach  $\mathbf{V}^k$  auf, so erhält man

$$\mathbf{V}^k = \tilde{T}_{ik}^{-1} \mathbf{P}^i.$$

Daraus ergibt sich der zu (2.8) analoge Zusammenhang

$$\tilde{T}_{ki} = \tilde{T}_{ik}^{-1}. \quad (2.13)$$

Im Unterschied zu Rotationsmatrizen ist die Inverse einer homogenen Transformationsmatrix aber nicht einfach durch deren Transponierte gegeben, sondern vielmehr durch die komplizierte Rechenanweisung aus (2.12).

Es tritt noch eine weitere Analogie zu Rotationsmatrizen auf: Analog zu (2.5) gilt auch bei homogenen Transformationsmatrizen eine *Verkettungs-Regel*:

$$\tilde{T}_{ik} = \tilde{T}_{ij} \tilde{T}_{jk}$$

Damit können die eingangs erwähnten Transformationsketten durch das Produkt der einzelnen homogenen Transformationsmatrizen dargestellt werden. Dabei gilt: Benachbarte Indizes – wie in obigem Beispiel Index  $j$  – müssen gleich sein. Außerdem müssen auf beiden Gleichungsseiten jeweils der erste (hier:  $i$ ) und letzte (hier:  $k$ ) Index gleich sein.

Beispiel einer Transformationskette mit drei homogenen Transformationsmatrizen:

$$\tilde{T}_{25} = \tilde{T}_{21} \tilde{T}_{14} \tilde{T}_{45} .$$

Bei komplizierten physikalischen Anordnungen mit vielen lokalen Koordinatensystemen hilft ein *Transformationsgraph* die Übersicht zu behalten und mögliche Verbindungen zwischen Koordinatensystemen als Pfade im Graphen zu ermitteln. Elemente eines Transformationsgraphen sind:

- Knoten  $i$ ; steht für Koordinatensystem  $S_i$ :  $(S_i)$
- Gerichtete Kante von Knoten  $j$  zu Knoten  $i$ ; steht für  $\tilde{T}_{ij}$ :  $(S_j) \xrightarrow{\tilde{T}_{ij}} (S_i)$

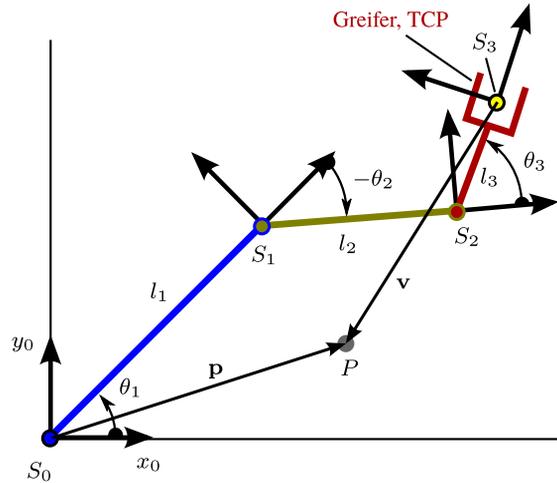
Bei den Kantenpfeilen ist die etwas gewöhnungsbedürftige Pfeilrichtung zu beachten: Aus der üblichen Leserichtung (also von links nach rechts) der Indizes von  $\tilde{T}_{ij}$  wird die umgekehrte Reihenfolge suggeriert, nämlich von  $i$  zu  $j$ . Tatsächlich aber zeigt die Pfeilrichtung die Richtung der Transformation an, also  $S_j \rightarrow S_i$ .

Im Transformationsgraph gelten folgende Regeln:

- Analog zur Vektorsumme verläuft ein Pfad vom Startpunkt zum Endpunkt (Spitze) der gesuchten Kante.
- Durchläuft der Pfad eine Kante in dessen Richtung, so muss mit der zugehörigen Transformationsmatrix von links her aufmultipliziert werden; bei entgegengesetzter Richtung muss die inverse Transformationsmatrix verwendet werden.

**Beispiel 2.7.** Gegeben sei der Manipulator aus Abb. 2.7 mit drei Manipulatorsegmenten, die durch unterschiedliche Farben voneinander abgegrenzt sind. Die Manipulatorsegmente seien durch Rotationsgelenke (kleine Kreise) drehbar gelagert. Das erste Manipulatorsegment (blau) besitze als körpereigenes Koordinatensystem  $S_1$ . Dem mittleren Manipulatorsegment (olivgrün) sei  $S_2$  zugeordnet. Im Mittelpunkt des Greifers befinde sich schließlich das körpereigene Koordinatensystem  $S_3$  des letzten Manipulatorsegments (dunkelrot).

**Abb. 2.7** Manipulator mit drei Manipulatorsegmenten und externem Punkt  $P$



Für eine bestimmte Auslenkung aller drei Gelenke seien die Position eines Punktes  $P$  in Weltkoordinaten als Ortsvektor  $\mathbf{p}$  sowie die homogenen Transformationen  $\tilde{T}_{01}$ ,  $\tilde{T}_{12}$  sowie  $\tilde{T}_{23}$  bekannt. Gesucht sind dafür die Greiferkoordinaten von  $P$ .

Die gesuchten Koordinaten beschreiben den in Abb. 2.7 eingetragenen Ortsvektor  $\mathbf{v}$  in  $S_3$ -Koordinaten. Der gegebene Ortsvektor  $\mathbf{p}$  sowie der gesuchte Ortsvektor  $\mathbf{v}^3$  wird zunächst jeweils auf homogene Koordinaten erweitert:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Vektor  $\mathbf{v}^3$  ergibt sich damit zu

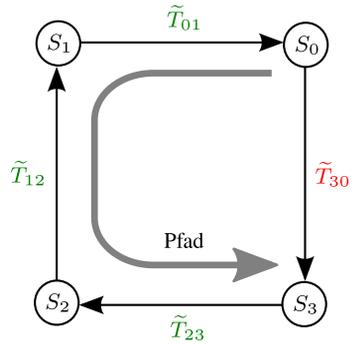
$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}^3 = \tilde{T}_{30} \mathbf{P}.$$

Im Transformationsgraphen aus Abb. 2.8 ist die gesuchte Transformation rot markiert, die gegebenen Transformationen sind dunkelgrün. Das vorliegende Beispiel ist so einfach gestaltet, dass es nur einen Pfad von  $S_3$  zu  $S_0$  gibt (grauer dicker Pfeil). Der Pfad durchläuft dabei alle Kanten entgegen deren Richtungen. Daher folgt aus den Rechenregeln des Transformationsgraphen jeweils eine Multiplikation mit der inversen Transformationsmatrix der jeweils durchlaufenden Kante. Aufmultiplizieren von links liefert schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{30} &= \tilde{T}_{23}^{-1} \tilde{T}_{12}^{-1} \tilde{T}_{01}^{-1} \\ &\quad \xrightarrow{\text{Multiplikationsrichtung}} \\ &= \tilde{T}_{32} \tilde{T}_{21} \tilde{T}_{10}. \end{aligned}$$

<

**Abb. 2.8** Transformationsgraph für die Anordnung aus Abb. 2.7

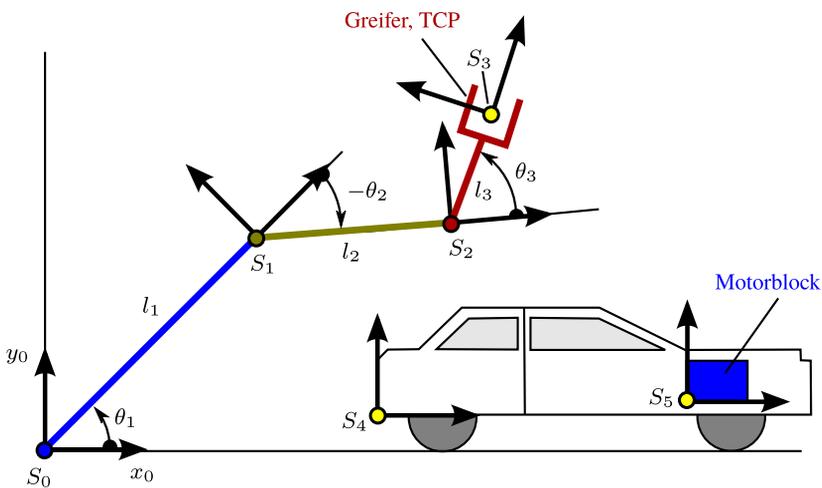


**Beispiel 2.8.** Fortsetzung von Beispiel 2.7: Der TCP (= Ursprung von  $S_3$ ) befindet sich in  $S_3$ -Koordinaten (trivialerweise) im Ursprung  $\mathbf{0}$ . Damit folgen die Weltkoordinaten  $\mathbf{t}_3$  des TCP aus

$$\begin{pmatrix} t_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{T}_{03} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

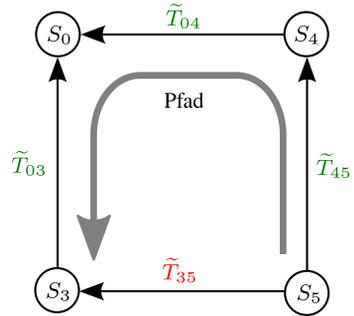
Das darin benötigte  $\tilde{T}_{03}$  kann mit (2.12) aus  $\tilde{T}_{03} = \tilde{T}_{30}^{-1}$  berechnet werden. Letztere homogene Transformationsmatrix ist aus Beispiel 2.7 bereits bekannt.  $\triangleleft$

**Beispiel 2.9.** Der Manipulator aus den vorangegangenen Beispielen soll nun am Motor eines Autos Arbeiten durchführen. Die genaue Position, an der manipuliert werden soll, sei in Motorblock-Koordinaten  $S_5$  gegeben.  $S_5$  sei wiederum in Auto-Koordinaten  $S_4$  gegeben.  $S_4$  sei schließlich in Weltkoordinaten bekannt, siehe Abb. 2.9. Gesucht ist die homogene Transformation vom Motorblock zum TCP.



**Abb. 2.9** Schema einer Fertigungszelle aus Beispiel 2.9 mit Manipulator und Auto

**Abb. 2.10** Transformationsgraph für die Anordnung aus Abb. 2.9



Gegeben seien die folgenden homogenen Transformationen:

- $\tilde{T}_{03}$  (TCP- in Weltkoordinaten; aus vorangegangenen Beispiel bekannt)
- $\tilde{T}_{04}$  (Auto- in Weltkoordinaten)
- $\tilde{T}_{45}$  (Motor- in Autokoordinaten)

Diese führen, zusammen mit der gesuchten homogenen Transformation  $\tilde{T}_{35}$ , zum Transformationsgraphen aus Abb. 2.10. Vom Fußpunkt zur Spitze von  $\tilde{T}_{35}$  führt ein Pfad über die gegebenen homogenen Transformationen  $\tilde{T}_{45}$ ,  $\tilde{T}_{04}$  und  $\tilde{T}_{30} = \tilde{T}_{03}^{-1}$ . Von links her aufmultipliziert liefert

$$\tilde{T}_{35} = \tilde{T}_{30} \tilde{T}_{04} \tilde{T}_{45} = \tilde{T}_{03}^{-1} \tilde{T}_{04} \tilde{T}_{45}. \quad \triangleleft$$

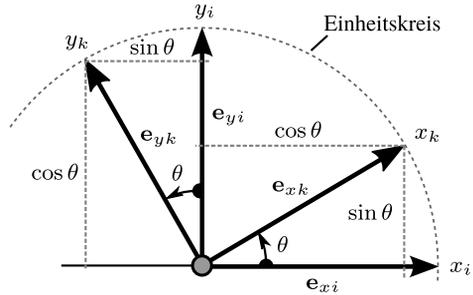
## 2.3 Rotationen

Aus Abschn. 2.2.2 ist bereits bekannt: Die Basis eines Koordinatensystems, bezogen auf ein zweites Koordinatensystem, kann zur Rotation von Vektoren verwendet werden. Folgerichtig wurde *Basis* in *Rotationsmatrix* umbenannt. Bislang wurden Basen bzw. Rotationsmatrizen durch Ablezen der Orientierung der Einheitsvektoren bestimmt.

In diesem Abschnitt werden die dabei offen gebliebenen, für die Kinematik eines Manipulators essentiellen Fragestellungen behandelt:

- Ein Koordinatensystem soll um einen vorgegebenen Winkel verdreht werden. Wie kann durch Vorgabe dieses Drehwinkels die zugehörige Rotationsmatrix erzeugt werden?
- Zum vorangegangenen Punkt das (deutlich aufwendigere) Umkehrproblem: Wie kann aus einer gegebenen Rotationsmatrix der zugehörige Drehwinkel berechnet werden?
- Erweiterung obiger beider Fragestellungen auf den 3D.
- Gibt es neben Rotationsmatrizen noch weitere Möglichkeiten zur Vorgabe der Orientierung eines Körpers im Raum?

**Abb. 2.11** Rotation eines Koordinatensystems um Winkel  $\theta$  im 2D



### 2.3.1 Rotationen im 2D

Wie in Abb. 2.11 dargestellt, soll Koordinatensystem  $S_k$  aus einem Bezugskordinatensystem  $S_i$  um einen Winkel  $\theta$  im mathematisch positiven Drehsinn herausgedreht werden. Die Einheitsvektoren von  $S_k$  in  $S_i$ -Koordinaten können durch elementare geometrische Beziehungen in Abhängigkeit von  $\theta$  angegeben werden zu

$$\mathbf{e}_{x_k}^i(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{y_k}^i(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Um dabei Drehwinkel  $\theta$  im II.-Quadranten zu identifizieren, ist folgender Hilfssatz der Elementar-Geometrie hilfreich: Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind entweder gleich groß oder ergänzen sich zu  $180^\circ$ .

Aus den von  $\theta$  abhängigen Einheitsvektoren wird schließlich (2D-)Rotationsmatrix

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ik}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_k}^i(\theta) & \mathbf{e}_{y_k}^i(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

zusammengesetzt.

**Beispiel 2.10.** Koordinatensystem  $S_1$  aus Beispiel 2.2, Abb. 2.3 ist um  $+45^\circ$  gegenüber  $S_0$  gedreht. Mit  $\theta = 45^\circ$  folgt aus (2.14)

$$\tilde{\mathbf{R}}_{01}(45^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dieses Ergebnis kann leicht graphisch in Abb. 2.3 validiert werden.

Analog ergibt sich in Beispiel 2.3, Abb. 2.5 für Drehwinkel  $\theta = 60^\circ$ :

$$\tilde{B}_k^i = \tilde{R}_{ik} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad \triangleleft$$

Die Orientierung eines Körpers in einem Bezugskoordinatensystem  $S_i$  wird oft durch seine Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{ik}$  angegeben. Alternativ dazu kann die Orientierung auch durch Drehwinkel  $\theta$  spezifiziert werden. Hier stellt sich oft die Umkehraufgabe zu (2.14): Für eine gegebene Rotationsmatrix soll der Drehwinkel berechnet werden. Dabei wird Wertebereich  $]-\pi; \pi]$  festgelegt.

Bezeichnet man die Elemente der Rotationsmatrix gemäß

$$\tilde{R}_{ik} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

so lässt sich der folgende trigonometrische Zusammenhang aufstellen:

$$\frac{r_{21}}{r_{11}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \arctan \frac{r_{21}}{r_{11}}$$

Die dabei verwendete Arkustangens-Funktion  $\arctan$  liefert jedoch definitionsgemäß nur Winkel im eingeschränkten Bereich  $]-\pi/2; \pi/2[$ , also im I. und IV. Quadranten.

Mathematisch gesehen gehen tatsächlich im II. Quadranten gelegene Winkel durch Punktspiegelung am Ursprung über in den IV. Quadranten; analog wird der III. Quadrant in den I. Quadranten gespiegelt.

Anschaulich lässt sich dies dadurch erklären, dass bei der Quotientenbildung  $r_{21}/r_{11}$  Vorzeicheninformationen verlorengehen: Ein positiver Bruch kann entweder  $r_{21} > 0 \wedge r_{11} > 0$  (I. Quadrant) oder  $r_{21} < 0 \wedge r_{11} < 0$  (III. Quadrant) bedeuten. Ein negativer Bruch hingegen kann entweder  $r_{21} > 0 \wedge r_{11} < 0$  (II. Quadrant) oder  $r_{21} < 0 \wedge r_{11} > 0$  (IV. Quadrant) bedeuten. Damit kann also nicht mehr zwischen II. und IV. Quadranten oder zwischen I. und III. Quadranten unterschieden werden. Der  $\arctan$  ist nun so definiert, dass er im Zweifel stets Werte aus dem I. oder IV. Quadranten liefert.

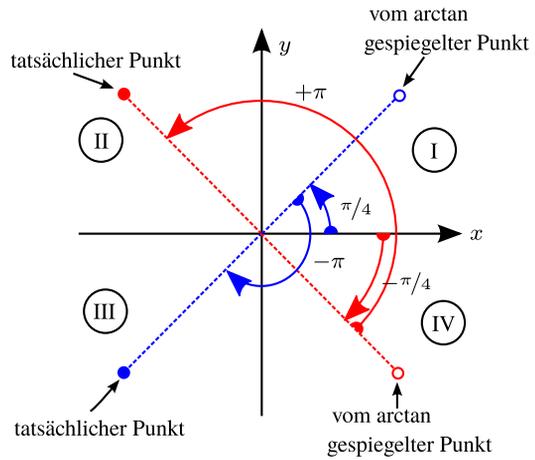
Für Positionen im I. Quadrant liefert der  $\arctan$  für  $x = r_{11} = 1$ ,  $y = r_{21} = 1$  (in Abb. 2.12 der blaue Punkt oben rechts) den korrekten Winkel

$$\arctan \frac{1}{1} = \arctan 1 = \pi/4.$$

Man erhält aber denselben Winkel auch für  $x = r_{11} = -1$ ,  $y = r_{21} = -1$  (also für Positionen im III. Quadranten, in Abb. 2.12 der blaue Punkt unten links), also

$$\arctan \frac{-1}{-1} = \arctan 1 = \pi/4.$$

**Abb. 2.12** Prinzipskizze zur 4-Quadrant Arkustangens-Funktion. *Blau*: arctan spiegelt vom III. in den I. Quadranten; es muss mit  $-\pi$  korrigiert werden. *Rot*: Spiegelung vom II. in den IV. Quadranten und Korrektur um  $\pi$



Für diesen zweiten Fall wäre im geforderten Wertebereich der korrekte Winkel  $\pi/4 - \pi = -3/4 \pi$ , es muss also  $\pi$  abgezogen werden (2. Zeile aus (2.15)).

Liegt hingegen ein Punkt im II. Quadranten vor (in Abb. 2.12 der rote Punkt oben links), so muss der mit dem arctan berechnete Winkel um  $+\pi$  korrigiert werden (3. Zeile aus (2.15)). Daher erweitert man den Arkustangens zum 4-Quadrant Arkustangens und schreibt dafür *arctan2*. Dieser liefert für alle Quadranten korrekte Winkel. Damit der tatsächlich vorliegende Quadrant ermittelt werden kann, wird als Argument nicht mehr nur der Quotient  $y/x$ , sondern es werden beide Werte separat übergeben:  $\text{arctan2}(x, y)$ .

Leider existiert kein Standard zur Reihenfolge der Argumente. In manchen Büchern, Formelmanipulationsprogrammen und Programmbibliotheken findet man auch die umgedrehte Reihenfolge der Argumente.

Für den geforderten Wertebereich  $-\pi < \theta \leq \pi$  ergibt sich so folgende Funktionsvorschrift:

$$\theta = \text{arctan2}(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0 \wedge y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = y = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Mit Hilfe der 4-Quadrant Arkustangens-Funktion ergibt sich das oben gestellte Umkehrproblem zu (2.14) schließlich zu

$$\theta = \begin{cases} \arctan2(r_{11}, r_{21}) & \text{für } r_{11} \neq 0 \wedge r_{21} \neq 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Im unteren Fall liegt der Punkt im Ursprung und es ist anschaulich klar, dass dafür kein Drehwinkel angegeben werden kann.

**Beispiel 2.11.** Für Rotationsmatrix

$$\tilde{R}_{ik} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

aus Beispiel 2.10 erhält man nach (2.16) Drehwinkel

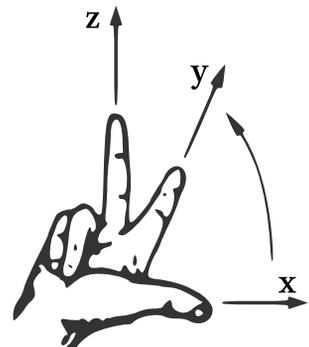
$$\theta = \arctan2(1/2, \sqrt{3}/2) = \arctan2(1, \sqrt{3}) \stackrel{\text{(wegen } x > 0 \text{ aus (2.15))}}{=} \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ. \quad \triangleleft$$

### 2.3.2 Elementar-Rotationen im 3D

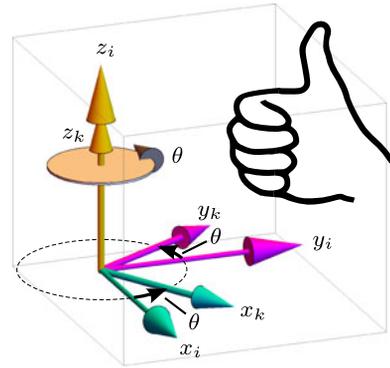
Die bisherigen Betrachtungen zu Rotationsmatrizen in der Ebene werden von nun an auf den Raum erweitert. Durch Ergänzung des  $x$ - $y$ -Koordinatensystems um eine dritte Dimension zu einem *Rechtssystem* kann die Rotation aus Abb. 2.11 als eine Rotation um die  $z$ -Achse interpretiert werden. Bei einem *Rechtssystem* zeigen die ersten drei ausgestreckten Finger der *rechten* Hand in Richtung der Koordinatenachsen (sogenannte *Rechte-Hand-Regel*), siehe Abb. 2.13.

Wie in Abb. 2.14 dargestellt, gilt bei Rechtssystemen die *Schraubenregel*: Zeigen die Finger der rechten Hand in Drehrichtung, so zeigt der Daumen in Richtung der Drehachse.

**Abb. 2.13** Die ersten drei ausgestreckten Finger der rechten Hand zeigen in Richtungen der Basisvektoren eines Rechtssystems



**Abb. 2.14** Elementar-Rotation um die  $z$ -Achse: Erweiterung von Abb. 2.11 um die  $z$ -Dimension. Die Drehrichtung kann durch die Schraubenregel bestimmt werden. Das rotierte Koordinatensystem  $S_k$  ist zur besseren Unterscheidung gegenüber  $S_i$  mit kürzeren Achsen dargestellt



Damit legt die Drehachse nicht nur die Lage der Drehebene (im Beispiel die  $x$ - $y$ -Ebene) fest, sondern auch die Zählrichtung des Drehwinkels.

Bei 3D-CAD-Systemen hat sich ein Standard zur Farbkodierung der Achsen eines 3D-Koordinatensystems herausgebildet. Diesem Standard folgen die Darstellungen des vorliegenden Buches:

- $x$ -Achse: cyan (blaugrün)
- $y$ -Achse: magenta (purpur)
- $z$ -Achse: goldgelb

2D-Rotationsmatrix (2.14) erweitert sich damit um eine Dimension auf 3D-Rotationsmatrix

$$\tilde{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17a)$$

Index  $z$  kennzeichnet dabei die Rotationsachse. Da sich durch diese Rotation die  $x$ - und  $y$ -Werte gemäß (2.14) verändern, muss die linke obere  $2 \times 2$ -Teilmatrix aus (2.17a) mit (2.14) identisch sein. Der  $z$ -Wert bleibt bei der betrachteten Rotation unverändert. Daher muss das 33-Element mit 1 belegt sein und die restlichen Elemente der 3. Spalte und 3. Zeile müssen verschwinden.

Eine Rotation um nur eine Koordinatensystem-Achse bezeichnet man als *Elementar-Rotation*.

Im Folgenden werden die in der Robotik üblichen Abkürzungen

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta$$

verwendet. Dabei kann die Bezeichnung des Winkels variieren (anstelle von  $\theta$  zum Beispiel  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc.). Welcher Winkel gemeint ist, geht aus dem Kontext hervor.

Elementar-Rotationsmatrizen um die  $x$ - und  $y$ -Achse lassen sich aus der Elementar-Rotation um die  $z$ -Achse leicht herleiten: Abb. 2.15 zeigt links die Rotation um die  $x$ -Achse. Ein Vergleich der Rotationsebenen aus Abb. 2.14 und Abb. 2.15 ergibt: Die  $x$ - und  $y$ -Achse aus Abb. 2.14 wird durch die  $y$ - und  $z$ -Achse aus Abb. 2.15 ersetzt. Für eine Drehung in der  $y$ - $z$ -Ebene gilt wieder Rotationsmatrix (2.14). Durch Erweiterung um die  $x$ -Dimension folgt damit analog zur Drehung um die  $z$ -Achse als Rotationsmatrix:

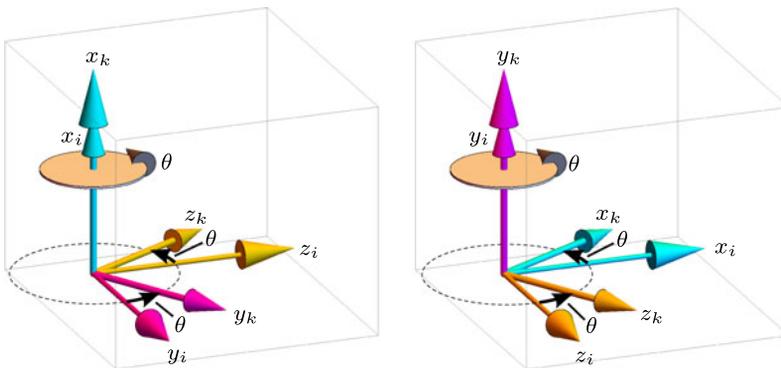
$$\tilde{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}. \quad (2.17b)$$

Die elementare Rotation um die  $y$ -Achse illustriert Abb. 2.15 rechts. In diesem Fall wird die  $y$ - und  $x$ -Achse durch die  $x$ - und  $z$ -Achse ersetzt. Dieser Tausch ergibt mit (2.14) 2D-Rotationsmatrix

$$\begin{pmatrix} z^k \\ x^k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z^i \\ x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c z^i - s x^i \\ s z^i + c x^i \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x^k \\ z^k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ z^i \end{pmatrix}.$$

Ergänzt man die  $y$ -Dimension, folgt schließlich die gesuchte letzte elementare Rotationsmatrix

$$\tilde{R}_y = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix}. \quad (2.17c)$$



**Abb. 2.15** Elementar-Rotationen; links um die  $x$ -Achse, rechts um die  $y$ -Achse

Ein Vergleich der drei Elementar-Rotationsmatrizen ergibt folgende Bildungsregel: Das Diagonalelement beträgt an der Position der Drehachse stets 1; die zugehörige Zeile und Spalte wird mit Nullen aufgefüllt. Für die verbleibende  $2 \times 2$ -Untermatrix gilt: Die Diagonalelemente betragen stets  $\cos \theta$ ; die verbleibenden (nichtdiagonalen) Elemente bilden sich immer aus  $\sin \theta$  und  $-\sin \theta$ , wobei die Vorzeichenreihenfolge von  $\tilde{R}_y$  gegenüber  $\tilde{R}_x$  und  $\tilde{R}_z$  variiert.

### 2.3.3 Verkettete Rotationen und allgemeine Eigenschaften von Rotationsmatrizen

Hintereinander ausgeführte Rotationen führen zum Produkt der Rotationsmatrizen. Soll beispielsweise  $S_1$  durch eine Drehung  $\tilde{R}_{01}$  aus dem Weltkoordinatensystem  $S_0$  hervorgehen, so folgt für die Darstellung eines Vektors  $v$

$$v^0 = \tilde{R}_{01} v^1.$$

Eine anschließende zweite Drehung mit Rotationsmatrix  $R_{12}$  dreht das  $S_1$ -Koordinatensystem in ein neues Koordinatensystem  $S_2$ :

$$v^1 = \tilde{R}_{12} v^2.$$

Setzt man  $v^1$  in die erste Transformationsvorschrift ein, so erhält man

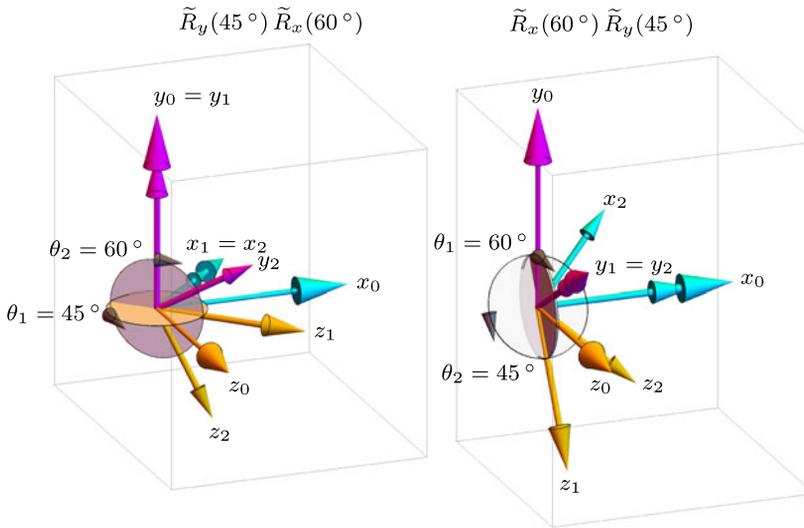
$$v^0 = \tilde{R}_{01} \tilde{R}_{12} v^2 = \tilde{R}_{02} v^2.$$

Die beiden hintereinander ausgeführten Rotationen ergeben also das Produkt  $\tilde{R}_{02}$ . Dies soll am Beispiel  $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_y(45^\circ)$ ,  $\tilde{R}_2 = \tilde{R}_x(60^\circ)$  veranschaulicht werden:

**Beispiel 2.12.** Abb. 2.16 links zeigt Drehreihenfolge  $\tilde{R}_1 \tilde{R}_2$ . Zunächst wird  $S_1$  aus  $S_0$  mit einer Drehung um die  $y$ -Achse um Drehwinkel  $\theta_1 = 45^\circ$  herausgedreht. Die zugehörige Drehebene wird dabei durch die horizontal liegende Kreisscheibe illustriert. Bei dieser Drehung ändert sich die  $y$ -Achse nicht, wohingegen die  $z_1$ - und  $x_1$ -Achse nach links verdreht werden.

Die anschließende Drehung erfolgt um die  $x_1$ -Achse. Die zugehörige Drehebene wird diesmal durch die vertikal stehende Kreisscheibe illustriert. Da um die  $x_1$ -Achse gedreht wird, ändert sich  $x_1$  nicht, während die  $y_1$ - und  $z_1$ -Achse nach rechts gedreht werden. Die zweite Drehung bezieht sich also auf die Orientierung von  $S_1$ .  $\triangleleft$

Aus diesem Beispiel kann man folgende allgemeine Regel ableiten:



**Abb. 2.16** Verkettete Rotationen: Drehmatrizen sind hinsichtlich der Multiplikation nicht kommutativ

### Regel für hintereinander ausgeführte bzw. verkettete Rotationen:

Die bei einem Produkt

$$\tilde{R}_1 \tilde{R}_2$$

zweier Rotationsmatrizen links stehende Rotationsmatrix  $\tilde{R}_1$  stellt immer die Bezugsorientierung für die rechts stehende Rotationsmatrix  $\tilde{R}_2$  dar. Mit anderen Worten:  $\tilde{R}_2$  dreht sich bezogen auf die in  $\tilde{R}_1$  enthaltenen Achsen.

Denkt man sich links von  $\tilde{R}_1$  noch eine Einheitsmatrix (als Orientierung  $\tilde{R}_{00} = \tilde{E}$  des Weltkoordinatensystems) hinzu, so dreht nach obiger Regel  $\tilde{R}_1$  bezogen auf die Achsen des Weltkoordinatensystems.

Aus obiger Regel ergeben sich zwei unterschiedliche Vorgehensweisen zur Rotation:

1. Rotation im *bewegten* Bezugssystem: Wird  $\tilde{R}_2$  von *rechts* gemäß

$$\tilde{R}_{00} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 \tilde{R}_2$$

auf  $\tilde{R}_1$  multipliziert, so dreht  $\tilde{R}_2$  bezüglich der Orientierung der Achsen von  $\tilde{R}_1$ . Der Pfeil kennzeichnet dabei die Multiplikationsrichtung. Wegen  $\tilde{R}_{00} = \tilde{E}$  kann  $\tilde{R}_{00}$  weggelassen werden.

2. Rotation im *festen* Bezugssystem Weltkoordinaten: Wird  $\tilde{R}_2$  von *links* gemäß

$$\tilde{R}_{00} \underset{\rightarrow}{\tilde{R}_2} \tilde{R}_1 = \underset{\rightarrow}{\tilde{R}_2} \tilde{R}_1$$

auf  $\tilde{R}_1$  multipliziert, so dreht  $\tilde{R}_2$  bezüglich der Orientierung der Achsen von  $\tilde{R}_{00}$  (also der Achsen des Weltkoordinatensystems).

*Hinweise:*

- Im Allgemeinen gilt bei Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz nicht, so dass

$$\tilde{R}_1 \tilde{R}_2 \neq \tilde{R}_2 \tilde{R}_1 .$$

Dies ist anschaulich klar: Die Reihenfolge von Drehungen spielt eine Rolle! Um dies zu illustrieren, zeigt das rechte Teilbild von Abb. 2.16 die umgekehrte Drehreihenfolge wie das linke Teilbild. Man erkennt deutlich die unterschiedlichen Orientierungen des jeweils resultierenden Koordinatensystems  $S_2$ .

- Rotationen um feste Achsen liefern dieselbe Endorientierung wie dieselben Rotationen in umgekehrter Reihenfolge in bewegten Achsen.

**Beispiel 2.13.** mit drei Rotationen:

Rotation in festen Achsen (Multiplikation von links):

1. Rotation  $\tilde{R}_1$  bezogen auf  $S_0$ :  $\tilde{E} \tilde{R}_1$
2. Rotation  $\tilde{R}_2$  bezogen auf  $S_0$ :  $\tilde{E} \underset{\rightarrow}{\tilde{R}_2} \tilde{R}_1$
3. Rotation  $\tilde{R}_3$  bezogen auf  $S_0$ :  $\tilde{E} \underset{\rightarrow}{\tilde{R}_3} \underset{\rightarrow}{\tilde{R}_2} \tilde{R}_1 = \tilde{R}_3 \tilde{R}_2 \tilde{R}_1$

Rotation in umgekehrter Reihenfolge in bewegten Achsen (Multiplikation von rechts):

1. Rotation  $\tilde{R}_3$  bezogen auf  $S_0$ :  $\tilde{E} \tilde{R}_3 = \tilde{R}_3$
2. Rotation  $\tilde{R}_2$  bezogen auf  $S_3$ :  $\tilde{R}_3 \overset{\leftarrow}{\tilde{R}_2}$
3. Rotation  $\tilde{R}_1$  bezogen auf  $S_2$ :  $\tilde{R}_3 \overset{\leftarrow}{\tilde{R}_2} \overset{\leftarrow}{\tilde{R}_1}$  ◀

Allgemeine Eigenschaften von Rotationsmatrizen:

- Zeilen- und Spaltenvektoren sind auf 1 normiert und stehen senkrecht aufeinander (*orthonormale* Matrix). Aus dem Skalarprodukt der Basisvektoren folgt damit

$$\tilde{R} \tilde{R}^T = \tilde{E} .$$

Multipliziert man beide Seiten von links mit  $\tilde{R}^{-1}$ , so folgt daraus die wichtige Eigenschaft

$$\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}^T \implies \tilde{R}_{ki} = \tilde{R}_{ik}^{-1} = \tilde{R}_{ik}^T.$$

Dies bestätigt das frühere Resultat (2.8) bei 2D-Rotationen.

- Wegen

$$\tilde{R} \tilde{R}^T \stackrel{!}{=} \tilde{E} \implies \text{Det}(\tilde{R} \tilde{R}^T) = \text{Det}(\tilde{R})^2 \stackrel{!}{=} \text{Det}(\tilde{E}) = 1$$

gilt für jede Rotationsmatrix

$$\text{Det}(\tilde{R}) = \pm 1.$$

- Eine orthonormale  $3 \times 3$ -Matrix ist genau dann eine Rotationsmatrix, wenn deren Determinante 1 beträgt. Dies folgt daraus, dass drei Basisvektoren  $e_x, e_y, e_z$  genau dann ein Rechtssystem bilden, wenn

$$\text{Det}([e_x \ e_y \ e_z]) = 1.$$

Einen formal geführten Beweis findet der besonders interessierte Leser in [5, Abschn. 6.6.8]: „Die orthogonale Gruppe“.

Bei Rotationen mit Drehwinkeln, die ein Vielfaches von  $90^\circ$  betragen, kann die Rotationsmatrix graphisch ermittelt werden. Hierzu liest man die Koordinaten der Basisvektoren in Bezugskordinaten aus der graphischen Anordnung der Koordinatensysteme ab. Da der Drehwinkel auf Vielfache von  $90^\circ$  beschränkt ist, bestehen deren Koordinaten nur aus  $\{0, \pm 1\}$ .

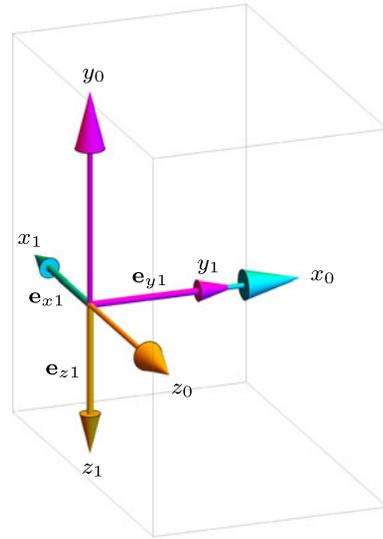
**Beispiel 2.14.** Graphische Bestimmung von Rotationsmatrizen:

Koordinatensystem  $S_1$  sei wie in Abb. 2.17 dargestellt, rechtwinklig gegenüber dem Weltkoordinatensystem verdreht. Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{01}$  kann graphisch ermittelt werden, indem man die Koordinaten von  $e_{x1}, e_{y1}$  und  $e_{z1}$  in  $S_0$ -Koordinaten aus der Darstellung abliest und diese zu einer Rotationsmatrix zusammenfasst:

$$\tilde{R}_{01} = [e_{x1}^0 \ e_{y1}^0 \ e_{z1}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \triangleleft$$

Man kann jede Rotationsmatrix und damit Orientierung eines Körpers durch drei verkettete Rotationen um linear unabhängige Achsen erzeugen. Je nach Reihenfolge und Wahl dieser Drehachsen existieren unendlich viele Möglichkeiten zur Bildung der Rotationsmatrix. Der nächste Abschnitt behandelt davon eine in der Robotik weit verbreitete Konvention, nämlich die Euler-Winkel-Darstellung.

**Abb. 2.17** Sonderfall von Beispiel 2.14: Drehung um rechte Winkel

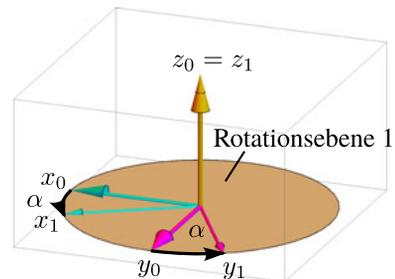


### 2.3.4 Orientierung durch ZYZ Euler-Winkel

Die *ZYZ Euler-Winkel-Konvention* besteht aus drei hintereinander ausgeführten Drehungen in den jeweils gedrehten Achsen. Die Bezeichnung ZYZ kennzeichnet dabei die Reihenfolge der Drehachsen: Erste Drehung um die  $z_0$ -Achse, zweite Drehung um die  $y_1$ -Achse, dritte Drehung um die  $z_2$ -Achse. Bei Euler-Drehungen werden die Drehwinkel stets mit  $\alpha$  (1. Drehung),  $\beta$  (2. Drehung) und  $\gamma$  (3. Drehung) bezeichnet. Um die Wirkung einer Euler-Drehung zu illustrieren, wird im Folgenden jede Drehung einzeln dargestellt:

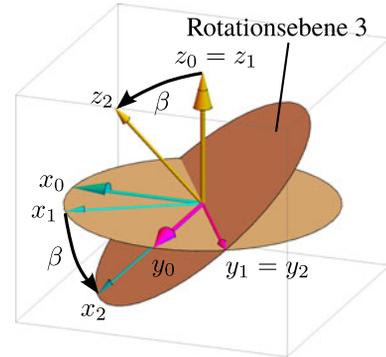
$S_1$  ergibt sich aus einer Rotation von  $S_0$  um die  $z_0$ -Achse um Drehwinkel  $\alpha$ , siehe Abb. 2.18<sup>5</sup>.

**Abb. 2.18** ZYZ Euler-Drehung 1:  $\alpha = 30^\circ$

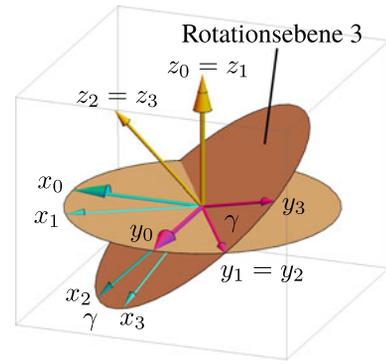


<sup>5</sup> Die Darstellung mit Rotationsebenen und Aufteilung in drei Schritten ist von der Idee her von [4, S. 119] übernommen.

**Abb. 2.19** ZYZ Euler-Drehung 2:  $\beta = 40^\circ$



**Abb. 2.20** ZYZ Euler-Drehung 3:  $\gamma = 30^\circ$



Die Drehung mit Drehachse  $z_0$  erfolgt in der durch einen ausgefüllten Kreis markierten Rotationsebene 1.  $S_2$  ergibt sich aus einer Rotation von  $S_1$  um die  $y_1$ -Achse um Drehwinkel  $\beta$ , siehe Abb. 2.19. Nun ist  $y_1$  die Drehachse. Rotationsebene 2 ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt. Rotationsebene 1 (aus vorangegangenem Schritt) geht bei dieser Drehung in Rotationsebene 3 über.  $S_3$  ergibt sich aus einer Rotation von  $S_2$  um die  $z_2$ -Achse um Drehwinkel  $\gamma$ , siehe Abb. 2.20. Die letzte Drehachse ist  $z_2$ . Diese bewirkt eine Drehung in Rotationsebene 3 der Achsen  $x_2 \rightarrow x_3$  und  $y_2 \rightarrow y_3$ .

Die aus diesen drei Einzelrotationen entstehende Gesamtrotaion ist beispielhaft in Abb. 2.21 auf einen Zangenkörper angewendet. Zur Berechnung der Rotationsmatrix dieser Gesamtrotaion muss von rechts aufmultipliziert werden, da jeweils eine Rotation in bewegten Achsen vorliegt. So erhält man

$$\tilde{R}_{03}(\alpha, \beta, \gamma) = \tilde{R}_z(\alpha) \tilde{R}_y(\beta) \tilde{R}_z(\gamma)$$

und nach einigen elementaren mathematischen Umformungen weiter:

$$\tilde{R}_{03}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Hierfür ist in der Robotik die Bezeichnung

$$\text{Euler323}(\alpha, \beta, \gamma) = \tilde{R}_{03}(\alpha, \beta, \gamma)$$

üblich. Alternativ findet sich auch oft Schreibweise EulerZYZ.

Durch Vorgabe der Euler-Winkel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  kann jede beliebige Orientierung im Raum beschrieben werden. Oft ist dafür die Umkehraufgabe gefragt: Welche Euler-Winkel führen zu einer vorgegebenen Orientierung  $\tilde{R}$ ?

Eine Funktion, die diese Aufgabenstellung löst, wird umgangssprachlich als *inverser Euler* bezeichnet. Man schreibt:

$$\text{InvEuler323}(\tilde{R}) = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Eingangsgröße dieser Funktion ist Rotationsmatrix  $\tilde{R}$  mit Zahlenwerten. Für die Euler-Drehung aus Abb. 2.18–2.20 wäre dies beispielsweise

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.324533 & -0.76472 & 0.55667 \\ 0.76472 & 0.558489 & 0.321394 \\ -0.55667 & 0.321394 & 0.766044 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Durch einen geschickten Vergleich dieser numerischen Rotationsmatrix mit (2.18) kann man unter bestimmten Bedingungen die Euler-Winkel berechnen. Um dies für den allgemeinen Fall herzuleiten, wird eine Rotationsmatrix mit allgemein gehaltenen Einträgen  $r_{ij}$  betrachtet:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Mit dem 31- und 32-Element aus (2.18) ergibt sich

$$\begin{aligned} r_{31}^2 + r_{32}^2 &= (-s_\beta c_\gamma)^2 + (s_\beta s_\gamma)^2 = s_\beta^2 (c_\gamma^2 + s_\gamma^2) = s_\beta^2 \\ \implies s_{\beta_{1,2}} &= \pm \sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2} \end{aligned}$$

Dabei und im gesamten folgenden Text gilt bei Fallunterscheidungen immer Index 1 für das obere Vorzeichen, Index 2 für das untere. So folgen die gesuchten Euler-Winkel zu:

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \arctan 2 \left( r_{33}, \pm \sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2} \right) \\ \text{für } \beta \notin \{0, \pi\}: \quad \alpha_{1,2} &= \arctan 2 \left( \frac{r_{13}}{s_{\beta 1,2}}, \frac{r_{23}}{s_{\beta 1,2}} \right) \\ \text{für } \beta \notin \{0, \pi\}: \quad \gamma_{1,2} &= \arctan 2 \left( -\frac{r_{31}}{s_{\beta 1,2}}, \frac{r_{32}}{s_{\beta 1,2}} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

**Sonderfall  $\beta \in \{0, \pi\}$ :** Eingesetzt folgt für die Rotationsmatrix

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \stackrel{(2.18), \beta \in \{0, \pi\}}{=} \begin{bmatrix} \pm c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\gamma \mp c_\alpha s_\gamma & 0 \\ \pm s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\gamma \mp s_\alpha s_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Additionstheoreme führen zur vereinfachten Form

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \pm c_{\alpha \pm \gamma} & -s_{\alpha \pm \gamma} & 0 \\ \pm s_{\alpha \pm \gamma} & c_{\alpha \pm \gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

mit oberem Vorzeichen für  $\beta = 0$  und unterem Vorzeichen für  $\beta = \pi$ . Zum Test, ob der Sonderfall vorliegt, dient das 33-Element:

$$\begin{aligned} r_{33} = 1 &\implies \beta = 0 \text{ und } \alpha + \gamma \text{ bestimmbar} \\ r_{33} = -1 &\implies \beta = 180^\circ \text{ und } \alpha - \gamma \text{ bestimmbar} \end{aligned}$$

mit

$$\alpha \pm \gamma = \arctan 2 \left( r_{22}, -r_{12} \right). \quad (2.22)$$

Siehe Aufgabe 2.5 für eine Realisierung in Form eines Nassi-Shneiderman-Strukto-gramms.

Geometrische Interpretation des Sonderfalls: Die Drehachsen für  $\alpha$  und  $\gamma$  sind kollinear (fallen aufeinander) – lediglich die Richtung unterscheidet sich für  $\beta = \pi$ . Damit ist also im Fall  $\beta = 0$  nur Summe  $\alpha + \gamma$  definiert; im Fall  $\beta = \pi$  nur Differenz  $\alpha - \gamma$ .

Man bezeichnet diese beiden Sonderfälle  $\beta \in \{0, \pi\}$  als *Euler-Singularität*. Es wird weiter unten gezeigt, dass die zugehörige Jacobi-Matrix in diesem Punkt singulär (Determinante Null) wird; daraus leitet sich der Name ab. Das Besondere ist, dass hier die Orientierung nur durch die zwei Drehwinkel  $\beta$  sowie  $\alpha \pm \gamma$  beeinflusst werden kann.

Obwohl immer noch *drei* Drehwinkel zur Verfügung stehen, können damit also nur *zwei* Orientierungsachsen eingestellt werden.

**Anmerkung 2.1.** zur numerischen Stabilität: Bei der numerischen Berechnung der Euler-Winkel können schon kleine Rundungsfehler von Zwischenergebnissen zu signifikanten Fehlern im Endergebnis führen.  $\square$

**Beispiel 2.15.** Berechnung von ZYZ Euler-Winkeln:

Die ZYZ Euler-Drehung nach Abb. 2.18–2.20 führe zur Orientierung eines Greifers wie in Abb. 2.21 dargestellt. Die zugehörige Rotationsmatrix liege mit (2.19) vor. Gesucht sind die ZYZ Euler-Winkel. Wegen  $|r_{33}| = 0.766044 \neq 1$  liegt keine Euler-Singularität vor. Aus (2.21) folgt:

$$\begin{aligned}\beta_{1,2} &= \arctan2\left(r_{33}, \pm\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}\right) = \arctan2\left(0.766044, \pm\sqrt{0.55667^2 + 0.321394^2}\right) \\ &= \arctan2(0.766044, \pm 0.642788) \stackrel{\text{(positiver } x\text{-Anteil in (2.15))}}{=} \pm \arctan \frac{0.642788}{0.766044} \\ &= \pm \arctan 0.8391 = \pm 40^\circ\end{aligned}$$

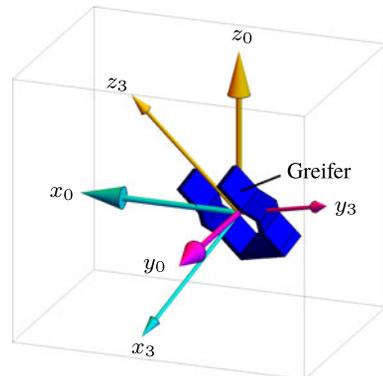
Damit kann  $s_{\beta_{1,2}}$  und weiter  $\alpha, \gamma$  berechnet werden:

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= \arctan2\left(\frac{0.55667}{\pm \sin 40^\circ}, \frac{0.321394}{\pm \sin 40^\circ}\right) = \arctan2(\pm 0.55667, \pm 0.321394) \\ &\stackrel{(2.15)}{=} \begin{cases} \arctan \frac{0.321394}{0.55667} = 30^\circ & \text{für Fall 1} \\ \arctan \frac{0.321394}{0.55667} - 180^\circ = -150^\circ & \text{für Fall 2} \end{cases}\end{aligned}$$

Da  $r_{13} = r_{31}$  und  $r_{23} = r_{32}$  gilt  $\gamma = \alpha$ .

Zusammengefasst ergeben sich also folgende zwei Sätze an ZYZ Euler-Winkeln:  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(30^\circ, 40^\circ, 30^\circ), (-150^\circ, -40^\circ, -150^\circ)\}$ .  $\triangleleft$

**Abb. 2.21** ZYZ Euler-Drehung eines Greifer-Körpers nach Abb. 2.18–2.20



**Beispiel 2.16.** Für Rotationsmatrix

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.34202 & -0.939693 & 0 \\ 0.939693 & 0.34202 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sollen die ZYZ Euler-Winkel berechnet werden. Hierzu folgt aus  $r_{33} = 1$  zunächst  $\beta = 0$ . Damit liegt die Euler-Singularität vor und es kann nur Summe  $\alpha + \gamma$  berechnet werden. Diese ergibt sich aus (2.22) zu

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \arctan2(r_{22}, -r_{12}) = \arctan2(0.34202, 0.939693) = \arctan \frac{0.939693}{0.34202} \\ &= \arctan 2.74748 = 70^\circ. \end{aligned}$$

Mögliche Lösungen für  $\alpha$  und  $\gamma$  sind damit  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 70^\circ$  oder  $\alpha = 35^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$  etc. Es existieren unendlich viele Lösungen, die alle die Eigenschaft besitzen, dass ihre Summe  $\alpha + \gamma$  den Wert  $70^\circ$  betragen muss.

Bei einer zweiten Rotationsmatrix

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} -0.984808 & -0.173648 & 0 \\ -0.173648 & 0.984808 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

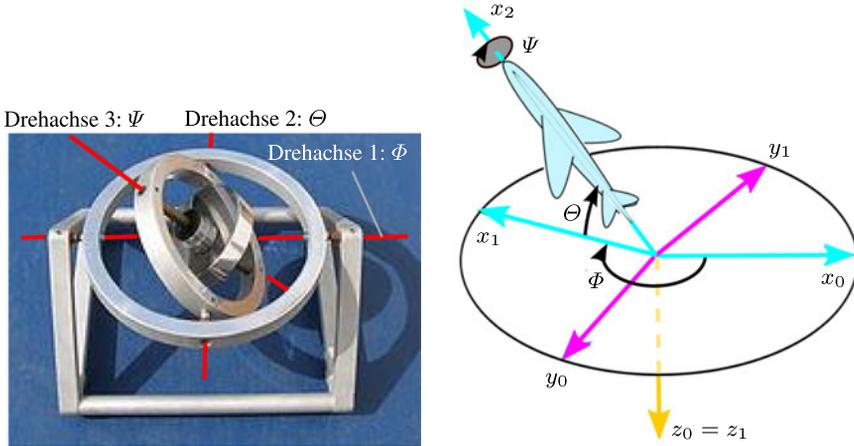
liegt wegen  $r_{33} = -1$  ebenfalls eine Euler-Singularität vor; diesmal jedoch für  $\beta = 180^\circ$ , so dass nur Differenz  $\alpha - \gamma$  berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \alpha - \gamma &= \arctan2(r_{22}, -r_{12}) = \arctan2(0.984808, 0.173648) = \arctan \frac{0.173648}{0.984808} \\ &= \arctan 0.173627 = 10^\circ. \end{aligned}$$

<

### 2.3.5 Alternative Drehwinkel-Darstellungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde dargestellt, dass Rotationsmatrizen und Euler-Winkel jeweils die Orientierung eines Körpers spezifizieren können. Dazu alternative Möglichkeiten sind:



**Abb. 2.22** Beispiele für ZYX Euler-Winkel. *Links*: Kardanische Aufhängung; *rechts*: Darstellung der Orientierung eines Flugzeugs mit Euler321( $\Phi, \Theta, \Psi$ )

- Drehung in bewegten Achsen: *Kardan-Winkel*, gleichbedeutend mit ZYX Euler-Winkeln und *RPY-Winkeln* (roll – rollen, pitch – nicken, yaw – gieren):

$$\begin{aligned}
 \text{Euler321}(\alpha, \beta, \gamma) &= \tilde{R}_z(\alpha) \tilde{R}_y(\beta) \tilde{R}_x(\gamma) \\
 &\quad \leftarrow \text{(Multiplikationsrichtung)} \\
 &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Anwendungen der ZYX Euler-Winkel finden sich oft in der Fahrzeugtechnik sowie Avionik zur Beschreibung der Orientierung des Fahrzeugs bzw. des Flugkörpers, siehe Abb. 2.22<sup>6</sup>. Bei Landfahrzeugen finden sich für die elementaren Drehungen oft auch folgende synonyme Bezeichnungen:

- Nicken bzw. Neigen: Drehung um die Fahrzeugquerachse
- Gieren bzw. Schleudern: Drehung um die Fahrzeughochachse
- Rollen bzw. Kippen: Drehung um die Fahrzeuglängsachse

Insgesamt existieren 12 unterschiedliche Darstellungsformen der Orientierung eines Körpers im 3D durch Euler-Drehung, siehe Appendix B in [2].

<sup>6</sup> Quelle von Abb. 2.22 (rechts): Überarbeitete Version von <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plane.svg#mediaviewer/File:Plane.svg>, erstellt von Juansempere at en.wikipedia. Freigegeben unter Creative-Commons-Lizenz 3.0 nicht portiert – Weitergabe unter gleichen Bedingungen, Link zuletzt überprüft am 17.11.2019.

Die Anzahl der 12 möglichen Darstellungsformen ergibt sich aus folgender kombinatorischer Überlegung: Die drei Drehachsen werden hintereinander in einem sogenannten 3-er-Tupel angeordnet. Für die erste Stelle dieses Tupels kommen drei mögliche Besetzungen  $x, y, z$  in Frage. An der zweiten Stelle des Tupels darf nicht der Eintrag der ersten Stelle wiederholt werden, da ja nicht zweimal um dieselbe Achse gedreht werden darf. Damit liegen hier zwei Möglichkeiten vor. Bei der dritten Stelle gilt dasselbe wie bei der zweiten Stelle. So folgt die Zahl möglicher Besetzungen des 3-er-Tupels zu:  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ .

- Drehung um feste Achsen mit Drehreihenfolge:
  1.  $S_1$  ergibt sich aus einer Rotation von  $S_0$  um die  $x_0$ -Achse um Winkel  $\alpha$
  2.  $S_2$  ergibt sich aus einer Rotation von  $S_1$  um die  $y_0$ -Achse um Winkel  $\beta$
  3.  $S_3$  ergibt sich aus einer Rotation von  $S_2$  um die  $z_0$ -Achse um Winkel  $\gamma$
 Dafür verwendet man Konvention

$$\text{Fix123}(\alpha, \beta, \gamma) = \underbrace{\tilde{R}_z(\gamma) \tilde{R}_y(\beta) \tilde{R}_x(\alpha)}_{\text{(Multiplikationsrichtung)}}$$

Dabei ist die Reihenfolge der Matrix-Multiplikationen zu beachten:

- Bislang behandelte Euler-Drehungen: Aufmultiplikation von *rechts*, da Drehungen in bewegten Achsen.
- Beim vorliegenden Fall einer Drehung um feste Achsen muss von links her aufmultipliziert werden.

Nach der *Regel für verkettete Rotationen* aus Abschn. 2.3.3 folgt: Drei Rotationen um feste Achsen ergeben dieselbe Endorientierung wie dieselben Rotationen in umgekehrter Reihenfolge um die bewegten Achsen. Vergleicht man  $\text{Fix123}(\alpha, \beta, \gamma)$  mit

$$\text{Euler321}(\gamma, \beta, \alpha) = \underbrace{\tilde{R}_z(\gamma) \tilde{R}_y(\beta) \tilde{R}_x(\alpha)}_{\text{(Multiplikationsrichtung)}}$$

so folgt

$$\text{Fix123}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{Euler321}(\gamma, \beta, \alpha).$$

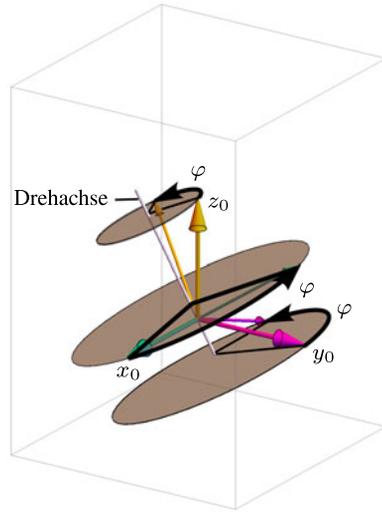
- Drehung um eine *äquivalente Drehachse* (*äquivalente Drehung*). Für eine gegebene Rotationsmatrix  $\tilde{R} = [r_{ij}]$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  kann man zum Beispiel nach [5, Kap. 6.6.4c], eine äquivalente Drehachse mit Richtungsvektor  $\mathbf{d}$  und zugehörigem Drehwinkel  $0 \leq \varphi \leq \pi$  nach folgendem Schema berechnen:

$$\text{Drehwinkel: } \cos \varphi = \frac{1}{2} (r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1).$$

Der Richtungsvektor bestimmt sich dabei zu

$$\|\mathbf{d}\| = 1 \wedge \mathbf{d} : \begin{cases} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} & \text{für } \varphi \neq \pi \\ (\tilde{R} - \tilde{E}) \mathbf{d} = \mathbf{0} & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Abb. 2.23** Darstellung der ZYZ Euler-Drehung aus Beispiel 2.15 mittels äquivalenter Drehung. Kreisflächen visualisieren die Rotationsebenen. Die Achsen  $x_3, y_3, z_3$  sind mit dünneren Vektoren gegenüber den Achsen von  $S_0$  hervorgehoben.



**Beispiel 2.17.** Durch eine Euler-Drehung Euler323( $65^\circ, -40^\circ, 30^\circ$ ) ergibt sich Rotationsmatrix

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} -0.172783 & -0.946758 & -0.271654 \\ 0.812566 & 0.0188621 & -0.582563 \\ 0.55667 & -0.321394 & 0.766044 \end{bmatrix}.$$

Dafür berechnet sich der Richtungsvektor der äquivalenten Drehachse zu

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0.133112 \\ -0.422178 \\ 0.896687 \end{pmatrix}$$

mit Drehwinkel

$$\varphi = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \approx \arccos(-0.193938) \approx 101.183^\circ.$$

Abb. 2.23 zeigt das rotierte Koordinatensystem  $S_3$  im Weltkoordinatensystem  $S_0$ . Zusätzlich sind die drei Drehebene eingetragen, in denen die Endpunkte der jeweiligen Einheitsvektoren liegen. Man erkennt, dass mit einer einzigen Drehung die Einheitsvektoren aufeinander abgebildet werden. <

- Die drei Koordinaten der äquivalenten Drehachse zusammen mit dem zugehörigen Drehwinkel können zu einem 4D-Vektor zusammengefasst werden. Dies kann im komplexen Zahlenbereich mit sogenannten *Quaternionen* (besonders in der Avionik gebräuchlich) dargestellt werden. Eine Rotation ergibt sich dann durch Multiplikationen solcher Quaternionen. Der Vorteil gegenüber Euler-Drehungen ist: Es tritt keine

Euler-Singularität auf. Ein höherer mathematischer Abstraktionsgrad sowie ein weitgehender Verlust der Anschaulichkeit von Rotationen sind wohl der Grund dafür, dass sich diese Methode in der Robotik bislang nicht durchgesetzt hat.

- Eine weitere Methode zur Darstellung einer Rotation basiert auf dem Konzept der Matrix-Exponentiellen<sup>7</sup>, so dass man von *exponentiellen Koordinaten* spricht. Man kann zeigen, dass jede Rotationsmatrix  $\tilde{R}$  durch eine äquivalente Drehachse mit Richtungsvektor  $\tilde{d}$  und Drehwinkel  $\vartheta$  durch

$$\tilde{R} = e^{\tilde{D}\vartheta} = \tilde{E} + \tilde{D} \sin \vartheta + \tilde{D}^2 (1 - \cos \vartheta)$$

dargestellt werden kann, wobei

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

eine schiefsymmetrische<sup>8</sup> Matrix darstellt. Sie ist so konstruiert, dass damit das Kreuzprodukt durch eine Matrix-Multiplikation ausgedrückt werden kann:  $\tilde{d} \times \mathbf{x} = \tilde{D} \mathbf{x}$ . Diese Darstellungsmethode bietet denselben Vorteil wie die Quaternionen-Darstellung: Es tritt keine Euler-Singularität auf. So wird in [6, Abschn. 2.1–2.2] die Kinematik basierend auf dieser Darstellung entwickelt.

---

## 2.4 Modellbildung der Kinematik

Mit den vorangegangenen Abschnitten liegen die wichtigsten Werkzeuge zur Modellbildung der Kinematik vor: Lokale Koordinatensysteme, homogene Koordinatentransformationen und Rotationsmatrizen. Bevor in Abschn. 2.4.2 diese Werkzeuge zur Modellbildung der Kinematik eines Manipulators angewendet werden können, sind im folgenden Abschn. 2.4.1 zunächst einige Definitionen zur Klasse der betrachteten Manipulator-Kinematiken erforderlich.

---

<sup>7</sup> Die Matrix-Exponentielle stellt eine Erweiterung der exp-Funktion von skalaren Argumenten auf Matrix-Argumente dar. Analog zum skalaren Fall lässt sich die Matrix-Exponentielle durch eine Potenzreihe entwickeln.

<sup>8</sup> Eine schiefsymmetrische Matrix ist durch  $\tilde{D} = -\tilde{D}^T$  definiert. Dies impliziert, dass die Hauptdiagonalelemente von  $\tilde{D}$  verschwinden und für die Nebendiagonalelemente  $d_{ij} = -d_{ji}$  gilt.

## 2.4.1 Definitionen zur Manipulator-Kinematik

Die Spezifikation der Kinematik eines Manipulators erfolgt in der Regel durch eine Skizze des Aufbaus, die in Abschn. 2.4.1.1 als *topologische Anordnung* eingeführt wird. Hier werden wichtige, besonders ausgewiesene Punkte und Koordinatensysteme eines Manipulators beschrieben. Abschn. 2.4.1.2 definiert schließlich die Klasse der hier betrachteten Manipulator-Kinematiken.

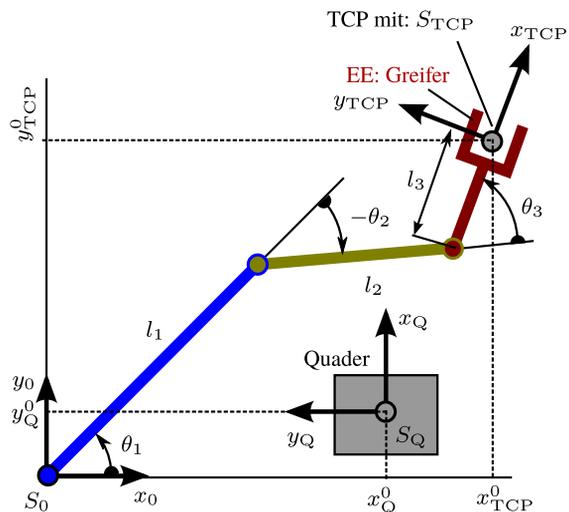
### 2.4.1.1 Topologische Anordnung

Man spezifiziert den Manipulator in der Regel in einer Position ohne Auslenkungen der Gelenke, der sogenannten *Nullposition*. In dieser ausgewiesenen Position skizziert man Position und Orientierung der Gelenkachsen in Form einer schematisierten Darstellung. Ergänzt um die wichtigsten Koordinatensysteme wird diese Skizze hier als *topologische Anordnung* eingeführt. Sie stellt den Ausgangspunkt zur Modellbildung der Kinematik und damit zur Berechnung der Lage aller Manipulatorsegmente durch verkettete *homogene Transformationen* dar.

Die topologische Anordnung enthält alle notwendigen Informationen zur Bestimmung der Lage der Gelenkachsen sowie der Lage der zu manipulierenden Körper. Dafür nicht benötigte Informationen, wie etwa mechanisch konstruktive Ausgestaltungen von Gelenkverbindern und Gelenken, werden zur Erhöhung der Übersichtlichkeit weggelassen. Abb. 2.24 zeigt die topologische Anordnung eines planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulators mit einem Quader als zu manipulierendem Körper.

Die in Abb. 2.24 geradlinig dargestellten Gelenkverbinder besitzen rein symbolischen Charakter. Sie kennzeichnen, welche Gelenke miteinander starr verbunden sind.

**Abb. 2.24** Topologische Anordnung: Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator. Verbindungsgeraden gleicher Farbe kennzeichnen, welche Gelenke starr miteinander verbunden sind und symbolisieren Gelenkverbinder



Oft bestehen Gelenkverbinder aus mehreren Geraden. Um in diesen Fällen eindeutig zu kennzeichnen, welche Verbinder starr miteinander verbunden sind, werden entsprechende Verbinder gleich eingefärbt. Im Beispiel aus Abb. 2.24 ist der letzte Gelenkverbinder starr mit dem Greifer verbunden. Dies wird durch die braune Farbe dargestellt. In diesem Beispiel kann man also aus der Farbkennzeichnung herauslesen, dass kein weiteres Gelenk zwischen dem letzten Manipulatorsegment und dem Greifer (wie etwa ein oft anzutreffendes Greifer-Drehen Gelenk) existiert.

Die tatsächliche mechanische Realisierung der Gelenkverbinder sieht in der Regel völlig anders aus, als in der Prinzipskizze dargestellt: Die Gelenkverbinder integrieren Kabelbäume, Elektronik, mechanische Wellen, Antriebsachsen etc. und realisieren eine mechanische Verbindung mit einer notwendigen Mindeststeifigkeit. Daher sind Gelenkverbinder keine einfachen Stäbe, sondern vielmehr ausgedehnte Hohlkörper mit komplexen Formen.

Analog bestehen Gelenke in Realität natürlich auch aus ausgedehnten Körpern zur Aufnahme von Antriebssträngen, Lagerungen, Kabeldurchführungen, Wärmetauschern, Steckern etc. Die in Abb. 2.24 eingezeichneten kleinen Kreise symbolisieren lediglich Positionen der Drehachsen.

Als Bezugskordinatensystem für die Lage des TCP sowie für zu manipulierende Objekte (im Beispiel von Abb. 2.24 ist dies ein Quader) wird Weltkoordinatensystem  $S_0$  gewählt. Körper, deren Lage in  $S_0$  bestimmt werden sollen, erhalten ein *körpereigenes Koordinatensystem*. Im obigen Beispiel von Abb. 2.24 wäre dies  $S_{TCP}$  für den TCP und  $S_Q$  für den Quader.

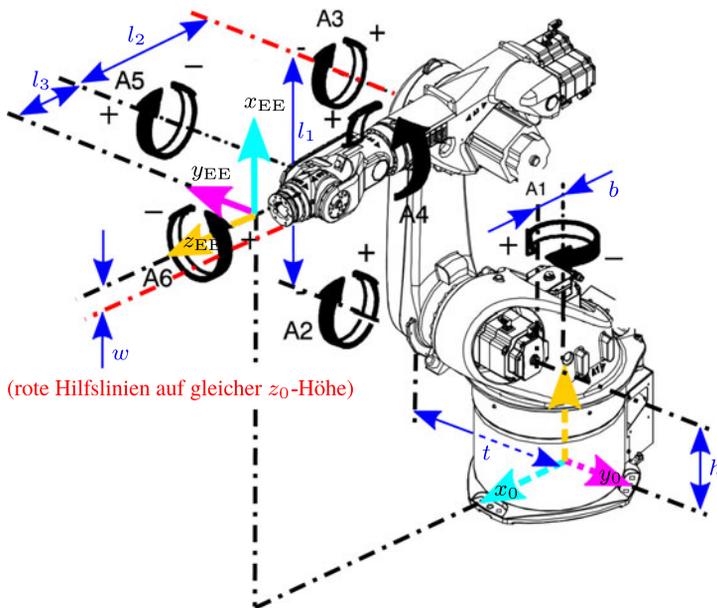
Die Lage des TCP in  $S_0$  wird durch Armlängen  $l_1, l_2, l_3$  sowie Gelenkwinkel  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  bestimmt. Daher müssen diese Größen Bestandteile einer topologischen Skizze sein. Weitere darin enthaltene Informationen sind:

- Bemaßte Skizze der geometrischen Anordnung der Gelenke des Manipulators. Dies beinhaltet zum Beispiel Armlängen als Abstände von Drehachsen.
- Bemaßte Skizze der geometrischen Anordnung von zu manipulierenden Objekten.
- Gelenkvariablen (Winkel für Drehachsen und Längen bzw. Vorschübe für Teleskopachsen, siehe nächster Abschnitt) mit Zählrichtung und Spezifikation der Nullposition (Position, an der alle Gelenkvariablen den Wert 0 besitzen).
- Weltkoordinatensystem  $S_0$  und alle zu beschreibenden körpereigenen Koordinatensysteme.

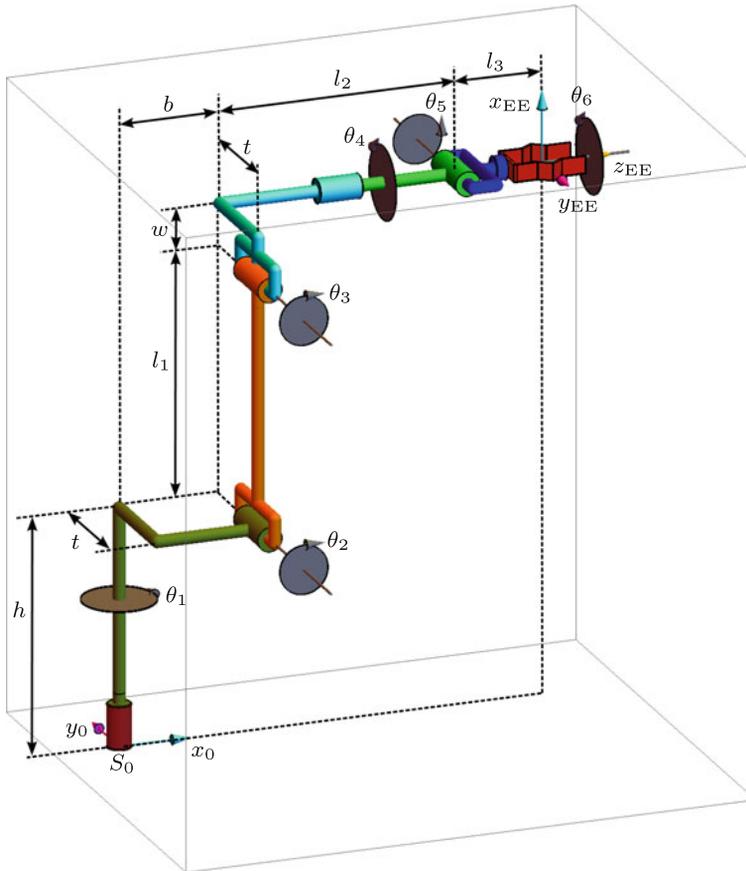
Das folgende Beispiel zeigt die möglichen, unterschiedlichen Darstellungsformen eines Manipulators und erläutert deren Zusammenhang:

- Photorealistische Darstellung (Abb. 2.25)
- 3D-Konstruktionsansicht mit bemaßten Drehachsen (Abb. 2.26)
- Topologische Anordnung (Abb. 2.27)
- 3D-Animationsmodell (Abb. 2.28)

**Abb. 2.25** Bild von KR30 der Fa. KUKA Roboter GmbH, technischer Stand 2017. Die dargestellte Position ist nicht die Nullposition. Der Greifer fehlt. Darstellung genehmigt von KUKA AG



**Abb. 2.26** 3D-Konstruktionsansicht des KR30 mit Bemaßung der Drehachsen, aus Spez. KR 30. 60-3, F, KR C4 12.16.00 de, Abb. 14 – Spezifikationen; Drehrichtungen modifiziert und Bemaßungen eingefügt. Der Manipulator befindet sich in Nullposition, der Greifer fehlt. Darstellung genehmigt von KUKA AG

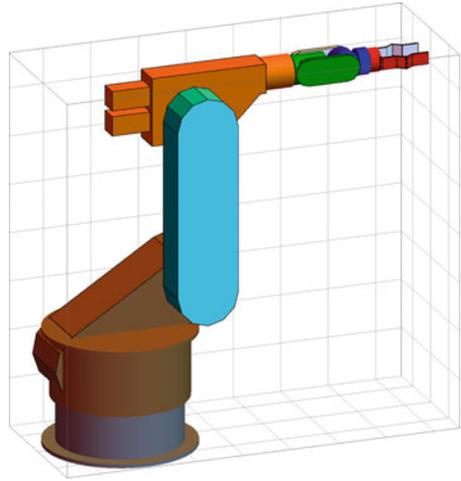


**Abb. 2.27** Topologische Anordnung von KR30 in Nullposition mit Greifer

**Beispiel 2.18.** Topologische Anordnung des KR30 der Fa. KUKA Roboter GmbH: Der Manipulator aus Abb. 2.25 besitzt sechs Drehachsen A1 bis A6. Drehachsen und Drehsinn dieser Achsen gehen aus Abb. 2.26 hervor. Gegenüber den Herstellerangaben wurde die Richtung einiger Drehwinkel umgekehrt; ein Greifer ist im Bild nicht enthalten.

Abb. 2.26 zeigt den Manipulator in Nullposition: Das Weltkoordinatensystem (gestrichelt dargestellt)  $S_0$  ist im Sockel platziert. Die Turm-Drehen-Achse A1 entspricht der  $z_0$ -Achse. Die OA-Neigen Achse A2 ist gegenüber  $S_0$  in  $z_0$ -Richtung um Höhe  $h$  nach oben, um einen Versatz  $t$  in negativer  $y_0$ -Richtung nach links und um Länge  $b$  in positive  $x_0$ -Richtung nach vorne verschoben. Die UA-Neigen-Achse A3 ist gegenüber der A2-Achse um Länge  $l_1$  nach oben verschoben. Die UA-Drehen-Achse A4 ist nochmals um eine Länge  $w$  nach oben sowie um Länge  $t$  nach rechts verschoben. A4 liegt somit in der  $y_0 = 0$ -Ebene. Die Hand-Neigen-Achse A5 befindet sich auf gleicher Höhe, wie

**Abb. 2.28** Animationsmodell von KR30 in Nullposition mit Greifer



Achse A3, jedoch um Länge  $l_2$  in  $x_0$ -Richtung nach vorne verschoben. Die Hand-Drehen-Achse A6 schneidet Achse A5 und verläuft wie Achse A4 in der  $y_0 = 0$ -Ebene. Das Endeffektorkoordinatensystem ist um Länge  $l_3$  noch weiter nach vorne verschoben und liegt ebenfalls in der Ebene  $y_0 = 0$ .

Aus diesen Informationen lässt sich die topologische Anordnung aus Abb. 2.27 erstellen. Darin sind die geometrischen Formen der Gelenkverbinder auf rechteckig verlegte, dünne Stangen reduziert. Die Gelenke werden ebenfalls durch einfache Symbole dargestellt. Dabei werden zwei unterschiedliche Symbole verwendet, je nachdem ob die Gelenkachse in Richtung des Gelenkverbinders oder senkrecht dazu orientiert ist. Bei Gelenk 1, 4 und 6 liegt der erste Fall vor, bei den restlichen Gelenken der zweite Fall.

*Hinweis:* Es ist anschaulich klar, dass der seitliche Versatz  $t$  des Oberarmsegments keinerlei Auswirkung auf die Endeffektorlage hat. Er dient rein konstruktiven Gründen. Eine Systematik, aus der hervorgeht, welche Aspekte der mechanischen Konstruktion nicht modelliert werden müssen, erfolgt in Abschn. 2.4.2. Basierend auf dieser Systematik wird für jedes Manipulatorsegment ein lokales Koordinatensystem vergeben, siehe Beispiel 2.23.

Die Lage der Manipulatorsegmente kann nun durch die Lage der zugehörigen körpereigenen Koordinatensysteme bestimmt werden. Damit ist im Prinzip das eingangs gestellte Problem der direkten Kinematik gelöst; es sind beliebige Manipulator-Positionen darstellbar. Man gelangt zu einem Animationsmodell wie in Abb. 2.28 dargestellt, in dem man einfach handhabbare geometrische Körper (Kombinationen aus Zylindern, Quadern etc.) als Manipulatorsegmente verwendet. <

### 2.4.1.2 Manipulatorsegmente und Gelenke

Hier betrachtete Manipulatoren sollen aus mehreren starren Körpern bestehen, die man als *Manipulatorsegmente* bzw. *Armsegmente* bezeichnet. Sie sollen folgende Eigenschaften erfüllen:

- Kein Punkt eines starren Manipulatorsegments bewegt sich relativ zum körpereigenen Koordinatensystem, das heißt es tritt keine Relativbewegung zwischen den Punkten eines starren Manipulatorsegments auf. Man bezeichnet einen solchen Körper als *Starrkörper*. Flexible Manipulatorsegmente werden damit hier nicht betrachtet. Wie weiter oben bereits dargestellt, werden Starrkörper graphisch durch einheitliche Farbgebung gekennzeichnet, siehe zum Beispiel Animationsmodell aus Abb. 2.28. Körper gleicher Farbe sind also starr miteinander verbunden.
- Jedes Manipulatorsegment soll über genau ein Gelenk mit genau einem Vorgänger-Manipulatorsegment verbunden sein. Dies bezeichnet man als *Seriell-Kinematik*. Das erste Manipulatorsegment ist dabei natürlich mit der Welt, anstelle eines Vorgänger-Manipulatorsegments, verbunden. Die Forderung nach genau einem Vorgänger-Manipulatorsegment wird von vielen Manipulatoren erfüllt. Dazu gehört auch die umfangreiche Klasse *anthropomorpher Manipulatoren* oder auch *Knickarm-Manipulatoren*. Sind mehr als nur zwei Gelenke mit einem Manipulatorsegment verbunden, so spricht man von einer *Parallel-Kinematik* (wie zum Beispiel bei *Hexapoden*), da sich Kräfte und Momente auf mehrere Manipulatorsegmente aufteilen, sich in ihrer Wirkung also quasi „parallelisieren“.
- Jedes Gelenk besitze genau eine Bewegungsachse.

Da Manipulatorsegmente durch Gelenke verbunden sind, bestimmen deren Auslenkungen bzw. Positionen die Lage der Manipulatorsegmente. Die Auslenkung eines Gelenks wird durch eine zugehörige *Gelenkvariable* gemessen. Im Falle eines *Drehgelenks* (synonym zu *Rotationsgelenk*) Nummer  $i$  ist dies Gelenkwinkel  $\theta_i$  gemessen in  $^\circ$  oder rad; im Falle eines *prismatischen Gelenks* (synonym zu *Translationsgelenk*, Gelenk mit einer *Teleskopachse*) spricht man vom *Vorschub*  $\sigma_i$  gemessen in m.

Die Nummerierung der Gelenke (Index von  $\theta_i$ ) beginnt mit dem Gelenk, welches die Welt mit einem Manipulatorsegment verbindet. Dieses Manipulatorsegment und das zugehörige Gelenk wird damit als das *erste* Manipulatorsegment bzw. Gelenk bezeichnet. Folgerichtig ist das *letzte* Manipulatorsegment jenes, welches starr mit dem Endeffektor verbunden ist.

Um im Text und in mathematischen Ausdrücken umständliche Fallunterscheidungen zwischen Winkeln und Vorschüben zu vermeiden, fasst man beide Typen von Gelenkvariablen in einem Vektor *verallgemeinerter Gelenkvariablen*  $q_i$  zusammen:

$$\mathbf{q} = \left( q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n \right)^T \quad (2.23)$$

$$q_i = \theta_i \xi_i + (1 - \xi_i) \sigma_i, \quad \xi_i \in \{0, 1\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

mit  $\xi_i$ : Gelenkauswahlvariable;  $n$ : Anzahl Gelenke. Für  $\xi_i = 1$  liegt also ein Drehgelenk mit *Gelenkwinkel* bzw. *Drehwinkel*  $\theta_i$  als Gelenkvariable vor; für  $\xi_i = 0$  liegt ein Trans-

lationsgelenk mit *Vorschub*  $\sigma_i$  als Gelenkvariable vor. Dabei besitzt Vektor  $\mathbf{q}$  keinerlei geometrische Bedeutung – er dient lediglich der Reduzierung des Schreibaufwands, siehe Beispiel 2.22.

Im häufig anzutreffenden Sonderfall eines Manipulators mit nur Drehgelenken wird anstelle von  $\mathbf{q}$  Vektor

$$\boldsymbol{\theta} = \left( \theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n \right)^T$$

verwendet.

### 2.4.2 DH-Konvention

Man bezeichnet die Berechnungsvorschrift von Position und Orientierung des Endeffektors aus den Gelenkpositionen  $\mathbf{q}$  als *direkte Kinematik* oder auch *Vorwärtskinematik*. Der Endeffektor ist mit dem letzten Gelenk starr verbunden. Damit befindet sich Koordinatensystem  $S_{EE}$  bezüglich Koordinatensystem  $S_n$  stets an derselben Lage. Daher lassen sie sich durch eine konstante Translation und Rotation ineinander überführen. Aus diesem Grund betrachtet man bei den Kinematik-Berechnungen die Lage von  $S_n$  anstelle von  $S_{EE}$ . Damit lässt sich das Problem der *direkten Kinematik* durch eine mathematische Abbildung

$$\mathbf{q} \mapsto \tilde{T}_{0n} \quad (2.24)$$

darstellen. Gegeben sind also Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$ , gesucht ist  $\tilde{T}_{0n}$  (und damit Position und Orientierung von  $S_n$  in  $S_0$ ). Die dazu inverse Aufgabenstellung  $\tilde{T}_{0n} \mapsto \mathbf{q}$  wird *Rückwärtskinematik* (synonym zu *inverse Kinematik*) genannt. Sie ist Thema von Kap. 3.

Die gesuchte Transformation  $\tilde{T}_{0n}$  hängt von allen Gelenkvariablen ab und beschreibt in der Regel komplizierte geometrische Anordnungen. Dieses mathematisch aufwendige Problem kann in relativ einfache Einzelprobleme aufgetrennt werden: Hierzu weist man jedem Manipulatorsegment ein körpereigenes Koordinatensystem  $S_i$  zu. Da nach Voraussetzung die Gelenke zwischen den Manipulatorsegmenten nur eine Bewegungsachse besitzen, hängt die homogene Transformation  $q_i \mapsto \tilde{T}_{(i-1)i}$  aufeinander folgender körpereigener Koordinatensysteme  $S_{i-1}$  und  $S_i$  stets auch nur von einer Gelenkvariablen  $q_i$  ab. Daher ist  $q_i \mapsto \tilde{T}_{(i-1)i}$ , verglichen mit Gesamtproblem (2.24), relativ einfach aufzustellen. Außerdem wählt man die körpereigenen Koordinatensysteme so, dass die homogenen Transformationen  $\tilde{T}_{(i-1)i}$  möglichst einfach ausfallen. Verkettete Transformation

$$\tilde{T}_{0n}(\mathbf{q}) = \tilde{T}_{01}(q_1) \tilde{T}_{12}(q_2) \cdots \tilde{T}_{(n-1)n}(q_n)$$

liefert schließlich die gesuchte Lösung zu (2.24). Hierzu sind lediglich Matrizenmultiplikationen notwendig, wofür es leistungsfähige Formelmanipulationsprogramme gibt.

Zur Erstellung von  $\tilde{T}_{(i-1)i}$  werden Translationen in Richtung von Koordinatensystem-Achsen (Elementar-Translationen) sowie Elementar-Rotationen verwendet. Daher werden an dieser Stelle *elementare homogene Transformationen* eingeführt:

$$\begin{aligned} \text{Rot}_x(\theta) &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_x(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right], & \text{Rot}_y(\theta) &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_y(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right], \\ \text{Rot}_z(\theta) &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_z(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \\ \text{Trans}_x(a) &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{E} & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right], & \text{Trans}_y(a) &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{E} & \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right], \\ \text{Trans}_z(a) &= \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{E} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

**Beispiel 2.19.** Gegeben sei der 3-DoF Manipulator aus Abb. 2.29. Gesucht werden mit  $\tilde{T}_{03}(\theta)$  Position und Orientierung des Greifers in Weltkoordinaten.

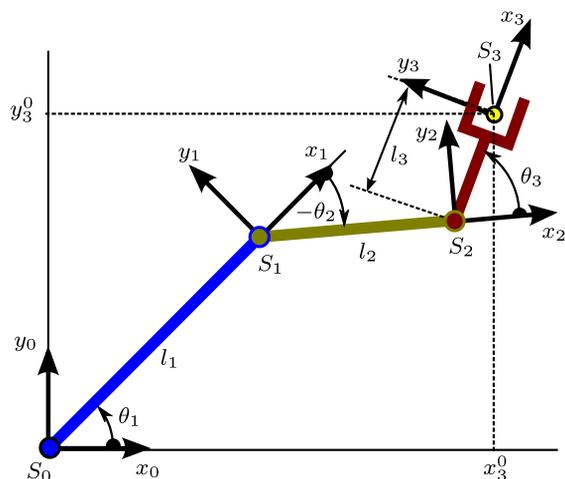
Verkettete Transformation

$$\tilde{T}_{03}(\theta) = \tilde{T}_{01}(\theta_1) \tilde{T}_{12}(\theta_2) \tilde{T}_{23}(\theta_3)$$

liefert die gesuchte homogene Transformation  $\tilde{T}_{03}$ , wobei  $\theta = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3)^T$ .

Für das günstig gelegene Koordinatensystem  $S_1$  ergibt sich homogene Transformation  $\tilde{T}_{01}$  durch Rotation um die  $z_0$ -Achse mit Winkel  $\theta_1$  und anschließende Verschiebung

**Abb. 2.29** Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Beispiel 2.19



entlang der gedrehten  $x$ -Achse um Länge  $l_1$ , das heißt durch

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{R}_z(\theta_1) & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Elementar-Rotation}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{E} & \begin{array}{c} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Elementar-Translation}}.$$

Mit Hilfe elementarer homogener Transformationen folgt die kompakte Darstellung

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \text{Rot}_z(\theta_1) \text{Trans}_x(l_1).$$

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von  $\tilde{T}_{01}(\theta_1)$  wäre, zuerst in  $y_0$ -Richtung zu verschieben, nachfolgend in  $x_0$ -Richtung zu verschieben und zuletzt um die so verschobene  $z$ -Achse mit  $\theta_1$  zu drehen, also

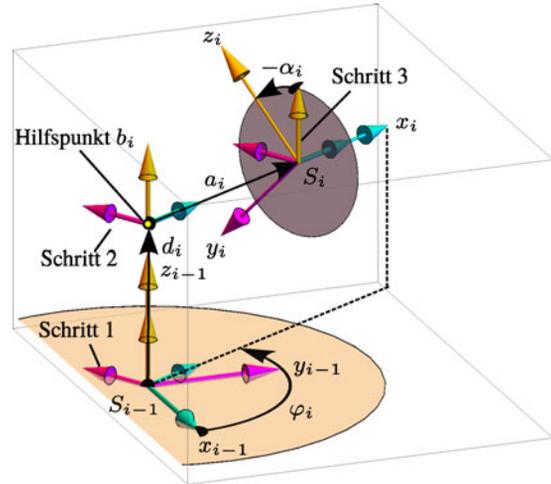
$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \text{Trans}_y(l_1 \sin \theta_1) \text{Trans}_x(l_1 \cos \theta_1) \text{Rot}_z(\theta_1).$$

Diese Berechnungsvariante erfordert die Vorabberechnung der Verschiebungslängen. Außerdem sind insgesamt drei elementare Transformationen notwendig. Daher ist die zuerst dargestellte Transformationssequenz vorzuziehen. Dafür kann ein einfacher Algorithmus angegeben werden:

1. Starte mit  $i = 1$
2. Rotiere  $S_{i-1}$  mit Winkel  $\theta_i$  um die  $z_{i-1}$ -Achse bis die  $x_{i-1}$ - und  $x_i$ -Achse aufeinander fallen.
3. Verschiebe das im vorangegangenen Schritt gedrehte Koordinatensystem entlang seiner  $x$ -Achse so lange, bis  $S_{i-1}$  und  $S_i$  zusammenfallen.  
Damit folgt  $\tilde{T}_{(i-1)i}(\theta_i) = \text{Rot}_z(\theta_i) \text{Trans}_x(l_i)$ .
4. Falls  $i = 3$ : Stop. Sonst:  $i = i + 1$  und weiter mit Schritt 2. ◁

Aus dem vorangegangenen Beispiel wird klar: Eine günstige Wahl der körpereigenen Koordinatensysteme sowie der Transformationssequenzen für  $\tilde{T}_{(i-1)i}$  führt zu einem reduzierten Berechnungsaufwand. Hierfür wird in der Robotik in Industrie und Wissenschaft ein bestimmtes Vorgehen angewendet. Dieses basiert auf der *DH*-Konvention (benannt nach den Erfindern *Denavit* und *Hartenberg*). Leider wird diese Konvention in der Literatur oft leicht modifiziert. Man kann also nicht von einem echten Standard bzw. einer echten Konvention sprechen – lediglich das prinzipielle Vorgehen ist in allen Fällen dasselbe.

**Abb. 2.30** Übergang von einem Koordinatensystem  $S_{i-1}$  auf sein Nachfolger-Koordinatensystem  $S_i$  für den Fall, dass beide DH-konform sind. Der Übergang ist in vier Schritte aufgeteilt. Jeder Schritt korrespondiert mit einem DH-Parameter. Die Zwischenschritt-Koordinatensysteme sind dabei durch verkürzte Achsen gekennzeichnet



Im vorliegenden Buch werden die Koordinatensysteme nach folgender Regel gewählt:

- Für  $0 \leq i \leq n - 1$  soll die  $z_i$ -Achse mit Gelenkachse Nr.  $i + 1$  zusammenfallen.
- Für  $0 \leq i \leq n - 1$  soll die  $x_i$ -Achse die  $z_{i-1}$ -Achse rechtwinklig schneiden.

Abb. 2.30 zeigt zwei aufeinanderfolgende Koordinatensysteme, die diese Eigenschaften erfüllen. Der geforderte Schnittpunkt beider Achsen ist als Hilfspunkt  $b_i$  markiert.

Diese Regel ist konform zu den Standardwerken [7, 8] sowie zum Original [3] von Denavit, Hartenberg. Eine dazu unterschiedliche Konvention findet sich zum Beispiel im Standardwerk [2]: Dort wird der  $z_i$ -Achse Gelenkachse Nr.  $i$  zugeordnet.

Wie der Übergang von  $S_{i-1}$  nach  $S_i$  in vier Schritten realisiert wird, soll anhand Abb. 2.30 erläutert werden:

Schritt 1: Elementar-Rotation  $\text{Rot}_z(\varphi_i)$  dreht das  $S_{i-1}$ -Koordinatensystem um Gelenkachse  $z_{i-1}$  mit Winkel  $\varphi_i$ , bis die beiden  $x$ -Achsen parallel sind. Im vorliegenden Beispiel beträgt dieser Winkel  $\frac{2}{3}\pi$ . Die Rotationsebene der  $x_{i-1}$ -Achse ist in Abb. 2.30 durch die horizontal angeordnete Kreisfläche markiert. Das gedrehte Koordinatensystem ist mit verkürzten Achsen dargestellt.

Schritt 2: Elementar-Translation  $\text{Trans}_z(d_i)$  verschiebt das gedrehte Koordinatensystem aus Schritt 1 in  $z_{i-1}$ -Richtung um eine (gerichtete) Länge  $d_i$ , bis der neue Ursprung Schnittpunkt  $b_i$  von  $x_i$ - und  $z_{i-1}$ -Achse erreicht hat. In Abb. 2.30 führt dies zur Verschiebung senkrecht nach oben. Das resultierende Koordinatensystem ist wieder mit verkürzten Achsen dargestellt.

Schritt 3: Elementar-Translation  $\text{Trans}_x(a_i)$  verschiebt das aus Schritt 2 resultierende Koordinatensystem in  $x$ -Richtung um eine (gerichtete) Länge  $a_i$ , bis Ursprung  $S_i$

erreicht wird. In Abb. 2.30 führt dies zur Verschiebung nach rechts. Das resultierende Koordinatensystem ist ebenfalls mit verkürzten Achsen dargestellt.

Schritt 4: Elementar-Rotation  $\text{Rot}_x(\alpha_i)$  dreht das Koordinatensystem aus Schritt 3 um die  $x$ -Achse mit Winkel  $\alpha_i$ , bis die Orientierung von  $S_i$  erreicht ist. Die Rotationsebene ist in Abb. 2.30 durch die vertikal angeordnete kleinere Kreisfläche markiert. Im vorliegenden Beispiel beträgt dieser Winkel  $-\frac{\pi}{4}$ .

Man kann zeigen (geometrischer Nachweis siehe [3], formaler Beweis siehe [8, Abschn. 3.2.1]), dass nach dieser Konvention alle Anordnungen von Gelenkachsen mathematisch modelliert werden können.

Zusammengefasst folgt die gesamte Transformationsvorschrift zu

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{(i-1) i} &= \text{Rot}_z(\varphi_i) \text{Trans}_z(d_i) \text{Trans}_x(a_i) \text{Rot}_x(\alpha_i) \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_i & -\cos \alpha_i \sin \varphi_i & \sin \alpha_i \sin \varphi_i & a_i \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \alpha_i \cos \varphi_i & -\sin \alpha_i \cos \varphi_i & a_i \sin \varphi_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.25a)$$

mit Inverser

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{(i-1) i}^{-1} &= \tilde{T}_{i (i-1)} \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \varphi_i & \cos \alpha_i \cos \varphi_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \varphi_i & -\sin \alpha_i \cos \varphi_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.25b)$$

Die in (2.25a) enthaltenen Parameter werden *DH-Parameter* genannt. Sie sind in Tabelle 2.1 erläutert. Ist Gelenk Nr.  $i$  ein Drehgelenk, so gilt für den DH-Gelenkwinkel

$$\varphi_i = \theta_i + \theta_{i0}, \quad (2.26)$$

mit Gelenkvariable  $\theta_i$  als Gelenkwinkel und Nullposition  $\theta_{i0}$ . Da es nur eine Gelenkvariable pro Gelenk geben kann, muss für Gelenkversatz  $d_i = \text{const}$  gelten. Liegt umgekehrt ein Translationsgelenk vor, so gilt für den Gelenkversatz

$$d_i = \sigma_i + \sigma_{i0}, \quad (2.27)$$

mit Gelenkvariablen  $\sigma_i$  als Vorschub und Nullposition  $\sigma_{i0}$ . In diesem Fall muss natürlich  $\varphi_i = \text{const}$  gelten.

Algorithmus 2.1–2.3 fasst die Modellbildung der Kinematik nach dem DH-Standard zusammen. Der Algorithmus besteht aus drei sequentiell zu durchlaufenden Teilen und lehnt sich an Algorithmus 2-5-1 aus [7] an.

**Tab. 2.1** Erläuterungen zu DH-Parametern

DH-Parameter	Bezeichnung	Erläuterungen
$\varphi_i$	DH-Gelenkwinkel	Winkel, um den $S_{i-1}$ um die Gelenkachse ( $z_{i-1}$ -Achse) gedreht werden muss, damit die Achsen $x_{i-1}$ und $x_i$ gleich orientiert sind. Als Wertebereich wird in der Regel $-\pi < \varphi_i \leq \pi$ verwendet. Es gilt $\varphi_i = \text{const}$ , falls ein Translationsgelenk vorliegt. Bei einem Drehgelenk gilt hingegen (2.26).
$d_i$	Gelenkversatz	Abstand zwischen Ursprung $S_{i-1}$ und Hilfspunkt $b_i$ . Es gilt $d_i = \text{const}$ , falls ein Rotationsgelenk vorliegt. Bei einem Translationsgelenk gilt hingegen (2.27).
$a_i$	Armlänge	Abstand zwischen Gelenkachsen $z_{i-1}$ und $z_i$ ; daher ist $a_i$ immer konstant.
$\alpha_i$	Verwindungswinkel	immer konstant; als Wertebereich wird in der Regel $-\pi < \alpha_i \leq \pi$ verwendet.

Nummeriere entlang der kinematischen Kette die Gelenke durchlaufend von 1 bis $n$ . Das erste Gelenk ist dabei mit der Welt verbunden.	
Lege das Endeffektorkoordinatensystem $S_{EE}$ fest.	
Lege das Weltkoordinatensystem $S_0$ so, dass die $z_0$ -Achse mit der Gelenkachse des ersten Gelenks zusammenfällt.	
setze Gelenkindex $i = 1$	
$i < n ?$	
WAHR	FALSCH
Wähle die $z_i$ -Achse so, dass sie mit Gelenkachse Nr. $i + 1$ zusammenfällt.	Wähle die $z_i (= z_n)$ -Achse so, dass sie kollinear u. gleichgerichtet zur $z_{EE}$ -Achse ist.
Schneiden sich die $z_i$ - und $z_{i-1}$ -Achse	
WAHR	FALSCH
Setze den Ursprung von $S_i$ auf diesen Schnittpunkt.	Setze den Ursprung von $S_i$ auf den Schnittpunkt der $z_i$ -Achse mit einer gemeinsamen Normalen zur $z_{i-1}$ - und $z_i$ -Achse.
Wähle die $x_i$ -Achse senkrecht zur $z_i$ - und $z_{i-1}$ -Achse.	Wähle die $x_i$ -Achse so, dass sie auf der gemeinsamen Normalen liegt und von $S_{i-1}$ weg weist.
Wähle die $y_i$ -Achse so, dass sie mit der $x_i$ - und $z_i$ -Achse ein Rechtssystem bildet.	
$i = i + 1$	
wiederhole solange $i \leq n$	

**Algorithmus 2.1** DH-Algorithmus Teil 1 von 3: Festlegung Koordinatensysteme

Koordinatensysteme $S_n$ und $S_{EE}$ identisch ?	
WAHR	FALSCH
Anzahl Transformationen: $n$	Anzahl Transformationen: $n + 1$
$\emptyset$	Bestimme $\tilde{T}_{n EE}$ durch eine geeignete Koordinatentransformation.

**Algorithmus 2.2** DH-Algorithmus Teil 2 von 3: Anbindung Endeffektorkoordinatensystem

setze Gelenkindex $i = 1$	
Schneiden sich die $x_i$ - und $z_{i-1}$ -Achse	
WAHR	? FALSCH
Lege Hilfspunkt $b_i$ auf diesen Schnittpunkt.	Lege Hilfspunkt $b_i$ auf den Schnittpunkt der $x_i$ -Achse mit einer gemeinsamen Normalen zur $x_i$ - und $z_{i-1}$ -Achse.
$\varphi_i$ dreht $S_{i-1}$ um die $z_{i-1}$ -Achse so, dass die $x_{i-1}$ -Achse gleich orientiert ist wie die $x_i$ -Achse.	
$d_i$ ist die gerichtete Länge vom Ursprung von $S_{i-1}$ zu Hilfspunkt $b_i$ entlang der $z_{i-1}$ -Achse.	
$a_i$ ist die gerichtete Länge von Hilfspunkt $b_i$ zum Ursprung von $S_i$ entlang der $x_i$ -Achse.	
$\alpha_i$ dreht die $x_i$ -Achse so, dass die $z_{i-1}$ -Achse gleich orientiert ist, wie die $z_i$ -Achse.	
$i = i + 1$	
wiederhole solange $i \leq n$	

**Algorithmus 2.3** DH-Algorithmus Teil 3 von 3: Bestimmung DH-Parameter

**Hinweise zu Algorithmus 2.1–2.3:**

- Es ist etwas gewöhnungsbedürftig, dass Index  $i$  der Gelenkvariablen stets um 1 größer ist, als der Index der zugehörigen Gelenkachse: Falls Gelenk  $i$  ein Drehgelenk ist, dreht Gelenkvariable  $\theta_i$  also um Gelenkachse  $z_{i-1}$  (und nicht etwa um Gelenkachse  $z_i$ ). Analog verschiebt bei einem Translationsgelenk Gelenkvariable  $\sigma_i$  entlang Gelenkachse  $z_{i-1}$ .
- Die DH-Konvention ist uneindeutig:
  - Die Gelenkachsen ( $z_i$ -Achsen) sind hinsichtlich ihrer Orientierung frei, falls die Orientierung / Zählrichtung der Gelenkvariablen frei ist.
  - Falls sich die aufeinanderfolgenden Gelenkachsen  $z_i$  und  $z_{i-1}$  schneiden, ist die Orientierung der  $x_i$ -Achse frei.

- Sind aufeinanderfolgende Gelenkachsen  $z_i$  und  $z_{i-1}$  kollinear, muss eine gemeinsame Normale gebildet werden. Diese ist nicht eindeutig.

Bei festem Welt- und Endeffektorkoordinatensystem ( $S_0$  und  $S_{EE}$ ) liefert die dargestellte DH-Konvention aber stets identische Ergebnisse für  $\tilde{T}_{0EE}$ . Die dargestellte DH-Konvention lässt also unterschiedliche Wege zum Ziel („innere“ Koordinatensysteme  $S_1$  bis  $S_{n-1}$ ) zu.

- Die Freiheit (durch die Uneindeutigkeit der DH-Konvention) in der Wahl der Koordinatensysteme sollte so genutzt werden, dass möglichst viele DH-Parameter verschwinden. Dadurch können Formel- und Berechnungsaufwand erheblich reduziert werden.
- Die DH-Parameter sind einfacher, wenn die Winkel zwischen den Koordinatensystemen ein Vielfaches von  $\pi/2$  betragen. „Schief“ angeordnete Koordinatensysteme sind also möglichst zu vermeiden.
- Koordinatensysteme fallen nicht immer mit konstruktiv realisierten Gelenkmittelpunkten zusammen. Sie können auch außerhalb der Mechanik zu liegen kommen.
- Das Endeffektorkoordinatensystem  $S_{EE}$  ist in der Regel nicht DH-konform gewählt. Vielmehr erfolgt die Wahl von  $S_{EE}$  nach übergeordneten Gesichtspunkten der Automatisierungsaufgabe. In diesem Fall fällt das letzte Koordinatensystem  $S_n$  nicht mit  $S_{EE}$  zusammen.

Zur Anbindung von  $S_{EE}$  an  $S_n$  sind dann konstante Drehungen und / oder Translationen um / entlang anderer Achsen (als die in der DH-Konvention vorgesehenen) notwendig. Dies berücksichtigt Teil 2 des obigen DH-Algorithmus.

- Alternativ zu Algorithmus 2.3 können auch die einzelnen Teiltransformationen von

$$\tilde{T}_{(i-1)i} = \text{Rot}_z(\varphi_i) \text{Trans}_z(d_i) \text{Trans}_x(a_i) \text{Rot}_x(\alpha_i)$$

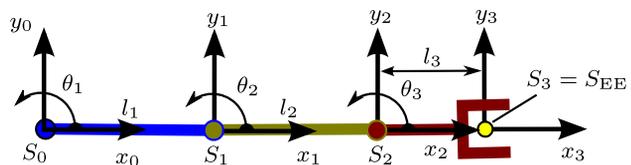
schrittweise nachvollzogen und dabei die DH-Parameter ermittelt werden, siehe Beispiel 2.21, Bestimmung DH-Parameter: Gelenk 1.

Dieser alternative Weg ist oftmals intuitiver und schneller als der formale Weg nach Algorithmus 2.3.

**Beispiel 2.20.** Fortsetzung von Beispiel 2.19: Der 3-Dof Ellenbogen-Manipulator befinde sich in ausgestreckter Position in seiner Nullposition, siehe Abb. 2.31.

Alle  $z$ -Achsen müssen nach der Schraubenregel aufgrund der Drehrichtung der Gelenkwinkel senkrecht nach oben aus der Darstellungsebene herausweisen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind sie nicht in Abb. 2.31 eingetragen. Die Koordinatensysteme sind DH-konform gewählt, da alle  $z$ -Achsen alle  $x$ -Achsen senkrecht schneiden.

**Abb. 2.31** Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator mit ausgestreckter Nullposition



**Festlegung Koordinatensysteme:** Nach Algorithmus 2.1 muss zur Festlegung des Ursprungs von  $S_1$  eine gemeinsame Normale zur  $z_0$ - und  $z_1$ -Achse gewählt werden, da die beiden  $z$ -Achsen parallel sind.

Die DH-Konvention ist hier uneindeutig, in dem die gemeinsame Normale in einer beliebigen Ebene  $z_0 = \text{const}$  liegen kann. Für Ebenen  $z_0 = c = \text{const}$  muss für den Gelenkversatz  $d_1 = c$  gewählt werden. Je mehr DH-Parameter verschwinden, desto einfacher wird die Transformation  $\tilde{T}_{01}$ , so dass mit  $c = 0$  als gemeinsame Normale die  $x_0$ -Achse gewählt wird.

Der Schnittpunkt dieser gemeinsamen Normalen mit der  $z_1$ -Achse bestimmt nun den Ursprung von  $S_1$ . Die  $x_1$ -Achse muss von  $S_0$  wegweisen, in Abb. 2.31 ist sie damit nach rechts orientiert.

Die Festlegung von  $S_2$  und  $S_3$  erfolgt analog. Das erste Manipulatorsegment (blau) besitzt somit als körpereigenes Koordinatensystem  $S_1$ , das zweite Manipulatorsegment (olivgrün)  $S_2$  und das dritte Manipulatorsegment (dunkelrot)  $S_3$ . Dabei ist es etwas gewöhnungsbedürftig, dass sich das körpereigene Koordinatensystem jeweils am „Ende“ des zugehörigen Körpers befindet.

**Anbindung Endeffektorkoordinatensystem:** Wegen  $S_3 = S_{EE}$  ist keine weitere Transformation notwendig.

**Bestimmung DH-Parameter:** Armlängen  $a_i$  stellen den Abstand der Gelenkachsen dar. Da alle Gelenkachsen parallel verlaufen, folgt  $a_1 = l_1$ ,  $a_2 = l_2$  und  $a_3 = l_3$ . Kein Koordinatensystem muss in  $z$ -Richtung verschoben werden, da alle in der Ebene  $z_0 = 0$  liegen. Wie bereits oben festgestellt, verschwindet daher jeder Gelenkversatz, das heißt  $d_i = 0$ . Da alle Koordinatensysteme identisch orientiert sind, verschwinden auch alle Verwindungswinkel, das heißt  $\alpha_i = 0$ .

Abb. 2.31 stellt den Manipulator in seiner Nullposition dar. Daraus liest man  $\theta_{i0} = 0$  ab (siehe (2.26) für die Bedeutung von  $\theta_{i0}$ ). So folgt aus (2.26) für die DH-Gelenkwinkel  $\varphi_i = \theta_i$ .

Tabelle 2.2 fasst die DH-Parameter nochmals zusammen. Setzt man die Werte der ersten Zeile in (2.25a) ein, so ergibt sich

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

**Tab. 2.2** DH-Parameter für den 3-DoF Ellenbogen-Manipulator. Die ausgestreckte Position gemäß Abb. 2.31 definiert die Nullposition.

$i$	$\varphi_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1$	0	$l_1$	0
2	$\theta_2$	0	$l_2$	0
3	$\theta_3$	0	$l_3$	0

Analog folgen aus Zeile 2 und 3

$$\tilde{T}_{12}(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{T}_{23}(\theta_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ausmultiplizieren liefert schließlich unter Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{03}(\boldsymbol{\theta}) &= \tilde{T}_{0EE}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{T}_{01}(\theta_1) \tilde{T}_{12}(\theta_2) \tilde{T}_{23}(\theta_3) \\ &= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nun soll die Manipulator-Kinematik mit der in Abb. 2.32 dargestellten Position als Nullposition modelliert werden. Die Nullpositionen der Gelenke sind hier mit  $\theta_{i0} > 0$  spezifiziert. Damit ergeben sich nach (2.26) die DH-Gelenkwinkel zu

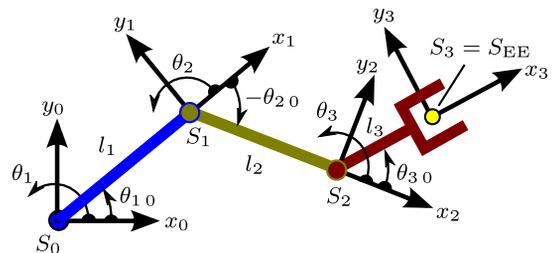
$$\varphi_1 = \theta_1 + \theta_{10}$$

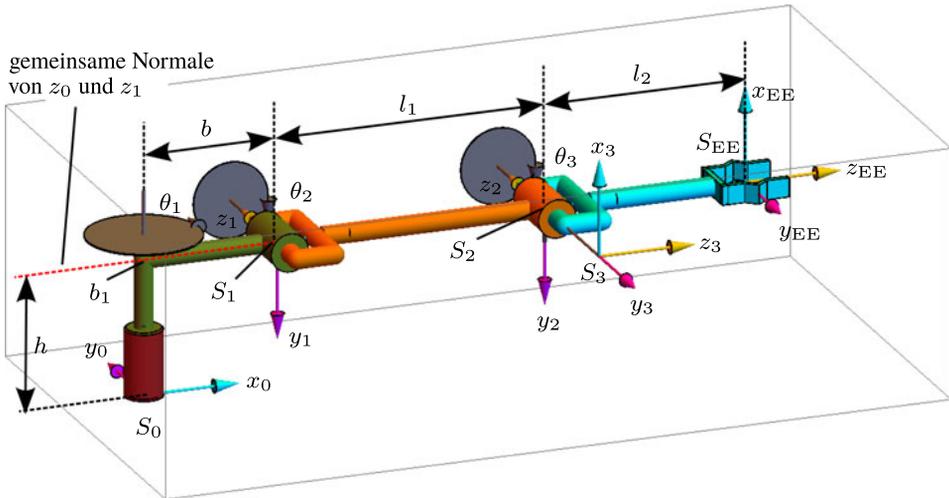
$$\varphi_2 = \theta_2 - \theta_{20}$$

$$\varphi_3 = \theta_3 + \theta_{30}.$$

<

**Abb. 2.32** Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator mit um  $\theta_{i0}$  geneigten Nullpositionen





**Abb. 2.33** Artikulierter planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Beispiel 2.21

### Beispiel 2.21. Artikulierter planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator

Für den Manipulator in Nullposition aus Abb. 2.33 soll  $\tilde{T}_{0EE}$  berechnet werden.

**Festlegung Koordinatensysteme:** Gelenkachse  $i$  legt die Richtung von  $z_i$  fest. Die Zählrichtungen der Gelenkwinkel  $\theta_i$  ergeben nach der Schraubenregel die durch kleine Pfeile dargestellten Orientierungen der Gelenkachsen.

Festlegung von  $S_1$ : Da die  $z_1$ - und  $z_0$ -Achse windschief sind, wird die gemeinsame Normale benötigt. Diese ist durch die rot gestrichelte Linie dargestellt. Der Schnittpunkt dieser gemeinsamen Normalen mit der  $z_1$ -Achse bestimmt Ursprung  $S_1$ . Die  $x_1$ -Achse muss von  $S_0$  wegweisen, so dass sie in Abb. 2.33 nach rechts gerichtet ist. In vorliegender Darstellung ist die  $x_1$ -Achse durch das zweite Manipulatorsegment verdeckt und daher nicht sichtbar. Die  $y_1$ -Achse vervollständigt schließlich Koordinatensystem  $S_1$  zu einem Rechtssystem.

Festlegung von  $S_2$ : Da die  $z_1$ -Achse parallel zur  $z_2$ -Achse verläuft, wird ebenso wie bei der Festlegung von  $S_1$  eine gemeinsame Normale benötigt. Anders als bei  $S_1$  ist diese gemeinsame Normale aber nicht eindeutig bestimmt. Damit kein Gelenkversatz notwendig ist (das heißt  $d_2$  soll verschwinden), wird hier als gemeinsame Normale die  $x_1$ -Achse gewählt. Der Schnittpunkt dieser gemeinsamen Normalen mit der  $z_2$ -Achse bestimmt Ursprung  $S_2$ . Die  $x_2$ -Achse muss von  $S_1$  wegweisen, so dass sie in Abb. 2.33, analog zur  $x_1$ -Achse, nach rechts gerichtet ist.

Festlegung von  $S_3$ : Gemäß Algorithmus 2.1, wird die  $z_3$ -Achse kollinear und gleichgerichtet zu  $z_{EE}$  gewählt. Sie fällt daher mit der  $x_2$ -Achse zusammen. Ursprung  $S_3$

ist durch den Schnittpunkt der  $z_2$ - mit der  $z_3$ -Achse bestimmt und fällt so mit Ursprung  $S_2$  zusammen. Falls, wie in diesem Fall, die Ursprünge von Koordinatensystemen aufeinander fallen, stellt man die Koordinatensysteme zur besseren Lesbarkeit etwas versetzt zueinander dar. In Abb. 2.33 ist daher  $S_3$  in negativer  $z_2$ -Richtung versetzt dargestellt.

Die  $x_3$ -Achse muss senkrecht auf der  $z_2$ - und  $z_3$ -Achse stehen. Damit ergeben sich zwei mögliche Orientierungen: Nach unten oder nach oben. Im vorliegenden Fall wird die  $x_3$ -Achse nach oben orientiert, da damit  $S_{EE}$  und  $S_3$  gleich orientiert sind. Auf diese Weise gestaltet sich die Anbindung des Endeffektorkoordinatensystems  $S_{EE}$  an Koordinatensystem  $S_3$  einfacher.

**Anbindung Endeffektorkoordinatensystem:** Da  $S_{EE}$  und  $S_3$  gleich orientiert sind, genügt zur Anbindung eine einfache Translation gemäß

$$\tilde{T}_{3EE} = \text{Trans}_z(l_2).$$

### Bestimmung DH-Parameter:

Gelenk 1: Es wird Algorithmus 2.3 angewendet: Im ersten Schritt muss  $S_0$  mit Gelenkversatz  $d_1 = h$  nach oben bis Hilfspunkt  $b_1$  (das ist der Schnittpunkt der gemeinsamen Normalen mit der  $z_0$ -Achse) verschoben werden. Mit einer Translation in  $x$ -Richtung um Armlänge  $a_1 = b$  wird Ursprung  $S_0$  auf Ursprung von  $S_1$  verschoben. Durch Drehung von  $S_0$  um die  $x_1$ -Achse um Verwindungswinkel  $\alpha_1$  wird die  $z_0$ -Achse in Richtung der  $z_1$ -Achse gedreht. Hierfür liest man aus der topologischen Skizze  $\alpha_1 = -\pi/2$  ab.

Da für die geforderte Nullposition die  $x_0$ - und  $x_1$ -Achse bereits gleich orientiert sind, gilt  $\theta_{10} = 0$  und nach (2.26) für den DH-Gelenkwinkel  $\varphi_1 = \theta_1$ .

*Alternativer Weg zu Algorithmus 2.3:* Es werden die Teiltransformationen von

$$\tilde{T}_{01} = \text{Rot}_z(\varphi_1) \text{Trans}_z(d_1) \text{Trans}_x(a_1) \text{Rot}_x(\alpha_1)$$

schrittweise durchgeführt, um  $S_0$  nach  $S_1$  zu überführen: Im ersten Schritt wird  $S_0$  um  $\varphi_1 = \theta_1$  um die  $z_0$ -Achse verdreht, so dass die  $x$ -Achsen von  $S_0$  und  $S_1$  gleich orientiert sind. Dieses gedrehte Koordinatensystem wird in Richtung seiner  $z$ -Achse um  $d_1 = h$  nach oben und anschließend in Richtung seiner  $x$ -Achse um  $a_1 = b$  nach rechts verschoben. Das resultierende Koordinatensystem liegt im selben Ursprung wie  $S_1$ . Um auch die selbe Orientierung herzustellen, muss es um seine  $x$ -Achse um  $\alpha_1 = -\pi/2$  verdreht werden.

Gelenk 2: Koordinatensystem  $S_1$  kann durch eine Verschiebung in  $x$ -Richtung um Armlänge  $a_2 = l_1$  direkt in Koordinatensystem  $S_2$  überführt werden. Damit verschwinden die DH-Parameter:  $\alpha_2 = d_2 = 0$ .

Gelenk 3: Ursprung  $S_2$  und  $S_3$  liegen bereits aufeinander, so dass  $a_3 = d_3 = 0$ . Die dargestellte Nullposition führt zu  $\theta_{30} = -\frac{\pi}{2}$ . Nach (2.26) folgt damit für DH-

**Tab. 2.3** DH-Parameter für den Manipulator aus Abb. 2.33

$i$	$\varphi_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1$	$h$	$b$	$-\pi/2$
2	$\theta_2$	$0$	$l_1$	$0$
3	$\theta_3 - \pi/2$	$0$	$0$	$-\pi/2$

Gelenkwinkel  $\varphi_3 = \theta_3 - \frac{\pi}{2}$ . Durch Drehen von  $S_2$  um die  $x_3$ -Achse um Verwindungswinkel  $\alpha_3 = -\pi/2$  nimmt  $S_2$  die Orientierung von  $S_3$  ein.

Tabelle 2.3 fasst die DH-Parameter nochmals zusammen.

Die gesuchte Kinematik folgt mit obiger Endeffektoranbindung zu

$$\tilde{T}_{0EE}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{T}_{01}(\theta_1) \tilde{T}_{12}(\theta_2) \tilde{T}_{23}(\theta_3) \underbrace{\tilde{T}_{3EE}}_{=\text{const}}.$$

Die dafür benötigte Transformation  $\tilde{T}_{01}$  erhält man durch Einsetzen der ersten Zeile von Tabelle 2.3 in (2.25a) zu

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & b c_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & b s_1 \\ 0 & -1 & 0 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Analog ergeben sich  $\tilde{T}_{12}$  und  $\tilde{T}_{23}$  aus der 2. und 3. Zeile von Tabelle 2.3 mit (2.25a) zu

$$\tilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_1 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{und} \quad \tilde{T}_{23}(\theta_3) = \left[ \begin{array}{ccc|c} s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ -c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Damit berechnen sich die gesuchten homogenen Transformationen zu:

$$\tilde{T}_{02}(\theta_1, \theta_2) = \tilde{T}_{01}(\theta_1) \tilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & c_1 (b + c_2 l_1) \\ c_2 s_1 & -s_1 s_2 & c_1 & s_1 (b + c_2 l_1) \\ -s_2 & -c_2 & 0 & h - l_1 s_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{T}_{03}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{T}_{02}(\theta_1, \theta_2) \tilde{T}_{23}(\theta_3) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & c_1 (b + c_2 l_1) \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & s_1 (b + c_2 l_1) \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & h - l_1 s_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{T}_{0EE}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{T}_{03}(\boldsymbol{\theta}) \text{Trans}_z(l_2) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 s_{23} & s_1 & c_1 c_{23} & c_1 (b + l_1 c_2 + l_2 c_{23}) \\ s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & s_1 (b + l_1 c_2 + l_2 c_{23}) \\ c_{23} & 0 & -s_{23} & h - l_1 s_2 - l_2 s_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Dabei wurden folgende Additionstheoreme zur Vereinfachung verwendet:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Als Plausibilitäts-Check wird Nullposition  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  eingesetzt und man erhält

$$\tilde{T}_{0EE}(\mathbf{0}) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & b + l_1 + l_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Man validiert leicht aus Abb. 2.33 die  $x$ -Position des Endeffektors in Weltkoordinaten zu  $x_{EE}^0 = b + l_1 + l_2$  sowie  $z_{EE}^0 = h$  und  $y_{EE}^0 = 0$ . Die Darstellung der Endeffektorbasisvektoren in Weltkoordinaten kann aus Abb. 2.33 abgelesen werden zu

$$\tilde{R}_{0EE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da Position und Lage des Endeffektors durch Berechnung und Ablesen übereinstimmen, ist der Plausibilitäts-Check bestanden.

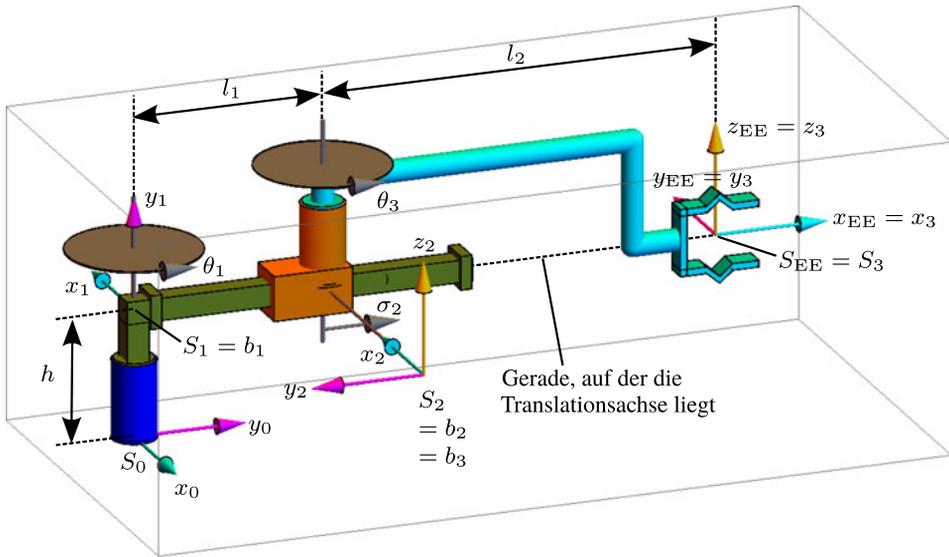
Weiterführende Betrachtungen erfolgen in Aufgabe 2.13. ◀

**Beispiel 2.22.** 3-DoF Manipulator mit Gelenkreihenfolge Rotation-Translation-Rotation:

Für den in Nullposition dargestellten Manipulator aus Abb. 2.34 soll  $\tilde{T}_{0EE}$  berechnet werden.

Gelenkachsen und -variablen: Die erste Gelenkachse rotiert definitionsgemäß um die  $z_0$ -Achse mit Gelenkwinkel  $\theta_1$ . Das zugehörige Manipulatorsegment ist olivgrün gekennzeichnet.

Das zweite Manipulatorsegment (orange) besteht nur aus einem Translationsgelenk mit Auszug  $\sigma_2$  als Gelenkvariable. Die zugehörige Gelenkachse verläuft im Innern des ersten Manipulatorsegments. Daher ist sie nach unten versetzt dargestellt. Die  $z_1$ -Achse muss also auf und in Richtung dieser Gelenkachse verlaufen (gestrichelte Linie in Abb. 2.34).



**Abb. 2.34** Manipulator mit Gelenkreihenfolge Rotation-Translation-Rotation in Nullposition

Manipulatorsegment 3 (cyan) realisiert eine Kröpfung so, dass das räumliche Zentrum des Endeffektors wieder auf der Translationsachse zu liegen kommt. Dieses letzte Manipulatorsegment ist durch ein Rotationsgelenk mit Gelenkwinkel  $\theta_3$  an das Vorgänger-Manipulatorsegment angebunden. Die zugehörige Drehachse definiert  $z_2$ .

Festlegung von  $S_1$ : Der Schnittpunkt der  $z_0$ - und  $z_1$ -Achse definiert Ursprung  $S_1$ . Die  $x_1$ -Achse muss senkrecht auf beiden  $z$ -Achsen stehen. Somit kann sie entweder wie eingezeichnet in die Zeichenebene hinein, oder aus ihr heraus zeigen.

Festlegung von  $S_2$ : Der Schnittpunkt der  $z_1$ - und  $z_2$ -Achse definiert Ursprung  $S_2$ . Da Koordinatensystem  $S_2$  von Manipulatorsegmenten verdeckt wird, ist es in negativer  $x_2$ -Richtung versetzt dargestellt.

Für die Wahl der  $x_2$ -Achse gilt dasselbe wie im vorangegangenen Schritt: Die DH-Konvention ist hier zweideutig, indem zwei Richtungen möglich sind. Im vorliegenden Fall ist die  $x_1$ -Achse so gewählt, dass sie in die Zeichenebene hinein zeigt.

Festlegung von  $S_3$ : Nach Algorithmus 2.1 muss die  $z_3$ -Achse auf der  $z_{EE}$ -Achse liegen und mit ihr gleichgerichtet sein. Da die  $z_2$ - und  $z_3$ -Achse kollinear zueinander verlaufen, wird eine gemeinsame Normale benötigt. Um einen Gelenkversatz zu vermeiden (das heißt es soll  $d_3 = 0$  gelten), wird als gemeinsame Normale die  $x_{EE}$ -Achse gewählt. Der Schnittpunkt dieser gemeinsamen Normalen mit der  $z_3$ -Achse ergibt dann Ursprung  $S_{EE}$  als Ursprung  $S_3$ . Die  $x_3$ -Achse muss auf dieser gemeinsamen Normalen liegen und von  $S_2$  wegzeigen. Daraus folgt  $S_3 = S_{EE}$ .

**Anbindung Endeffektorkoordinatensystem:** Wegen  $S_3 = S_{EE}$  ist eine gesonderte Anbindung nicht notwendig.

**Bestimmung DH-Parameter:** Hilfspunkte  $b_i$  liegen auf Schnittpunkten der Achsen  $z_{i-1}$  und  $x_i$  wie in Abb. 2.34 eingetragen.

Gelenk 1: Die  $x_0$ -Achse wird auf die  $x_1$ -Achse mit einer Drehung um die  $z_0$ -Achse mit DH-Gelenkwinkel  $\varphi_1 = \theta_1 + \pi$  gedreht. Die in  $z_0$ -Richtung gezählte Länge von  $S_0$  zu Hilfspunkt  $b_1$  beträgt  $d_1 = h$ . In  $x$ -Richtung ist keine Verschiebung notwendig, so dass für die Armlänge  $a_1 = 0$  gilt. Verwindungswinkel  $\alpha_1 = \pi/2$  dreht  $S_0$  schließlich um die  $x_1$ -Achse so, dass die beiden Achsen  $z_0$  und  $z_1$  aufeinander fallen.

Gelenk 2: Da die beiden Achsen  $x_1$  und  $x_2$  bereits gleich orientiert sind und kein Drehgelenk vorliegt, folgt  $\varphi_2 = 0$ . Die Länge vom Ursprung von  $S_1$  zu Hilfspunkt  $b_2$  in Richtung der  $z_1$ -Achse ergibt Gelenkversatz  $d_2 = l_1 + \sigma_2$ . In diesem Fall ist die Gelenkvariable also durch Vorschub  $\sigma_2$  und nicht durch einen Gelenkwinkel gegeben. Eine Translation in  $x$ -Richtung ist nicht notwendig, so dass Armlänge  $a_2 = 0$  folgt. Verwindungswinkel  $\alpha_2 = -\pi/2$  dreht  $S_1$  um die  $x_2$ -Achse so, dass die beiden Achsen  $z_1$  und  $z_2$  aufeinander fallen.

Gelenk 3: Die  $x_2$ -Achse wird auf die  $x_3$ -Achse mit einer Drehung um die  $z_2$ -Achse mit DH-Gelenkwinkel  $\varphi_3 = \theta_3 - \pi/2$  gedreht. Die in  $x_3$ -Richtung gezählte Länge von Hilfspunkt  $b_3$  zum Ursprung von  $S_3$  ergibt Armlänge  $a_3 = l_2$ . In  $z$ -Richtung ist keine Verschiebung notwendig, so dass  $d_3 = 0$ . Achsen  $z_2$  und  $z_3$  sind bereits gleich orientiert. Damit ist kein Verwindungswinkel notwendig.

Tabelle 2.4 fasst die DH-Parameter nochmals zusammen. Zeilenweise in (2.25a) eingesetzt, liefert die homogenen Transformationsmatrizen zwischen jeweils zwei angrenzenden Gelenken:

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[ \begin{array}{ccc|c} -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \tilde{T}_{12}(\sigma_2) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & \sigma_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{T}_{23}(\theta_3) = \left[ \begin{array}{ccc|c} s_3 & c_3 & 0 & l_2 s_3 \\ -c_3 & s_3 & 0 & -l_2 c_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**Tab. 2.4** DH-Parameter für den Manipulator aus Abb. 2.34

$i$	$\varphi_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1 + \pi$	$h$	0	$\pi/2$
2	0	$l_1 + \sigma_2$	0	$-\pi/2$
3	$\theta_3 - \pi/2$	0	$l_2$	0

Im vorliegenden Fall bestehen die Gelenkvariablen nicht nur aus Gelenkwinkeln, so dass ein Gelenkvariablenvektor  $\theta$  wie in den vorangegangenen Beispielen keinen Sinn ergibt. Vielmehr wird in diesem Fall Vektor  $\mathbf{q}$  der verallgemeinerten Gelenkvariablen mit

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \sigma_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

verwendet. Für die Gelenkauswahlvariable folgt somit  $\xi = (1 \ 0 \ 1)^T$ .

Durch Ausführen der Matrizenmultiplikation aus

$$\tilde{T}_{0EE}(\mathbf{q}) = \tilde{T}_{03} = \tilde{T}_{01}(\theta_1) \tilde{T}_{12}(\sigma_2) \tilde{T}_{23}(\theta_3)$$

folgt mit Zwischenschritt

$$\tilde{T}_{02}(\theta_1, \sigma_2) = \left[ \begin{array}{ccc|c} -c_1 & s_1 & 0 & -(\sigma_2 + l_1) s_1 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & (\sigma_2 + l_1) c_1 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

schließlich die gesuchte Transformationsvorschrift

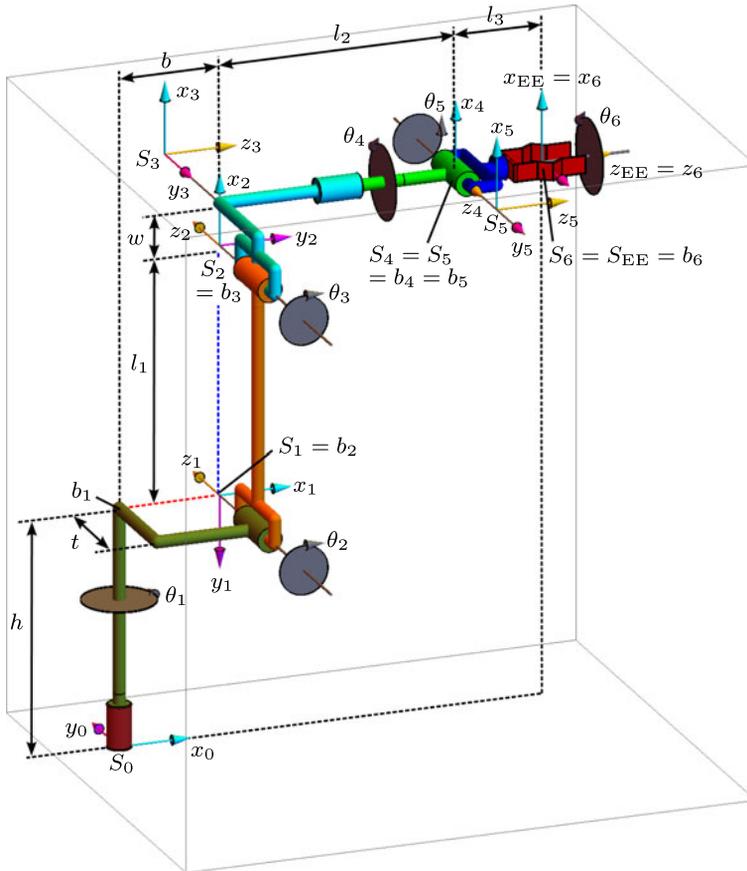
$$\tilde{T}_{0EE}(\mathbf{q}) = \left[ \begin{array}{ccc|c} -s_{13} & -c_{13} & 0 & -l_2 s_{13} - (l_1 + \sigma_2) s_1 \\ c_{13} & -s_{13} & 0 & l_2 c_{13} + (l_1 + \sigma_2) c_1 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad \triangleleft$$

**Beispiel 2.23.** DH-Parameter von KR30 (Fortsetzung von Beispiel 2.18)

### Festlegung Koordinatensysteme:

Festlegung von  $S_1$ : Da die  $z_1$ - und  $z_0$ -Achse windschief zueinander stehen, wird eine gemeinsame Normale benötigt. Diese ist durch die rot gestrichelte Linie dargestellt. Der Schnittpunkt dieser gemeinsamen Normalen mit der  $z_1$ -Achse bestimmt Ursprung  $S_1$ . Man erkennt, dass das körpereigene Koordinatensystem nach DH nicht zwingend innerhalb der dargestellten Manipulator-Kontur oder in einem Gelenk liegen muss.

Die  $x_1$ -Achse liegt auf der gemeinsamen Normalen und muss von  $S_0$  wegweisen, so dass sie in Abb. 2.35 nach rechts gerichtet ist.



**Abb. 2.35** Topologische Anordnung von KR30 in Nullposition mit DH-Koordinatensystemen. Koordinatensysteme  $S_3$  und  $S_5$  sind zur besseren Übersichtlichkeit gegenüber ihrer tatsächlichen Position etwas versetzt dargestellt

Festlegung von  $S_2$ : Da die  $z_1$ -Achse parallel zur  $z_2$ -Achse verläuft, wird ebenso wie bei der Festlegung von  $S_1$  eine gemeinsame Normale benötigt. Anders als bei  $S_1$  ist diese gemeinsame Normale aber nicht eindeutig bestimmt. Damit kein Gelenkversatz notwendig ist ( $d_2$  soll verschwinden), wird als gemeinsame Normale die blau gestrichelte Hilfslinie gewählt. Der Schnittpunkt dieser gemeinsamen Normalen mit der  $z_2$ -Achse legt den Ursprung von  $S_2$  fest. Die  $x_2$ -Achse muss von  $S_1$  wegweisen, so dass sie in Abb. 2.35 nach oben gerichtet ist.

Festlegung von  $S_3$ : Da die  $z_3$ - und  $z_2$ -Achse windschief zueinander stehen, wird die gemeinsame Normale benötigt. Diese ist durch die  $x_2$ -Achse gegeben. Damit folgt Ursprung  $S_3$  als Schnittpunkt der  $x_2$ - mit der  $z_3$ -Achse. Die  $x_3$ -Achse muss auf der gemeinsamen Normalen liegen und von  $S_2$  wegweisen. So ergibt sich die dar-

gestellte Orientierung von  $x_3$  nach oben. Da in Abb. 2.35 die  $z_3$ - und  $y_3$ -Achse ganz von Armverbindungselementen verdeckt ist, ist  $S_3$  nach hinten (das heißt in positive  $y_0$ -Richtung) versetzt dargestellt.

Festlegung von  $S_4$ : Die Achsen  $z_4$  und  $z_3$  schneiden sich, so dass Ursprung  $S_4$  durch diesen Schnittpunkt eindeutig festgelegt ist. Die Orientierung von  $x_4$  kann entweder wie in Abb. 2.35 dargestellt nach oben zeigen, oder alternativ auch nach unten.

*Hinweis:* Die gewählte Orientierung nach oben erweist sich später als vorteilhaft, da neben der  $x_4$ -Achse auch die  $x_5$ -Achse nach oben orientiert werden kann. Somit verschwinden die zugehörigen Nullpositionen:  $\theta_{40} = \theta_{50} = \theta_{60} = 0$ .

Festlegung von  $S_5$ : Da sich  $z_5$  und  $z_4$  im Ursprung  $S_4$  schneiden, fallen Ursprünge  $S_4$  und  $S_5$  zusammen. Die  $x_5$ -Achse muss senkrecht auf der  $z_5$ - und  $z_4$ -Achse stehen. Somit sind wieder zwei Orientierungen möglich: nach oben oder nach unten. Wie bereits erläutert, ist die hier gewählte Orientierung nach oben vorteilhaft.

Festlegung von  $S_6$ : Gemäß Algorithmus 2.1 wird die  $z_6$ -Achse kollinear und gleichgerichtet zu  $z_{EE}$  gewählt. Da Achsen  $z_5$  und  $z_6$  aufeinander liegen, existiert kein eindeutiger Schnittpunkt. Für eine vereinfachte Darstellung kann damit der Ursprung von  $S_6$  mit dem Ursprung von  $S_{EE}$  zusammenfallen. Da die  $x_{EE}$ -Achse senkrecht auf den Achsen  $z_6$  und  $z_{EE}$  steht, kann sie als  $x_6$ -Achse gewählt werden. Damit ist das letzte Koordinatensystem  $S_6$  identisch mit dem Endeffektorkoordinatensystem  $S_{EE}$ .

**Anbindung Endeffektorkoordinatensystem:** entfällt bzw. trivial wegen  $S_6 = S_{EE}$ .

**Bestimmung DH-Parameter:** Die Hilfspunkte  $b_i$  liegen auf den Schnittpunkten der Achsen  $z_{i-1}$  und  $x_i$  wie in Abb. 2.35 eingetragen.

Gelenk 1: Die  $x_0$ -Achse wird auf die  $x_1$ -Achse mit einer Drehung um die  $z_0$ -Achse mit DH-Gelenkwinkel  $\varphi_1 = \theta_1$  gedreht. Die in  $z_0$ -Richtung gezählte Länge von Ursprung  $S_0$  zu Hilfspunkt  $b_1$  beträgt  $d_1 = h$ . In  $x$ -Richtung muss um Armlänge  $a_1 = b$  verschoben werden. Verwindungswinkel  $\alpha_1 = -\pi/2$  dreht  $S_0$  um  $x_1$  so, dass Achsen  $z_0$  und  $z_1$  gleich orientiert sind.

Gelenk 2: Die  $x_1$ -Achse wird auf die  $x_2$ -Achse mit einer Drehung um die  $z_1$ -Achse mit DH-Gelenkwinkel  $\varphi_2 = \theta_2 - \pi/2$  gedreht. Eine Verschiebung in  $z$ -Richtung ist nicht notwendig, so dass  $d_2 = 0$ . Die Länge von  $b_2$  zum Ursprung  $S_2$  in Richtung der  $x_2$ -Achse führt zu Armlänge  $a_2 = l_1$ .

Eine Verwindung ist nicht notwendig, da nach der Drehung um die  $z_1$ -Achse Koordinatensysteme  $S_1$  und  $S_2$  gleich orientiert sind, also  $\alpha_2 = 0$ .

Gelenk 3: Hier und bei den restlichen Achsen werden die DH-Parameter nicht mittels Algorithmus 2.3 ermittelt. Vielmehr wird der in Beispiel 2.21 bereits dargestellte alternative Weg verwendet, da dieser für Geübte schneller zum Ziel führt: Da Achsen  $x_2$  und  $x_3$  parallel und gleich orientiert sind, folgt  $\varphi_3 = \theta_3$ . Eine Verschiebung in  $z_2$ -Richtung ist nicht notwendig, so dass  $d_3 = 0$ . Durch eine Ver-

schiebung von  $S_2$  in  $x_2$ -Richtung um  $a_3 = w$  liegt der Ursprung des verschobenen  $S_2$ -Koordinatensystems auf Ursprung  $S_3$ . Zuletzt muss um die  $x_2$ -Achse um Verwindungswinkel  $\alpha_3 = -\pi/2$  gedreht werden, damit das transformierte  $S_2$ -Koordinatensystem mit dem  $S_3$ -Koordinatensystem identisch wird.

Gelenk 4: Da Achsen  $x_3$  und  $x_4$  parallel und gleich orientiert sind, muss nur um Gelenkwinkel  $\theta_4$  gedreht werden, das heißt  $\varphi_4 = \theta_4$ . Anschließend muss  $S_3$  in  $z_3$ -Richtung um  $d_4 = l_2$  verschoben werden. Dadurch kommen Ursprünge  $S_3$  und  $S_4$  aufeinander zu liegen. Eine Verschiebung in  $x_3$ -Richtung ist nicht notwendig, so dass  $a_4 = 0$ . Durch eine Drehung um  $\alpha_4 = -\pi/2$  um die  $x_3$ -Achse wird das  $S_3$ -schließlich in das  $S_4$ -Koordinatensystem überführt.

Gelenk 5: Analog zum vorangegangenen Gelenk folgt  $\varphi_5 = \theta_5$ . Da Ursprünge  $S_4$  und  $S_5$  bereits aufeinander fallen, ist keine Verschiebung notwendig:  $d_5 = a_5 = 0$ . Verwindungswinkel  $\alpha_5 = \pi/2$  überführt schließlich  $S_4$  in  $S_5$ .

Gelenk 6: Um  $S_5$  nach  $S_6$  zu überführen, ist lediglich eine Rotation  $\varphi_6 = \theta_6$  mit anschließender Verschiebung um  $d_6 = l_3$  in  $z_5$ -Richtung notwendig. Die zwei verbleibenden DH-Parameter verschwinden somit:  $a_6 = \alpha_6 = 0$ .

Tabelle 2.5 fasst die DH-Parameter nochmals zusammen. Wie bereits in Beispiel 2.18 erwähnt, entfällt Versatz  $t$  bei der Modellbildung nach DH.

Um die Komplexität von  $\tilde{T}_{0EE}$  zu demonstrieren, werden an dieser Stelle die Formel­ausdrücke der Elemente von  $\tilde{T}_{0EE}$  dargestellt. Zur Berechnung wurde ein Formelmanipulationsprogramm verwendet:

Rotationsmatrix (Einheitsvektoren von  $S_{EE}$  in  $S_0$ -Koordinaten):

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= s_1 (c_5 c_6 s_4 + c_4 s_6) + c_1 (c_6 (c_4 c_5 s_{23} - c_{23} s_5) - s_4 s_6 s_{23}) \\
 r_{12} &= c_6 (c_4 s_1 - c_1 s_4 s_{23}) - s_6 (c_5 s_1 s_4 + c_1 (c_4 c_5 s_{23} - c_{23} s_5)) \\
 r_{13} &= c_1 (c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23}) + s_1 s_4 s_5 \\
 r_{21} &= c_6 (c_5 (c_4 s_1 s_{23} - c_1 s_4) - c_{23} s_1 s_5) - s_6 (c_1 c_4 + s_1 s_4 s_{23}) \\
 r_{22} &= c_1 (c_5 s_4 s_6 - c_4 c_6) - s_1 (c_6 s_4 s_{23} + s_6 (c_4 c_5 s_{23} - c_{23} s_5)) \\
 r_{23} &= c_5 c_{23} s_1 + s_5 (c_4 s_1 s_{23} - c_1 s_4) \\
 r_{31} &= c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_6 s_5 s_{23} \\
 r_{32} &= -c_{23} (c_6 s_4 + c_4 c_5 s_6) - s_5 s_6 s_{23} \\
 r_{33} &= c_4 c_{23} s_5 - c_5 s_{23}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Translationsvektor (Position von  $S_{EE}$  in  $S_0$ -Koordinaten):

$$\begin{aligned}
 t_1 &= c_1 (b + c_{23} l_2 + l_1 s_2 + s_{23} w) + l_3 (c_1 (c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23}) + s_1 s_4 s_5) \\
 t_2 &= s_1 (b + c_{23} l_2 + l_1 s_2 + s_{23} w) + l_3 (c_5 c_{23} s_1 + s_5 (c_4 s_1 s_{23} - c_1 s_4)) \\
 t_3 &= c_4 c_{23} l_3 s_5 - s_{23} (c_5 l_3 + l_2) + c_2 l_1 + c_{23} w + h
 \end{aligned}$$

**Tab. 2.5** DH-Parameter für KR30

$i$	$\varphi_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1$	$h$	$b$	$-\pi/2$
2	$\theta_2 - \pi/2$	0	$l_1$	0
3	$\theta_3$	0	$w$	$-\pi/2$
4	$\theta_4$	$l_2$	0	$-\pi/2$
5	$\theta_5$	0	0	$\pi/2$
6	$\theta_6$	$l_3$	0	0

Bei (2.28) liegt die übliche Abkürzungsmethode für Argumente trigonometrischer Funktionen zugrunde gemäß  $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ ,  $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ . ◁

## Aufgaben

*Musterlösungen* finden sich unter [www.springer.com](http://www.springer.com) auf der Seite des vorliegenden Werks.

### 2.1 Koordinatensystem-Basis

Im Weltkoordinatensystem sei Koordinatensystem  $S_1$  durch homogene Transformationsmatrix

$$\tilde{T}_{01} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

gegeben.

- Geben Sie  $\tilde{R}_{01}$  und  $t_1$  an.
- Wie lauten die Basisvektoren von  $S_1$  jeweils in  $S_0$ - und in  $S_1$ -Koordinaten?
- Wo befindet sich der Ursprung von  $S_1$  jeweils in  $S_0$ - und in  $S_1$ -Koordinaten?
- Skizzieren Sie die Koordinatensysteme (grobe Genauigkeit reicht).

Nun seien drei Punkte  $P_1^1 = (1; 0; 0)$ ,  $P_2^1 = (0; 1; 0)$  und  $P_3^1 = (1; 1; 0)$  gegeben.

- In welchem Koordinatensystem sind die Punkte angegeben?
- Zeichnen Sie die Punkte in das oben skizzierte Koordinatensystem ein und schätzen Sie graphisch grob (Genauigkeit ca.:  $\pm 0.2$  LE) deren Weltkoordinaten ab.
- Ermitteln Sie die exakten Weltkoordinaten der Punkte durch Berechnung.

### 2.2 Homogene Transformationsmatrix 1

Ein orthonormales Koordinatensystem  $S_1$  zeige mit seiner  $x$ -Achse in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und mit seiner  $y$ -Achse in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Der Ursprung von  $S_1$  liege im Punkt  $(0; 1; -2)$ .

- Wie lautet die homogene Transformationsmatrix  $\tilde{T}_{01}$ ?
- Berechnen Sie  $\tilde{T}_{10}$ .
- Geben Sie Ursprung und Basisvektoren von  $S_0$  in  $S_1$ -Koordinaten an.
- Berechnen Sie  $\tilde{T}_{01} \tilde{T}_{10}$  und interpretieren Sie das Ergebnis.

### 2.3 Homogene Transformationsmatrix 2

Die Orientierung eines Koordinatensystems  $S_1$  im Weltkoordinatensystem sei wie folgt:  $z_1$ -Achse in  $x_0$ -Richtung,  $y_1$ -Achse entgegen  $z_0$ -Achse.

- Skizzieren Sie die Anordnung der beiden Koordinatensysteme.
- Wie lauten die  $S_1$ -Basisvektoren in  $S_0$  Koordinaten? Bilden Sie daraus Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{01}$ .
- Wie lauten die  $S_0$ -Basisvektoren in  $S_1$  Koordinaten? Bilden Sie daraus Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{10}$ .
- Überprüfen Sie  $\tilde{R}_{10}$  durch Berechnung der Inversen  $\tilde{R}_{01}^{-1}$ .
- Die durch  $\tilde{R}_{01}$  dargestellte Rotation soll nun durch die Sequenz zweier Elementarrotationen realisiert werden. Die Elementarrotationen sollen sich dabei auf die bewegten Achsen beziehen. Finden Sie eine solche Sequenz.
- Wiederholen Sie die letzte Aufgabe mit Elementarrotationen um die  $S_0$ -Achsen.

### 2.4 Elementar-Rotationen

Spezifizieren Sie die Elementar-Rotation von  $\tilde{T}_{01}$  aus Aufgabe 2.1 mit Angabe der Drehachse und des Drehwinkels.

### 2.5 InvEuler323-Funktion als Nassi-Shneiderman-Struktogramm

Erstellen Sie ein Nassi-Shneiderman-Struktogramm der InvEuler323-Funktion. In der Euler-Singularität soll  $\alpha = 0$  angenommen werden. Fügen Sie für Dokumentationszwecke aussagekräftige Kurzkomentare hinzu.

Falls nötig, recherchieren Sie die Nassi-Shneiderman-Definitionen der benötigten Struktogramm-Elemente.

### 2.6 Euler-Winkel 1

Geben Sie die Lösungsvielfalt der ZYZ Euler-Winkel für die in  $\tilde{T}_{01}$  enthaltene Rotation aus Aufgabe 2.1 an.

### 2.7 Euler-Winkel 2

Lesen Sie aus der skizzierten Anordnung der Koordinatensysteme aus Aufgabe 2.3 die Lösungen der ZYZ Euler-Winkel für Rotation  $\tilde{R}_{01}$  ab.

### 2.8 Euler-Winkel 3

Berechnen Sie *eine* numerische Lösung der ZYZ Euler-Winkel für die durch  $\tilde{R}_{01}$  definierte Rotation aus Aufgabe 2.2.

### 2.9 Rotationsreihenfolge

Gegeben seien folgende Sequenzen von Rotationen:

- Schritt 1:  $\Phi$  um die  $x$ -Achse des Weltkoordinatensystems  
Schritt 2:  $\theta$  um die aktuelle (gedrehte)  $z$ -Achse  
Schritt 3:  $\Psi$  um die  $y$ -Achse des Weltkoordinatensystems
- Schritt 1:  $\Phi$  um die  $x$ -Achse des Weltkoordinatensystems  
Schritt 2:  $\theta$  um die  $z$ -Achse des Weltkoordinatensystems  
Schritt 3:  $\Psi$  um die aktuelle (gedrehte)  $x$ -Achse
- Wie Aufgabe 2.9a); anschließend als 4. Rotation:  
 $\alpha$  um die  $z$ -Achse des Weltkoordinatensystems
- Wie Aufgabe 2.9b); anschließend als 4. Rotation:  
 $\alpha$  um die  $z$ -Achse des Weltkoordinatensystems

Geben Sie mit Hilfe von Elementar-Rotationen jeweils das Matrix-Produkt (nicht ausmultiplizieren) für die Rotationsmatrix der Gesamttrotation an.

### 2.10 Transformationsgraph 1

Gegeben seien drei Koordinatensysteme:  $S_0$ ,  $S_1$  und  $S_2$  sowie die homogenen Transformationsmatrizen  $\tilde{T}_{12}$  und  $\tilde{T}_{20}$ .

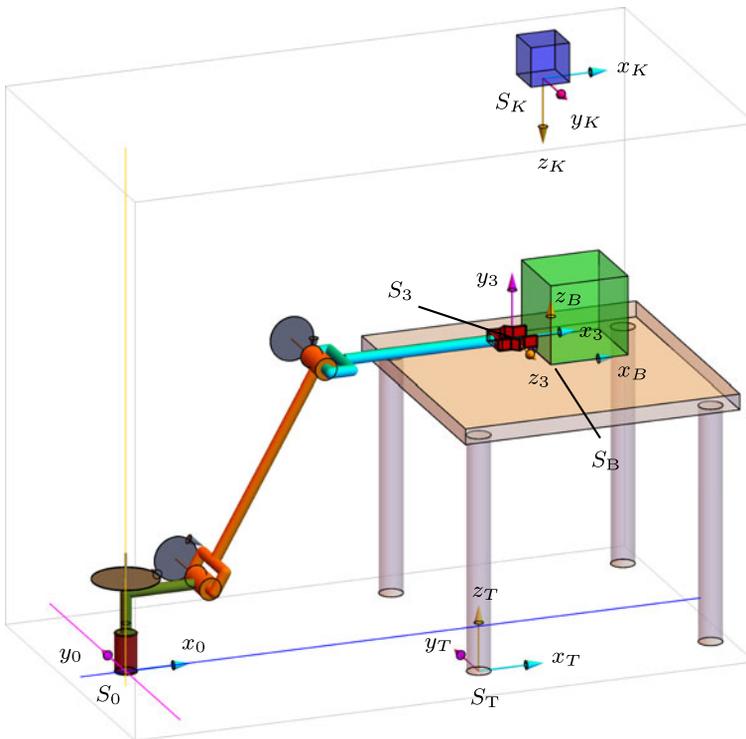
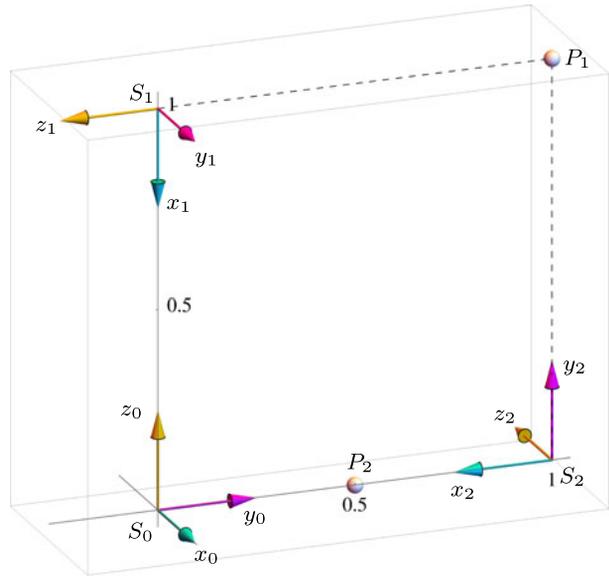
- Skizzieren Sie den Transformationsgraphen mit den gegebenen Transformationen.
- Bestimmen Sie  $\tilde{T}_{01}$  mit Hilfe von  $\tilde{T}_{12}$  und  $\tilde{T}_{20}$ .

### 2.11 Transformationsgraph 2

Gegeben seien drei Koordinatensysteme  $S_0$ ,  $S_1$  und  $S_2$ , die gemäß Abb. 2.36 angeordnet sein sollen.

- Stellen Sie die homogenen Transformationsmatrizen  $\tilde{T}_{01}$  und  $\tilde{T}_{02}$  auf.
- Skizzieren Sie den Transformationsgraphen. Leiten Sie mit dessen Hilfe  $\tilde{T}_{12}$  aus  $\tilde{T}_{01}$  und  $\tilde{T}_{02}$  ab.
- Berechnen Sie  $\tilde{T}_{12}$  und  $\tilde{T}_{21}$  numerisch.
- Berechnen Sie die  $S_1$ - und  $S_2$ -Koordinaten von Punkt  $P_1$ , der in Weltkoordinaten durch Ortsvektor  $\mathbf{p}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  definiert ist. Führen Sie einen Plausibilitätstest durch.
- Berechnen Sie die  $S_2$ -Koordinaten von Punkt  $P_2$ , der in Weltkoordinaten durch Ortsvektor  $\mathbf{p}_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$  definiert ist. Führen Sie einen Plausibilitätstest durch.

**Abb. 2.36** Anordnung der Koordinatensysteme  $S_0$ ,  $S_1$  und  $S_2$  für Aufgabe 2.11



**Abb. 2.37** Anordnung der Koordinatensysteme der Bearbeitungszelle von Aufgabe 2.12

### 2.12 Transformationsgraph 3

Gegeben sei das Koordinatensystem einer Kamera  $S_K$ , einer kleinen Bearbeitungszelle  $S_B$  sowie eines Tisches  $S_T$  wie in Abb. 2.37 dargestellt. Der Turm eines Manipulators befindet sich im Weltkoordinatensystem  $S_0$ , sein Endeffektor besitze Koordinatensystem  $S_3$ .

Von folgenden Koordinatensystemen seien Positionen der Ursprünge bekannt:

$$\mathbf{t}_T^0 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.15 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_B^T = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_K^0 = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.225 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_3^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.36 \end{pmatrix}.$$

Alle Koordinatensystemachsen sollen entweder rechtwinklig oder parallel zu den Achsen des Weltkoordinatensystems verlaufen. Die weiteren Achsorientierungen sind aus Abb. 2.37 ablesbar.

- Skizzieren Sie einen Transformationsgraphen und ermitteln Sie daraus  $\tilde{T}_{3B}$  und  $\tilde{T}_{KB}$ .
- Berechnen Sie numerisch die Position des Ursprungs von  $S_B$  in Endeffektorkoordinaten. Wie viel Abstand besteht in der gegenwärtigen Position des Endeffektors zur Grenze der Bearbeitungszelle?
- Bestimmen Sie numerisch die Position des Endeffektors in Kamerakoordinaten.

### 2.13 Artikulierter planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator

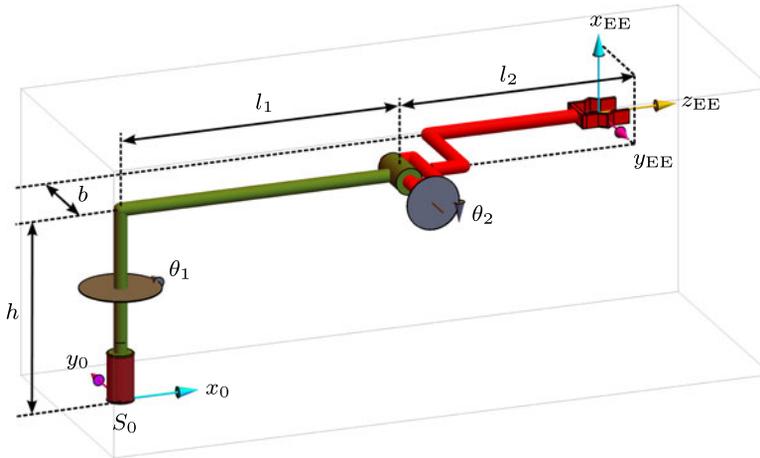
Gegeben sei der *artikulierte planare 3-DoF Ellenbogen-Manipulator* aus Beispiel 2.21 mit Gelenkwinkeln  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = -60^\circ$  und  $\theta_3 = 105^\circ$  und Parameterwerten  $h = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $l_1 = 0.3$  und  $l_2 = 0.25$ .

- Berechnen Sie numerisch Position und Orientierung (Letztere in Form einer Rotationsmatrix) des Endeffektors in Weltkoordinaten.
- Führen Sie einen Plausibilitätscheck dieser numerischen Berechnung mit einer Skizze durch.
- Berechnen Sie die Orientierung des Endeffektors in Form der ZYZ Euler-Winkel für  $0 \leq \beta \leq \pi$ .

### 2.14 Artikulierter 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit Achsversatz

Gegeben sei ein artikulierter Ellenbogen-Manipulator mit einem Neigegelenk und einem Achsversatz der Breite  $b$ , wie in Abb. 2.38 dargestellt.

- Ergänzen Sie die fehlenden Koordinatensysteme nach DH-Konvention. Wie viele Koordinatentransformationen sind notwendig? Was fällt bei Koordinatensystem  $S_2$  auf?
- Geben Sie die DH-Parameterwerte an.
- Berechnen Sie alle auftretenden homogenen Transformationen  $\tilde{T}_{0i}$ ,  $i \geq 1$ .



**Abb. 2.38** Manipulator mit Achsversatz zu Aufgabe 2.14

Nun seien folgende Werte für die Längen gegeben:  $h = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $l_1 = 0.3$ ,  $l_2 = 0.25$ ; die Gelenkwinkel seien  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_2 = -60^\circ$ .

- Berechnen Sie in Weltkoordinaten für den Endeffektor Position und Orientierung (Letztere in Form einer Rotationsmatrix).
- Berechnen Sie die Orientierung in Form der ZYZ Euler-Winkel für  $0 \leq \beta < \pi$ .

### 2.15 Basis-Kinematik 3

Bestimmen Sie die DH-Parameter für Basis-Kinematik 3 nach Abb. 3.9.

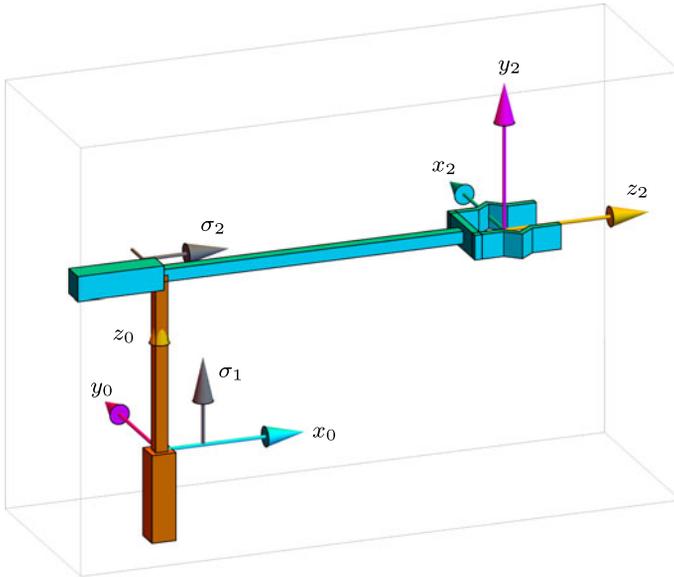
### 2.16 Kartesischer 2-DoF Manipulator

Bestimmen Sie nach der DH-Konvention die Koordinatensysteme mit zugehörigen DH-Parametern für den kartesischen 2-DoF Manipulator nach Abb. 2.39. Die Linearachsen besitzen als Gelenkvariable jeweils  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . In der Skizze ist eine Position  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  dargestellt. Die Nullposition soll bei  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  liegen. Das Endeffektorkoordinatensystem soll mit dem dargestellten Koordinatensystem  $S_2$  übereinstimmen.

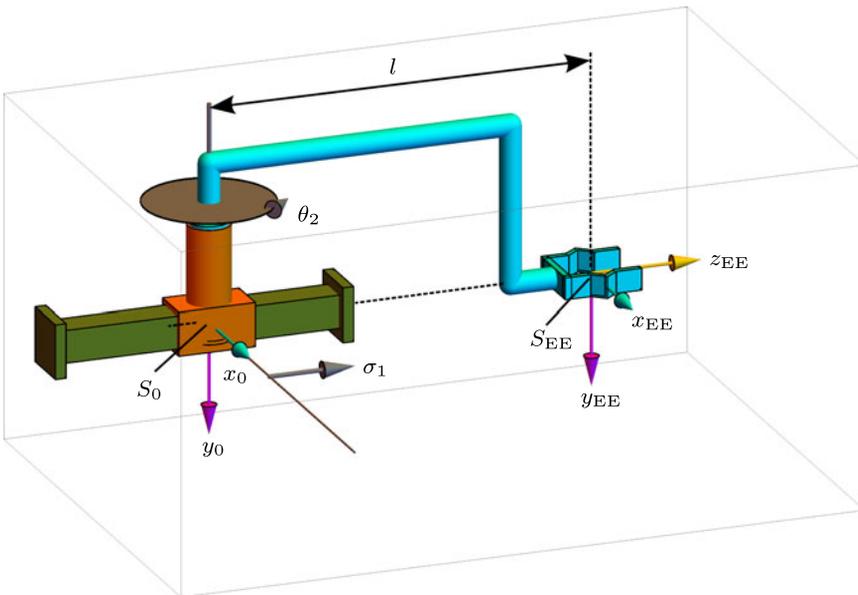
### 2.17 Kinematik eines Manipulators mit Gelenkreihenfolge Translation-Rotation

Abb. 2.40 zeigt einen Manipulator mit einem Translations- und einem Rotationsgelenk. Das Translationsgelenk besitze Gelenkvariable  $\sigma_1$ , das Rotationsgelenk Gelenkvariable  $\theta_2$ . Die dargestellten Gelenkpositionen seien Nullpositionen. Der olivgrün dargestellte quaderförmige Körper sei starr mit dem Inertialsystem verbunden.

- Bestimmen Sie die DH-Koordinatensysteme und -Parameter. Binden Sie das Endeffektorkoordinatensystem  $S_{EE}$  an.
- Stellen Sie  $\tilde{T}_{0EE}$  auf.



**Abb. 2.39** Manipulator zu Aufgabe 2.16. Die Darstellung zeigt nicht die Nullposition



**Abb. 2.40** Manipulator zu Aufgabe 2.17; Gelenkreihenfolge: Translation-Rotation. Die Darstellung zeigt die Nullposition

### 2.18 Anthropomorpher 6-DoF-Manipulator

Bestimmen Sie die DH-Parameter für den anthropomorphen 6-DoF-Manipulator aus Abb. 3.11.

---

#### Literatur

1. F. A. Brockhaus GmbH: Brockhaus – Die Enzyklopädie: Band 11, 20. Aufl. F. A. Brockhaus GmbH, Leipzig, Mannheim (1998)
2. Craig, J.J.: Introduction to Robotics – Mechanics and Control, 3. Aufl. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River (2005)
3. Denavit, J., Hartenberg, R.S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mech.* **22**, 215–221 (1955)
4. Goldstein, H.: Klassische Mechanik, 4. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1976)
5. Meyberg, K., Vachenaer, P.: Höhere Mathematik 1, 6. Aufl. Springer, Berlin (2003)
6. Murray, R.M., Li, Z., Sastry, S.S.: A Mathematical Introduction to Robotic manipulation. CRC Press, Boca Raton (1994)
7. Schilling, R.J.: Fundamentals of Robotics – Analysis & Control. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1990)
8. Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasager, M.: Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken (2006)

**Zusammenfassung** Eine Kernfähigkeit von Manipulatoren besteht darin, den Endeffektor in eine genau vorgegebene Lage (Position und Orientierung) zu überführen. Eine Methode hierfür ist das sogenannte *Teachen*: Der Endeffektor wird dabei manuell vom Menschen in die gewünschte Lage geschoben. Dort werden die Werte der Gelenkvariablen gemessen und in der Steuerungssoftware der Lage zugeordnet. So ist es möglich, diese Lage immer wieder anzufahren. Beim *Teachen* hängt die Positioniergenauigkeit vom manuellen Geschick des Menschen ab. Außerdem können damit nur einzelne Lagen im Raum abgefahren werden – ein Pfad kann also nur durch ein Punktraster angenähert werden.

Moderne Manipulator-Anwendungen benötigen jedoch hohe Positioniergenauigkeiten auf einzelne Lagen oder entlang eines Pfads. Dafür müssen die Gelenkvariablen so berechnet werden, dass sich die gewünschte Endeffektorlage ergibt. Dies stellt die Umkehraufgabe zur Kinematik dar und wird daher als inverse Kinematik bezeichnet. Es stellt das Herzstück der Steuerung von Manipulatoren dar.

Die inverse Kinematik mündet in ein stark nichtlineares Gleichungssystem. Falls überhaupt eine Lösung existiert, so ist diese in der Regel nicht eindeutig. Vielmehr tritt eine Lösungsvielfalt auf. Im Fall abzählbar vieler Lösungen bezeichnet man jede Lösung als Konfiguration. Treten hingegen unendlich viele Lösungen auf, so spricht man von einer Singularität. Ein Berechnungsalgorithmus muss alle diese Fälle gesondert berücksichtigen.

Rein numerische Lösungsverfahren lassen sich auf alle Kinematiken anwenden. Sie weisen jedoch den Nachteil hoher Rechenkosten auf. Außerdem gewinnt man damit keine tiefgreifenden Erkenntnisse über das Auftreten von Singularitäten. Daher konzentrieren sich die Betrachtungen im vorliegenden Buch auf ein analytisches Lösungsverfahren. Dieses ist anwendbar auf die große Klasse von Manipulatoren, bei denen höchstens sechs Gelenke vorhanden sind und bei denen sich die letzten drei Gelenkachsen in einem Punkt schneiden.

Zur Reduzierung der Komplexität wird zunächst die Kinematik in einfacher handhabbare Basiskinematiken zerlegt. In einem zweiten Schritt wird mit der Methode von Pieper das Problem der inversen Kinematik des sechsachsigen Manipulators in zwei Teilprobleme zerlegt: So lässt sich die inverse Kinematik vom Turm bis zur Handwurzel (also die ersten drei Gelenke), entkoppelt von den hinteren drei Gelenken, lösen. Mit Kenntnis der ersten drei Gelenkwinkel und unter Zuhilfenahme des inversen Eulers folgen dann die hinteren drei Gelenkwinkel.

### 3.1 Einführung

Im Mittelpunkt des vorangegangenen Kap. 2 wurde mit der direkten Kinematik Aufgabenstellung (2.24) behandelt:

Gegeben  $n$  Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$ , gesucht die Lage (Position und Orientierung) des mit dem Endeffektor starr verbundenen letzten Manipulatorsegments in Form von  $\tilde{T}_{0n}$ .

Nun wird die Lage des Endeffektors, wie in Abb. 3.1 dargestellt, durch ein zu manipulierendes Objekt oder einen Pfad bzw. eine Kontur vorgegeben bzw. gefordert. Diese *Soll-Lage* wird im Folgenden durch ein hochgestelltes  $\bullet^{\text{soll}}$  markiert. Gesucht werden die dafür notwendigen Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$ , also Abbildung

$$\tilde{T}_{0n}^{\text{soll}} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{0n}^{\text{soll}} & \mathbf{t}_n^{0\text{soll}} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \mapsto \mathbf{q}. \quad (3.1)$$

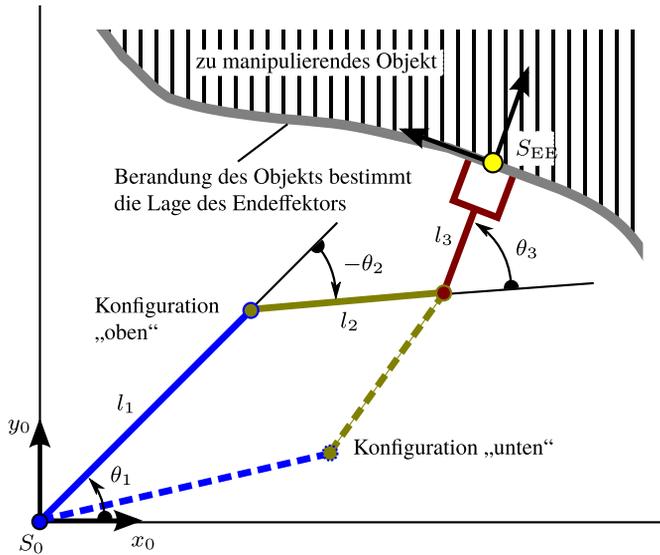
Mathematisch stellt dies das *inverse* Problem zur direkten Kinematik (2.24) dar. Man bezeichnet daher (3.1) als *inverse Kinematik*. Von der direkten Kinematik ist Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{0n}$  und Translationsvektor  $\mathbf{t}_n$  als Funktion der Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$  bekannt. Damit führt (3.1) zu Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{0n}(\mathbf{q}) &= \tilde{R}_{0n}^{\text{soll}} \\ \mathbf{t}_n^0(\mathbf{q}) &= \mathbf{t}_n^{0\text{soll}}. \end{aligned} \quad (3.2a)$$

Bezeichnet man die Komponenten gemäß  $\tilde{R}_{0n} = [r_{ij}]$  und  $\mathbf{t}_n^0 = [t_i]$ , so ergibt sich, auf Komponentenebene aufgelöst, ein Gleichungssystem mit 12 Gleichungen gemäß

$$\begin{aligned} r_{11}(\mathbf{q}) &= r_{11}^{\text{soll}}, & t_1(\mathbf{q}) &= t_1^{\text{soll}} \\ \vdots &, & t_2(\mathbf{q}) &= t_2^{\text{soll}} \\ r_{33}(\mathbf{q}) &= r_{33}^{\text{soll}}, & t_3(\mathbf{q}) &= t_3^{\text{soll}}. \end{aligned} \quad (3.2b)$$

Für Manipulator KR30 sind diese Gleichungen beispielsweise durch (2.28) gegeben.



**Abb. 3.1** Vorgabe von Position und Orientierung für den Endeffektor des 3-DoF-Ellebogen-Manipulators durch die Berandung eines zu manipulierenden Objekts. Es sind zwei Konfigurationen möglich: „oben“ ist mit *durchgezogenen Linien* dargestellt, „unten“ mit gestrichelten Linien. Konfiguration „unten“ ist nicht mit *Gelenkwinkeln* und *Längen* beschriftet

Die Zahl der Unbekannten entspricht Zahl  $n$  der Gelenkvariablen  $q_i$ . In der Regel ist dieses Gleichungssystem stark nichtlinear. Man erhält einen Eindruck von der Komplexität des Problems am Beispiel des anthropomorphen 6-DoF-Manipulators aus Abb. 3.11. Für die ersten drei Elemente der Rotationsmatrix aus (3.2b) ergibt sich so

$$\begin{aligned}
 r_{11}(\boldsymbol{\theta}) &= s_1 (c_5 c_6 s_4 + c_4 s_6) + c_1 (c_6 (c_4 c_5 s_{23} - c_{23} s_5) - s_4 s_6 s_{23}) \stackrel{!}{=} r_{11}^{\text{so}} \\
 r_{12}(\boldsymbol{\theta}) &= c_6 (c_4 s_1 - c_1 s_4 s_{23}) - s_6 (c_5 s_1 s_4 + c_1 (c_4 c_5 s_{23} - c_{23} s_5)) \stackrel{!}{=} r_{12}^{\text{so}} \\
 r_{13}(\boldsymbol{\theta}) &= c_1 (c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23}) + s_1 s_4 s_5 \stackrel{!}{=} r_{13}^{\text{so}} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Daraus wird anschaulich klar, dass das Einsetzverfahren zur Ermittlung einer geschlossenen Lösung<sup>1</sup> ungeeignet ist.

<sup>1</sup> Bei einer geschlossenen analytischen Lösung kann nach der Unbekannten aufgelöst werden, wobei Parameter symbolisch bleiben. Im Unterschied dazu werden bei einer numerischen Lösung für alle Parameter Zahlenwerte eingesetzt, so dass das Ergebnis ebenfalls als Zahlenwert vorliegt.

Gleichungssystem (3.2b) bestimmt die Lage des Endeffektors im Raum. Da hierfür maximal sechs Bewegungsfreiheitsgrade nötig sind, reduziert sich (3.2b) stets auf ein Gleichungssystem mit höchstens 6 linear unabhängigen Gleichungen. Darin tauchen die unbekanntenen Gelenkvariablen im Argument einer Kosinus- oder Sinusfunktion auf, das heißt in Form von

$$c_1, s_1, c_2, s_2 \dots$$

Die speziellen Substitutionen

$$c_i = \frac{1 - \tan \frac{2q_i}{2}}{1 + \tan \frac{2q_i}{2}}, \quad s_i = \frac{2 \tan \frac{q_i}{2}}{1 + \tan \frac{2q_i}{2}}$$

überführen die trigonometrischen Gleichungen aus obigem Gleichungssystem in Polynome mit maximal 12. Ordnung in den neuen Variablen  $t_i = \tan \frac{q_i}{2}$ . Das Einsetzverfahren liefert aus diesen sechs Polynomgleichungen eine einzige Polynomgleichung mit einer Ordnung von bis zu 524 288. Dafür treten ca. 64 000 unterschiedliche Lösungen auf, [5, S. 27–29]. Dies belegt: Das Einsetzverfahren ist wegen der hohen Komplexität nicht zielführend.

Obige Substitution zusammen mit dem Einsetzverfahren wird in der Literatur oft als *algebraisches* Lösungsverfahren bezeichnet. Lässt man hingegen geometrische Eigenschaften einfließen, so spricht man von *geometrischen* Lösungsverfahren. Dabei sind jedoch auch immer *algebraische* Betrachtungen notwendig, so dass eine strikte Trennung zwischen geometrischer und algebraischer Methode nicht sinnvoll ist. Die folgenden Abschn. 3.2 bis 3.5 stellen solche geometrischen Lösungsverfahren dar.

Es können entweder keine, abzählbar viele oder sogar unendlich viele Lösungen  $\mathbf{q}$  auftreten: Beispielsweise existiert im Fall von Abb. 3.1 keine Lösung, wenn die geforderte Endeffektorposition vom Ursprung des Weltkoordinatensystems weiter als  $l_1 + l_2 + l_3$  entfernt sein soll. Dieser Fall wird weiter unten als *Begrenzungs-Singularität* eingeführt, die vom Endeffektor erreichbaren Positionen bzw. Orientierungen als *Positionsarbeitsraum* bzw. *Orientierungsarbeitsraum*<sup>2</sup>.

Für den Fall abzählbar vieler Lösungen  $\mathbf{q}_i$  wird hier Lösungsmenge  $\mathbb{K} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_K\}$  eingeführt. Jede Lösung führt dabei zu einer unterschiedlichen Lage bzw. *räumlichen Konfiguration* der unteren  $n - 1$ -Manipulatorsegmente, um die geforderte Position und Orientierung des Endeffektors einzustellen. Daher bezeichnet man die Elemente aus  $\mathbb{K}$  als *Konfigurationen*.

<sup>2</sup> Der Begriff *Arbeitsraum* wird in Kap. 6 definiert und ausführlich behandelt; er betrachtet im Allgemeinen nicht nur die vom Endeffektor erreichbaren Positionen, sondern auch dessen erreichbare Orientierungen.

Beispielsweise treten im Fall von Abb. 3.1 die beiden Konfigurationen „oben“ und „unten“ auf. Die gestrichelten Linien kennzeichnen dabei die zweite mögliche Konfiguration. Sie kann graphisch durch den Schnittpunkt der beiden gestrichelt eingezeichneten Kreissegmente konstruiert werden.

Bei mehr als drei Gelenken können auch mehr als zwei Konfigurationen auftreten. So zeigt Abb. 3.2 für die  $KR30$ -Kinematik insgesamt acht Konfigurationen für ein und dieselbe Endeffektorlage. Da es sich um einen anthropomorphen Manipulator handelt, spricht man hier von den Konfigurationen „Ellbogen oben“/„Ellbogen unten“ – je nachdem ob das Ellenbogengelenk (Gelenk 3) nach oben oder nach unten geknickt ist: Die oberen vier Darstellungen aus Abb. 3.2 gehören damit zur Konfiguration „Ellbogen oben“, die unteren vier zur Konfiguration „Ellbogen unten“.

Neben der Ellenbogen-Konfiguration gibt es noch die Konfiguration „Turm links“ (linke Spalte von Abb. 3.2) und „Turm rechts“ (rechte Spalte von Abb. 3.2).

Als dritte und letzte Konfiguration unterscheidet man „Hand links“ (1. und 3. Zeile von Abb. 3.2) und „Hand rechts“ (2. und 4. Zeile von Abb. 3.2). Zur Unterscheidung dieser beiden Konfigurationen ist in Abb. 3.2 das vorletzte Manipulatorsegment auf der einen Seite grün, auf der anderen Seite grau gefärbt.

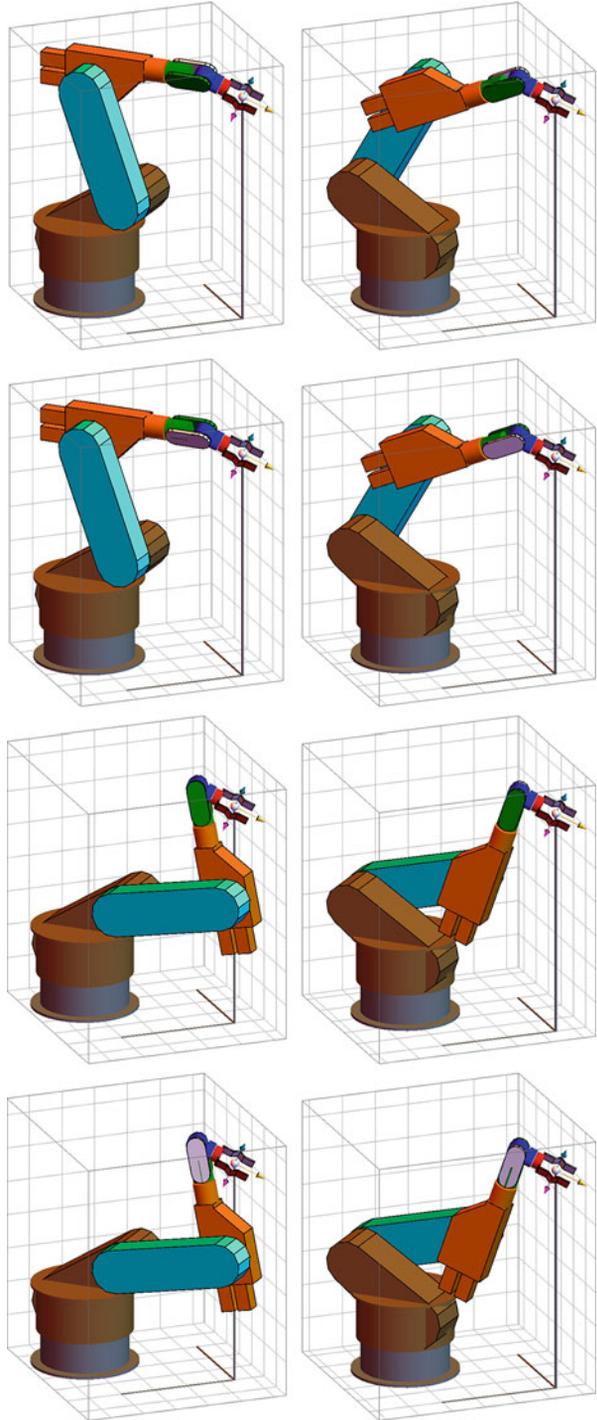
Die Zuordnung der Konfiguration zu „links“ bzw. „rechts“ erfolgt individuell. Hinter der Berechnungsvorschrift steckt der *inverse Euler*-Algorithmus. Anstelle von „links“/„rechts“ verwendet man daher für die unterschiedlichen Konfigurationen der Hand auch einfach „1“/„2“.

In bestimmten Fällen können nicht nur *abzählbar viele*, sondern auch *unendlich viele* bzw. *nicht abzählbar viele* Lösungen auftreten. Solche ausgewiesenen Positionen des Manipulators bezeichnet man als *Singularitäten*.

Eine solche Singularität trat bereits in Abschn. 2.3.4 in Form der Euler-Singularität bei ZYZ Euler-Winkeln  $\beta \in \{0, \pi\}$  auf: Für eine geforderte Orientierung  $\tilde{R}^{\text{soll}}$  können auf dieser Singularität nur Summe oder Differenz  $\alpha \pm \gamma$  nach (2.22) bestimmt werden. Mathematisch stellt dies eine eindimensionale Lösungsvielfalt dar, das heißt  $\alpha$  und  $\gamma$  können alle Werte auf einer Geraden einnehmen.

Diese drei unterschiedlichen Lösungsfälle (keine Lösung, mehrere abzählbar viele Lösungen, unendlich viele Lösungen bzw. Singularität) werden im folgenden Beispiel 3.1 verdeutlicht. Das Beispiel demonstriert auch den hohen Aufwand zum direkten Lösen von Gleichungssystem (3.2b).

**Abb. 3.2** Acht unterschiedliche Konfigurationen von KR30. Dabei befindet sich der Endeffektor stets in derselben Lage



**Beispiel 3.1.** Berechnung der inversen Kinematik für den planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Abb. 3.1 durch Lösen von Gleichungssystem (3.2b).

Mit der direkten Dynamik aus Beispiel 2.20 folgt Gleichungssystem (3.2b) zu

$$\begin{aligned} c_{123} &= r_{11}^{\text{soll}} \\ -s_{123} &= r_{12}^{\text{soll}} \\ s_{123} &= r_{21}^{\text{soll}} \\ c_{123} &= r_{22}^{\text{soll}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} &= t_1^{\text{soll}} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} &= t_2^{\text{soll}}. \end{aligned}$$

Da sich der Endeffektor nur in einer Ebene bewegen kann, reduziert sich die Zahl der Gleichungen von 12 des allgemeinen 3D-Falls auf 4 im 2D-Fall. Der Endeffektor kann sich nur um die  $z_0$ -Achse drehen. Daher muss  $r_{11} = r_{22}$  und  $r_{21} = -r_{12}$  gelten (vergleiche Elementar-Rotation  $\text{Rot}_z$  aus Abschn. 2.3.2). Damit entfallen obige zweite und vierte Gleichung. Elimination von  $s_{123}$  und  $c_{123}$  liefert

$$\begin{aligned} l_1 c_1 + l_2 c_{12} &= t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} &= t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Durch Quadrieren erhält man

$$\begin{aligned} l_1^2 c_1^2 + 2 l_1 l_2 c_1 c_{12} + l_2^2 c_{12}^2 &= (t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 \\ l_1^2 s_1^2 + 2 l_1 l_2 s_1 s_{12} + l_2^2 s_{12}^2 &= (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2. \end{aligned}$$

Addiert man beide Gleichungen, so folgt unter Ausnutzung des trigonometrischen Pythagoras<sup>3</sup>

$$l_1^2 + 2 l_1 l_2 (c_1 c_{12} + s_1 s_{12}) + l_2^2 = (t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 + (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2.$$

Mit den Additionstheoremen lässt sich der mittlere Teil weiter vereinfachen und man erhält schließlich

$$\begin{aligned} l_1^2 + 2 l_1 l_2 c_2 + l_2^2 &= (t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 + (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2 \\ \implies \cos \theta_2 &= \frac{(t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 + (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} \\ \implies \theta_{2,2} &= \pm \arccos \left( \frac{(t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 + (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} \right). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

Fazit: Es existiert nur dann eine Lösung, wenn das Argument des arccos betragsmäßig nicht größer 1 ist, das heißt für

$$\text{Existenzbedingung 1: } \left| \frac{(t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 + (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2} \right| \leq 1$$

$$\iff (l_1 - l_2)^2 \leq (t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}})^2 + (t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}})^2 \leq (l_1 + l_2)^2$$

Zur Berechnung des ersten Gelenkwinkels wird  $s_{12}$  aus der zweiten Gleichung von (3.4) mittels Additionstheorem umgeformt zu

$$\begin{aligned} l_1 s_1 + l_2 (s_1 c_2 + c_1 s_2) &= t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}} \\ \implies l_1 s_1 + l_2 s_1 c_2 \pm l_2 c_1 \sqrt{1 - c_2^2} &= t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}} \\ \implies s_1 (l_1 + l_2 c_2) \pm c_1 l_2 \sqrt{1 - c_2^2} &= t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}}. \end{aligned}$$

Analog ergibt die erste Gleichung von (3.4)

$$\begin{aligned} l_1 c_1 + l_2 (c_1 c_2 - s_1 s_2) &= t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}} \\ \implies l_1 c_1 + l_2 c_1 c_2 \mp l_2 s_1 \sqrt{1 - c_2^2} &= t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}} \\ \implies \mp s_1 l_2 \sqrt{1 - c_2^2} + c_1 (l_1 + l_2 c_2) &= t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_2 & \pm l_2 \sqrt{1 - c_2^2} \\ \mp l_2 \sqrt{1 - c_2^2} & l_1 + l_2 c_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} s_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}} \\ t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\implies \begin{pmatrix} s_{1,2} \\ c_{1,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{l_1^2 + 2 l_1 l_2 c_2 + l_2^2} \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_2 & \mp l_2 \sqrt{1 - c_2^2} \\ \pm l_2 \sqrt{1 - c_2^2} & l_1 + l_2 c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_2^{\text{soll}} - l_3 r_{21}^{\text{soll}} \\ t_1^{\text{soll}} - l_3 r_{11}^{\text{soll}} \end{pmatrix}$$

$$\implies \theta_{1,2} = \arctan2(c_{1,2}, s_{1,2}).$$

Diese Lösung gilt nur, solange die Determinante von Matrix  $\tilde{A}$  nicht verschwindet, also für

$$\text{Det}(\tilde{A}) = l_1^2 + 2 l_1 l_2 c_2 + l_2^2 \neq 0 \iff c_2 \neq -\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} 0 \leq (l_1 - l_2)^2 = l_1^2 - 2 l_1 l_2 + l_2^2 &\iff -l_1^2 - l_2^2 \leq -2 l_1 l_2 \\ \iff -\frac{l_1^2 + l_2^2}{2 l_1 l_2} &\leq -1 \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\text{Det}(A)_{l_1=l_2} \neq 0 \iff \theta_2 \neq -\pi.$$

Für  $l_1 = l_2$  und  $\theta_2 = -\pi$  ergibt sich nicht nur  $\text{Det}(\tilde{A}) = 0$ , sondern sogar  $\tilde{A} = \tilde{0}$ . Verschwindet auch die rechte Seite von (3.5), kann also  $\theta_1$  beliebige Werte annehmen. Verschwindet hingegen die rechte Seite nicht, so existiert keine Lösung. Dies führt zu

$$\text{Existenzbedingung 2: } l_1 = l_2 \wedge \theta_2 = -\pi \implies t_1^{\text{soll}} = l_3 r_{11}^{\text{soll}} \wedge t_2^{\text{soll}} = l_3 r_{21}^{\text{soll}}$$

Da in diesem Fall für  $\theta_2$  nicht abzählbar viele Lösungen existieren, liegt eine Singularität vor.

Für erfüllte Existenzbedingungen 1 und 2 kann der noch fehlende dritte Gelenkwinkel mit Hilfe der ersten beiden Gelenkwinkel und (3.3) durch

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \arctan2(r_{11}^{\text{soll}}, r_{21}^{\text{soll}}) \\ \implies \theta_{3,1,2} &= \arctan2(r_{11}^{\text{soll}}, r_{21}^{\text{soll}}) - \theta_{1,1,2} - \theta_{2,1,2} \end{aligned}$$

berechnet werden.

Für Parameterwerte  $l_1 = 0.3$ ,  $l_2 = 0.25$ ,  $l_3 = 0.15$  sowie einer durch

$$\tilde{R}_{03}^{\text{soll}} = \begin{bmatrix} 0.258819 & -0.965926 & 0 \\ 0.965926 & 0.258819 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad t_3^{0\text{soll}} = \begin{pmatrix} 0.492436 \\ 0.421726 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geforderten Lage sind beide Existenzbedingungen erfüllt und es ergeben sich nach obigen Formeln die beiden Lösungen bzw. Konfigurationen:

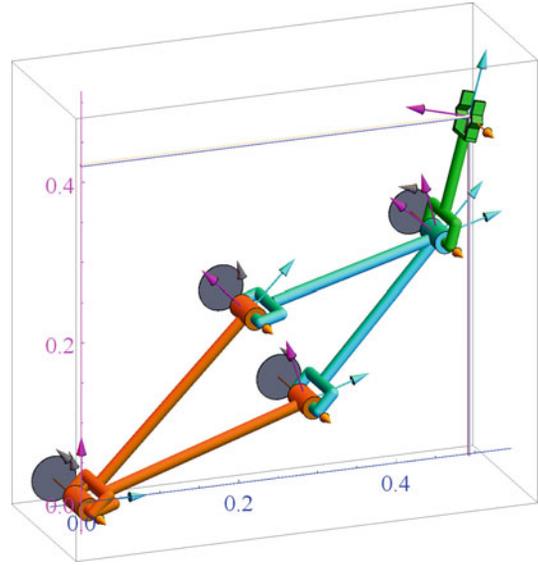
$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 17.7908^\circ \\ 30^\circ \\ 27.2092^\circ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 45^\circ \\ -30^\circ \\ 60^\circ \end{pmatrix}.$$

In Abb. 3.3 ist dabei Konfiguration „unten“ durch  $\theta_1$ , Konfiguration „oben“ durch  $\theta_2$  gegeben. ◀

Das vorangegangene Beispiel verdeutlicht den großen Aufwand zum direkten Lösen von Gleichungssystem (3.2b). Dabei konnte die Lösung überhaupt nur wegen des Vorliegens eines Sonderfalls ermittelt werden: So liegen nur drei Drehachsen vor und diese sind auch noch parallel zueinander angeordnet.

Ein weiterer Nachteil beim hier eingeschlagenen direkten Lösungsverfahren liegt in der rein analytischen Betrachtung der inversen Kinematik. Dies lässt keine geometrischen Interpretationen der beiden Existenzbedingungen sowie der Singularität zu.

**Abb. 3.3** Zwei Lösungen bzw. Konfigurationen am Beispiel des planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulators. Die Endeffektorlage ist in beiden Fällen identisch



Für die inverse Kinematik sind geschlossene/explicite analytische Lösungen gewünscht. Man sucht also für jede Gelenkvariable  $q_i$  eine Funktion  $f_i$  der gegebenen Werte von  $\tilde{R}_{0n}^{\text{soll}}$  und  $t_n^{\text{soll}}$  gemäß

$$q_i = f_i(\tilde{R}_{0n}^{\text{soll}}, t_n^{\text{soll}}), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Falls man nicht zu so einer analytischen Lösung kommt, sind numerische Lösungen die zweite Wahl. Dabei werden Werte für die Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$  so gesucht, dass alle Gleichungen aus (3.2b) eingehalten werden. Im Prinzip führt dies auf das Optimierungsproblem

$$J^* = \min_{\mathbf{q}} J(\tilde{R}_{0n}^{\text{soll}}, t_0^{\text{soll}}) \quad (3.6)$$

mit Gütefunktion

$$J(\tilde{R}_{0n}^{\text{soll}}, t_0^{\text{soll}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (r_{ij}(\mathbf{q}) - r_{ij}^{\text{soll}})^2 + \sum_{i=1}^3 (t_i(\mathbf{q}) - t_i^{\text{soll}})^2.$$

Die dabei gefundene numerische Lösung für  $\mathbf{q}$  ist dann zulässig, wenn  $J^*$  im Rahmen der numerischen Genauigkeit ausreichend nahe an Null herankommt.

Numerische Suchverfahren starten typischerweise bei einem vorgegebenen Startpunkt  $\mathbf{q}_0$  und suchen von dort aus in iterativen Schritten neue Werte  $\mathbf{q}_k$  so, dass  $J(\mathbf{q}_0) > J(\mathbf{q}_1) > \dots > J(\mathbf{q}_k) > \dots$ . Konvergiert diese Folge gegen 0, so ist eine

zulässige Lösung gefunden. Diese hängt damit vom Startpunkt  $q_0$  ab. Die Zugehörigkeit einer so gefundenen zulässigen Lösung zu einer bestimmten Konfiguration ist dabei unklar und hängt ebenfalls vom Startpunkt ab.

Ein Vorteil numerischer Lösungsverfahren besteht darin, dass sie für praktisch alle Kinematiken anwendbar sind. Demgegenüber sind geschlossene analytische Lösungen nur für Sonderfälle bekannt. Die Vorteile gegenüber numerischen Lösungen sind:

- Geringerer numerischer Berechnungsaufwand: Die numerische Berechnung von (3.6) wird in der Regel mit mindestens 30 Hz und mit bis zu 10 kHz durchgeführt; 30 Hz: Bildverarbeitung und Bahnplanung; 10 kHz: mechanisch agile Systeme mit Krafrückkopplungen/Kinästhetik.
- Es kann gezielt die richtige Konfiguration berechnet werden. Wie bereits oben erwähnt, liefern numerische Verfahren je nach Startpunkt nur „irgendeine“ Konfiguration.
- Aus analytisch vorliegenden Existenzbedingungen kann unmittelbar auf die Existenz einer Lösung geschlossen werden.  
Bei numerischen Verfahren kann man nicht unterscheiden, ob der Optimierungsalgorithmus aufgrund eines ungünstigen Anfangspunkts nicht gegen Null konvergiert, oder ob es schlicht keine Lösung gibt.
- Bereiche, in denen Singularitäten auftreten, müssen gesondert behandelt werden. Eine analytische Lösung liefert das dazu notwendige tiefgreifende Verständnis über mögliche Auswirkungen von Singularitäten.

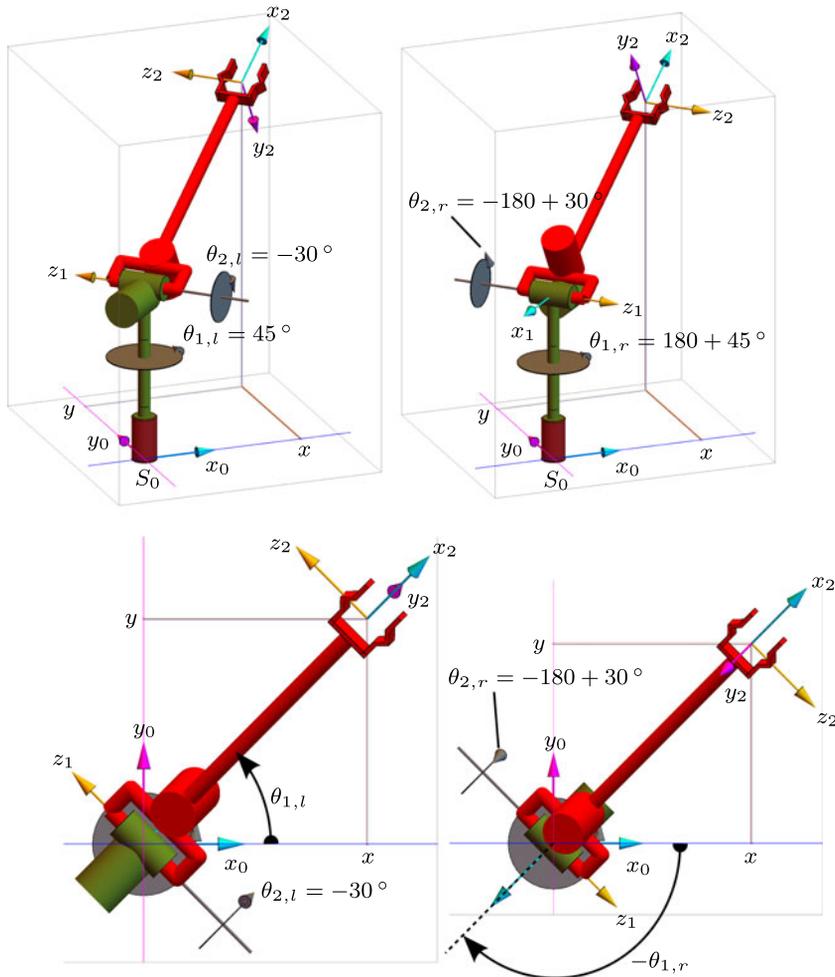
Oben genannte Vorteile einer analytischen Lösung wiegen so schwer, dass sich sogar oftmals die mechanische Konstruktion danach richtet. So existieren für den folgenden kinematischen Sonderfall Rezepte zur Ermittlung einer analytischen Lösung:

- Anzahl Gelenkachsen  $n \leq 6$  und
- Drei hintereinander liegende Gelenkachsen schneiden sich in einem Punkt. Dies trifft oft für die letzten drei Gelenkachsen zu.

In den folgenden Abschnitten wird die inverse Kinematik durch geometrische Betrachtungen für verschiedene Basiskinematiken hergeleitet. Basiskinematiken stellen dabei typische Gelenkkonfigurationen dar. Größere Manipulatoren können aus diesen Basiskinematiken zusammengesetzt werden. Damit kann auch die inverse Kinematik aus den inversen Basiskinematiken zusammengesetzt werden.

### 3.2 Basiskinematik 1: Dreh-Neigegelenk

Für das Dreh-Neigegelenk aus Abb. 3.4 soll aus einer gegebenen Endeffektorposition  $(x, y)$  der Turm-Drehen-Winkel  $\theta_1$  bestimmt werden. Wie aus Abb. 3.4 ersichtlich, kann ein und dieselbe Endeffektorposition durch zwei unterschiedliche Konfigurationen erreicht werden. Dabei ist zu beachten, dass hier nur die Position des Endeffektors gleich ist, die Orientierung jedoch variiert.



**Abb. 3.4** Basiskinematik 1 (Dreh-Neigegelenk). *Links-oben*: Konfiguration „links“; *links-unten*: Konfiguration „links“ aus Sicht von oben; *rechts-oben*: Konfiguration „rechts“; *rechts-unten*: Konfiguration „rechts“ aus Sicht von oben. Auf beide Manipulatorsegmente wurde jeweils eine zylinderförmige Verdickung in der Nähe von Gelenk 2 angebracht, damit beide Konfigurationen leichter unterschieden werden können

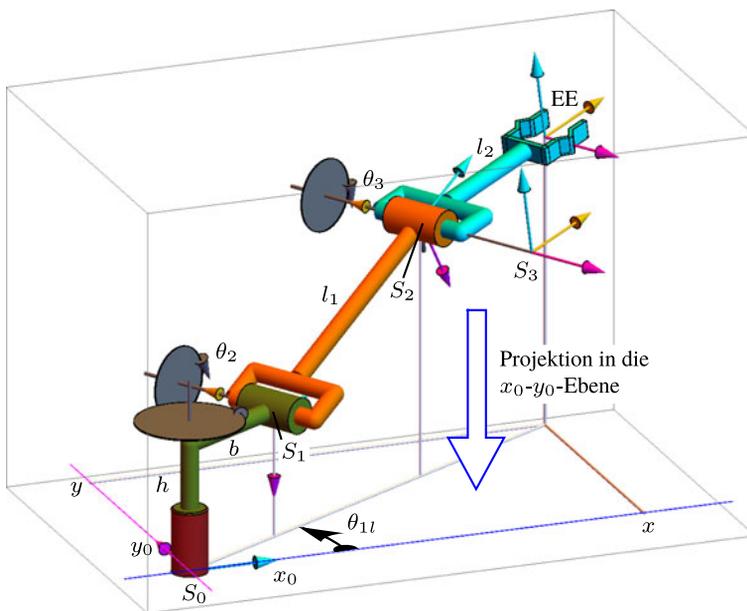
Die unteren Teilskizzen von Abb. 3.4 zeigen jeweils die Vogelperspektive der darüber liegenden Teilskizze. Aus dieser Projektion des Manipulators auf die  $z_0 = 0$ -Ebene kann Gelenkwinkel  $\theta_1$  einfach berechnet werden mit

$$\theta_{1,l} = \begin{cases} \arctan2(x, y) & \text{für } x, y \neq 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = y = 0 \quad (= \text{Singularität}) \end{cases}$$

$$\theta_{1,r} = \begin{cases} \theta_{1,l} - \pi & \text{für } \theta_{1,l} > 0 \\ \theta_{1,l} + \pi & \text{für } \theta_{1,l} \leq 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } \theta_{1,l} \text{ nicht definiert } (= \text{Singularität}), \end{cases}$$

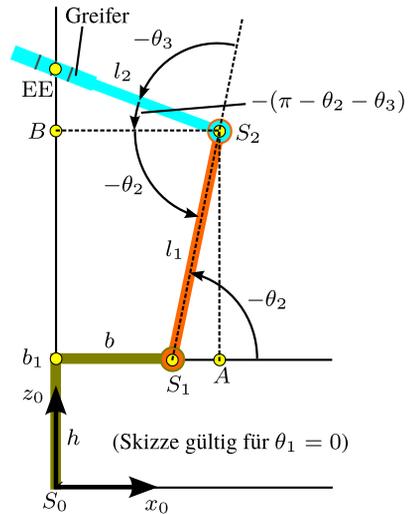
wobei  $\theta_{1,l}$  als Konfiguration „links“ und  $\theta_{1,r}$  als Konfiguration „rechts“ bezeichnet wird. Liegt der Endeffektor über dem Ursprung von  $S_0$ , so ergibt sich als Projektion des Manipulators lediglich der Ursprung als einzelner Punkt. In diesem Sonderfall kann  $\theta_1$  beliebige Werte annehmen, so dass eine Singularität vorliegt.

Nun wird Basiskinematik 1 um zusätzliche Neigeelenke erweitert, die dem zweiten Gelenk nachfolgend angeordnet sein sollen. Die Drehachsen dieser zusätzlichen Neigeelenke sollen dabei alle parallel zu  $z_1$  verlaufen. Abb. 3.5 zeigt ein Beispiel einer solchen Erweiterung mit einem zusätzlichen Neigeelenk. Aus der Abbildung wird unmittelbar



**Abb. 3.5** Ermittlung des ersten Gelenkwinkels des artikulierten 3-DoF Ellenbogen-Manipulators durch Projekt der räumlichen Endeffektorposition auf die  $x_0$ - $y_0$ -Ebene

**Abb. 3.6** Singularität bei Basiskinematik 1. Dargestellt ist die Frontansicht für  $\theta_1 = 0$



klar: Die beiden Neigegelenke ( $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ) können die Projektion der Endeffektorposition auf die  $x_0$ - $y_0$ -Ebene nur entlang einer Geraden verändern – die Orientierung bleibt gleich. Daher bleibt obiges Berechnungsschema auch für den so erweiterten Manipulator gültig.

**Beispiel 3.2.** Bei dem Manipulator aus Abb. 3.5 tritt die Singularität von Basiskinematik 1 ein, wenn der Endeffektor auf der  $z_0$ -Achse zu liegen kommt. Abb. 3.6 zeigt eine solche Konfiguration für  $\theta_1 = 0$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \overline{b_1 A} &= b + l_1 \cos(-\theta_2) \stackrel{!}{=} \overline{B S_2} = l_2 \cos(-(\pi - \theta_2 - \theta_3)) \\ \iff b + l_1 \cos(\theta_2) &\stackrel{!}{=} -l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

Ein Plausibilitätscheck ergibt als Singularitätsbedingung bei horizontaler Ausrichtung:

$$\theta_2 = 0, \theta_3 = \pi \iff b + l_1 \stackrel{!}{=} l_2. \quad \triangleleft$$

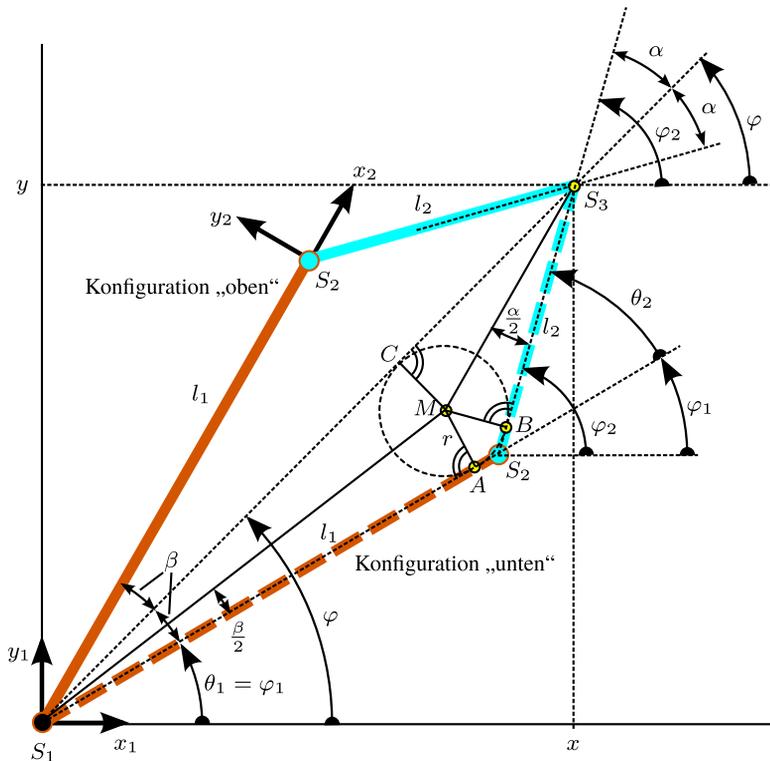
Mit Basiskinematik 1 lässt sich durch Projektion des Manipulators auf die  $z_0 = 0$ -Ebene Gelenkwinkel  $\theta_1$  bestimmen. Für einen Manipulator wie in Abb. 3.5 dargestellt kann damit  $\tilde{T}_{01}(\theta_1)$  bestimmt werden. Von  $S_1$  aus gesehen bewegt sich der Endeffektor durch die beiden Neigewinkel  $\theta_2$  und  $\theta_3$  nur in der  $x_1$ - $y_1$ -Ebene. Aus diesem Grund betrachtet man die Endeffektorposition in  $S_1$ -Koordinaten. Mit bekanntem  $\theta_1$  und  $\tilde{T}_{0EE}$  ergibt sich die dafür notwendige Umrechnungsvorschrift zu

$$\tilde{T}_{1EE} = \tilde{T}_{10}(\theta_1) \tilde{T}_{0EE} = \tilde{T}_{01}^{-1}(\theta_1) \tilde{T}_{0EE}.$$

Wie man damit die beiden Neigewinkel  $\theta_2$  und  $\theta_3$  berechnen kann, wird im nachfolgenden Abschnitt unter Ausnutzung diverser trigonometrischer Beziehungen hergeleitet.

### 3.3 Basiskinematik 2: Zwei parallele Drehgelenkachsen/planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator

Abb. 3.7 zeigt die als Basiskinematik 2 bezeichnete Gelenkanordnung. Sie entspricht einem planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator. Diese Kinematik tritt häufig in Kombination mit Basiskinematik 1 in Form des artikulierten 3-DoF Ellenbogen-Manipulators aus Abb. 3.5 auf. Daher ist die betrachtete Kinematik aus den letzten beiden Manipulatorsegmenten des Manipulators aus Abb. 3.5 zusammengesetzt, wobei der Greifer nicht dargestellt ist. Diese beiden Manipulatorsegmente bewegen sich ausschließlich in der  $x_1$ - $y_1$ -Ebene, so dass in Abb. 3.7 als Bezugskoordinatensystem  $S_1$  gewählt ist. Aus darstellungstechnischen Gründen sind in Abb. 3.7 andere Armlängen als in Abb. 3.5 zugrunde gelegt. Außerdem wurde beim Übergang der Darstellung von Abb. 3.5 auf Abb. 3.7 der Index der Gelenkwinkel um 1 reduziert, das heißt:  $\theta_2 \rightarrow \theta_1$  und  $\theta_3 \rightarrow \theta_2$ .



**Abb. 3.7** Basiskinematik 2: planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator; hier dargestellt durch die oberen beiden Manipulatorsegmente von Abb. 3.5 in  $S_1$ -Koordinaten, wobei der Greifer weggelassen wurde; Konfiguration „unten“ ist gestrichelt gekennzeichnet

Man erkennt aus Abb. 3.7, dass für ein und dieselbe Endeffektorposition die beiden unterschiedlichen Konfigurationen „oben“ und „unten“ (gestrichelt gekennzeichnet) möglich sind.

Die inverse Kinematik von Basiskinematik 2 besteht aus folgender Aufgabe: Gegeben die Koordinaten  $(x; y)$  des Endeffektorursprungs in Bezugskoordinaten (hier  $S_1$ ), gesucht  $\theta_1$  und  $\theta_2$ .

Dafür existiert folgendes Standardlösungsverfahren: Zunächst werden Hilfswinkel  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  eingeführt:

$$\begin{array}{ll} \text{„unten“:} & \text{„oben“:} \\ \varphi_1 = \varphi - \beta & \varphi_1 = \varphi + \beta \\ \varphi_2 = \varphi + \alpha & \varphi_2 = \varphi - \alpha \end{array}$$

Ein weiterer Hilfswinkel  $\varphi$  ergibt sich sofort aus Abb. 3.7 zu

$$\varphi = \arctan 2(x, y) \quad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als zusätzliche Hilfsgröße wird von Dreieck  $\triangle(S_1, S_2, S_3)$  der halbe Umfang  $p$  sowie der Inkreisradius  $r$  (zur Herleitung von  $r$  siehe mathematische Standard-Formelsammlungen) benötigt:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{2} (l_1 + l_2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \\ r(x, y) &= \sqrt{\frac{(p - l_1)(p - l_2)(p - \sqrt{x^2 + y^2})}{p}}. \end{aligned}$$

Durch Nutzung spezieller Eigenschaften am Dreieck  $\triangle(S_1, S_2, S_3)$  durch den Inkreis (Mittelpunkt  $M$ ) folgt für die Hilfswinkel

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= 2 \arctan \frac{r(x, y)}{p(x, y) - l_1} \\ \beta(x, y) &= 2 \arctan \frac{r(x, y)}{p(x, y) - l_2}, \end{aligned}$$

siehe die Herleitung am Ende dieses Abschnitts. Eingesetzt ergibt sich schließlich die gesuchte inverse Kinematik

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \varphi_1 = \varphi \pm \beta = \arctan 2(x, y) \pm 2 \arctan \frac{r(x, y)}{p(x, y) - l_2} \\ \theta_2 &= \varphi_2 - \varphi_1 = \mp(\alpha + \beta) = \mp 2 \left( \arctan \frac{r(x, y)}{p(x, y) - l_1} + \arctan \frac{r(x, y)}{p(x, y) - l_2} \right). \end{aligned}$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen für Konfiguration „oben“, das untere Vorzeichen für Konfiguration „unten“.

Damit Inkreisradius  $r(x, y)$  existiert, darf der darin enthaltene Radiant nicht negativ werden. Aus dieser Forderung folgt

$$\text{Existenzbedingung: } |l_1 - l_2| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq l_1 + l_2,$$

siehe Herleitung am Ende dieses Abschnitts. Diese Existenzbedingung schränkt die vom Endeffektor erreichbaren kartesischen Positionen ein, so dass man von *Arbeitsraumbeschränkungen* spricht.

Abb. 3.8 illustriert die Arbeitsraumbeschränkungen im Falle  $l_1 > l_2$ . Nur der graue Bereich kann vom Endeffektor erreicht werden, so dass auch nur in diesem Bereich eine Lösung für die inverse Kinematik existiert. In der inneren kreisförmigen Aussparung gilt  $\sqrt{x^2 + y^2} < l_1 - l_2$ . Außerhalb des größten Kreises gilt hingegen  $\sqrt{x^2 + y^2} > l_1 + l_2$ .

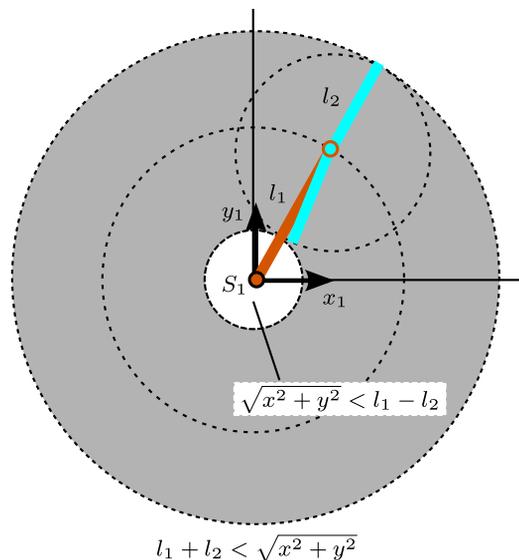
Im Sonderfall  $x = y = 0$  existiert nur für  $l_1 = l_2$  eine Lösung. In diesem Fall ist  $\varphi$  undefiniert und es tritt die (nicht abzählbare) Lösungsvielfalt

$$\theta_2 = \mp \pi, \quad \theta_1 : \text{frei/unbestimmt}$$

auf. Es handelt es sich also um eine Singularität von Basis-Kinematik 2.

In Aufgabe 3.1 wird die inverse Kinematik durch ein Nassi-Shneiderman-Struktogramm beschrieben.

**Abb. 3.8** Arbeitsraum des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators aus Abb. 3.7. Eingezeichnet ist die ausgestreckte Position  $\theta_2 = 0$  sowie eine fast ganz eingefaltete Position  $\theta_2 = 185^\circ$ . Der Arbeitsraum ist *grau* gekennzeichnet



*Herleitung von  $\alpha(x, y)$  und  $\beta(x, y)$ :* Dreiecke  $\triangle(S_1, A, M)$  und  $\triangle(B, M, S_3)$  sind rechtwinklig. Daher gilt jeweils

$$\frac{\beta}{2} = \arctan \frac{r}{\overline{S_1 A}} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{r}{\overline{S_3 B}}.$$

Für die darin enthaltene Streckenlänge gilt  $\overline{S_1 A} = p - l_2$ :

$$\begin{aligned} p - l_2 &= \frac{\overline{S_1 S_3} + l_1 + l_2}{2} - l_2 = \frac{\overline{S_1 S_3} + l_1}{2} - \frac{l_2}{2} \\ &= \frac{\overline{S_1 C} + \overline{C S_3} + \overline{S_1 A} + \overline{A S_2}}{2} - \frac{\overline{S_2 B} + \overline{B S_3}}{2} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt  $\overline{S_1 C} = \overline{S_1 A}$ ,  $\overline{C S_3} = \overline{B S_3}$  und  $\overline{A S_2} = \overline{S_2 B}$ . Damit folgt weiter:

$$p - l_2 = \frac{\overline{S_1 A} + \overline{B S_3} + \overline{S_1 A} + \overline{S_2 B}}{2} - \frac{\overline{S_2 B} + \overline{B S_3}}{2} = \overline{S_1 A}.$$

Analog zeigt man leicht  $\overline{S_3 B} = p - l_1$ .

*Herleitung der Existenzbedingung:* Damit die inverse Kinematik existiert, muss der Inkreisradius  $r(x, y)$  definiert sein, das heißt der enthaltene Radiant darf nicht negativ sein:

$$\frac{(p - l_1)(p - l_2)(p - \sqrt{x^2 + y^2})}{p} \geq 0.$$

Wegen  $p > 0$  ist dies erfüllt, wenn alle Linearfaktoren des Zählers positiv sind (Fall 1) oder wenn zwei negativ sind und einer positiv ist (Fall 2).

Fall 1: Alle Linearfaktoren des Zählers sind positiv. Dabei lässt sich Teilforderung  $p - l_1 \geq 0 \wedge p - l_2 \geq 0$  zusammenfassen gemäß:

$$\begin{aligned} p - l_1 &= \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + \sqrt{x^2 + y^2}) - l_1 = \frac{1}{2}(-l_1 + l_2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \stackrel{!}{\geq} 0 \\ \iff \sqrt{x^2 + y^2} &\geq l_1 - l_2 \\ p - l_2 &= \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + \sqrt{x^2 + y^2}) - l_2 = \frac{1}{2}(l_1 - l_2 + \sqrt{x^2 + y^2}) \stackrel{!}{\geq} 0 \\ \iff \sqrt{x^2 + y^2} &\geq -(l_1 - l_2) \\ \iff \sqrt{x^2 + y^2} &\geq \max(\pm(l_1 - l_2)) = |l_1 - l_2|. \end{aligned}$$

Aus dem dritten Linearfaktor folgt

$$p - \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \stackrel{!}{\geq} 0 \iff \sqrt{x^2 + y^2} \leq l_1 + l_2.$$

Fall 2: Zwei Linearfaktoren des Zählers sind negativ, einer ist positiv. Der dritte Linearfaktor kann nicht negativ werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S_1 S_3} &= \mathbf{S_1 S_2} + \mathbf{S_2 S_3} \\ \implies \sqrt{x^2 + y^2} &= |\mathbf{S_1 S_3}| = |\mathbf{S_1 S_2} + \mathbf{S_2 S_3}| \leq |\mathbf{S_1 S_2}| + |\mathbf{S_2 S_3}| = l_1 + l_2 \\ \iff l_1 + l_2 - \sqrt{x^2 + y^2} &= 2(p - \sqrt{x^2 + y^2}) \geq 0 \end{aligned}$$

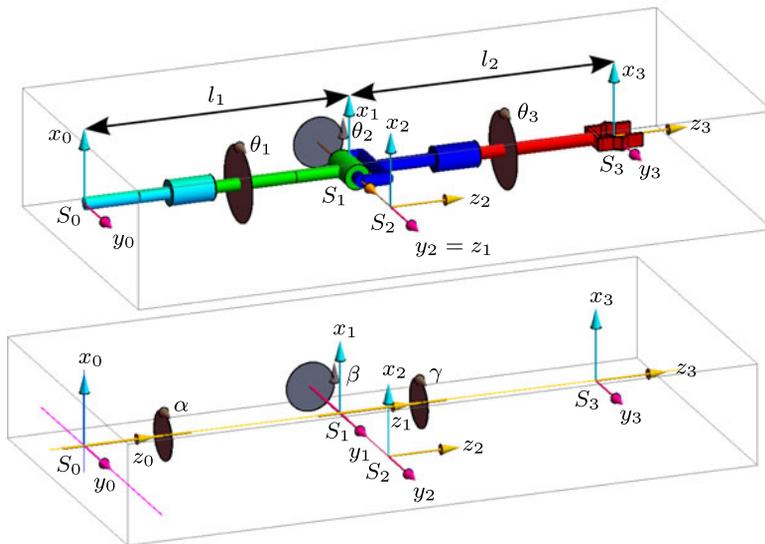
Falls die ersten beiden Linearfaktoren gleichzeitig negativ sein sollen, gilt analog zu obigem Fall 1:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &\leq l_1 - l_2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &\leq -(l_1 - l_2) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} &\leq \min(\pm(l_1 - l_2)) = -|l_1 - l_2|.\end{aligned}$$

Dies stellt aber einen Widerspruch dar, da Wurzeln keine negativen Werte annehmen können. Vorliegender Fall 2 liefert also keine weitere Lösung.

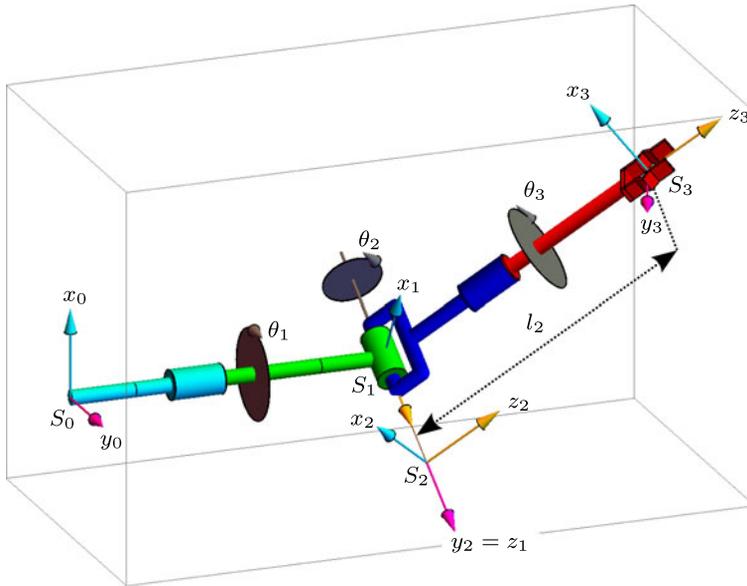
### 3.4 Basiskinematik 3: Pseudo-Kugelgelenk

In diesem Abschnitt wird die in Abb. 3.9 (oben) dargestellte Kinematik als Basiskinematik 3 eingeführt. Sie besteht aus der Bewegungsfolge Drehen (um die Längsachse) – Neigen<sup>4</sup> – Drehen. Ursprünge  $S_1$  und  $S_2$  fallen zusammen. Zur Übersicht ist  $S_2$  in Richtung der  $z_1$ -Achse etwas verschoben dargestellt. In Aufgabe 2.15 werden die DH-Parameter bestimmt.



**Abb. 3.9** Zwei äquivalente Darstellungen von Basis-Kinematik 3. Die Darstellungen unterscheiden sich durch Koordinatensysteme und Gelenkwinkel: *Oben* nach DH, *unten* nach ZYZ Euler

<sup>4</sup> Namenszusatz „Neigen“ wird hier verwendet, da das Gelenk in Nullposition so orientiert ist, dass sich eine Neigebewegung ergibt.



**Abb. 3.10** Darstellung von  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 45^\circ$ ,  $\theta_3 = -30^\circ$  zur Veranschaulichung, dass jede Orientierungsänderung mit einer Positionsänderung einhergeht. Dabei gilt: Je größer  $l_2$ , desto größer die Positionsänderung

Die Besonderheit dieser Kinematik ist, dass sich alle drei Drehachsen in einem Punkt schneiden. Dieser Schnittpunkt liegt im Ursprung  $S_1$ . Bei einem Kugelgelenk können beliebige Orientierungen bei gleich bleibender kartesischer Position realisiert werden. Daher liegt von  $S_0$  bis  $S_2$  ein Kugelgelenk mit Ursprung  $S_1$  als Drehpunkt vor.

Da der Endeffektor vom Drehpunkt um Distanz  $l_2$  abgesetzt ist, resultiert jede Orientierungsänderung auch in einer Änderung der kartesischen Position. Abb. 3.10 veranschaulicht, dass sich die kartesische Position bei einer Orientierungsänderung stark verändert, wenn  $l_2$  entsprechend groß ist. Um zu einer möglichst kugelgelenkähnlichen Orientierungsbewegung zu gelangen, wird durch konstruktive Maßnahmen Abstand  $l_2$  minimiert. Da man damit eine dem Kugelgelenk ähnliche Kinematik realisiert, wird Basiskinematik 3 hier als *Pseudo-Kugelgelenk* bezeichnet.

Oft bestehen die letzten drei Gelenke von Manipulatoren aus dieser kugelgelenkähnlichen Kinematik. Eine vorgelagerte Teilkinematik dient der Positionierung des Endeffektors. So sind dessen Orientierung und kartesische Position nahezu getrennt voneinander einstellbar.

Die inverse Kinematik von Basiskinematik 3 besteht aus folgender Aufgabenstellung: Gegeben Orientierung  $R_{03}$ , gesucht  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

Die Lösung resultiert aus der Tatsache, dass Basiskinematik 3 der Euler323-Kinematik entspricht. Dies erkennt man durch einen Vergleich der beiden Grafiken von Abb. 3.9. Die obere Grafik beschreibt die Kinematik nach DH. In der unteren Grafik ist die identische Kinematik als Euler323-Drehung realisiert. Dabei stimmen die Drehachsen der DH-Darstellung mit denen der Euler323-Darstellung überein, so dass

$$\theta_1 = \alpha, \quad \theta_2 = \beta, \quad \theta_3 = \gamma.$$

Damit folgt die gesuchte inverse Basiskinematik 3 zu

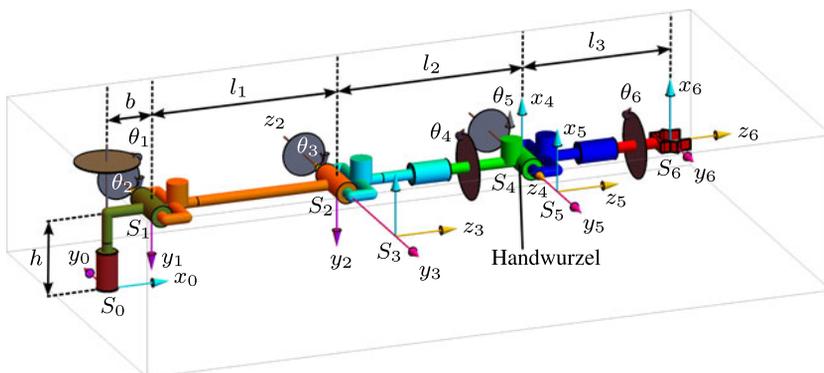
$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \text{InvEuler323}(\vec{R}_{03}).$$

Aus Abschn. 2.3.4 ist bekannt, dass bei  $\beta \in \{0, \pi\}$  die ZYZ Euler-Singularität auftritt. Daher weist inverse Basiskinematik 3 ebenfalls eine Singularität bei  $\theta_2 \in \{0, \pi\}$  auf.

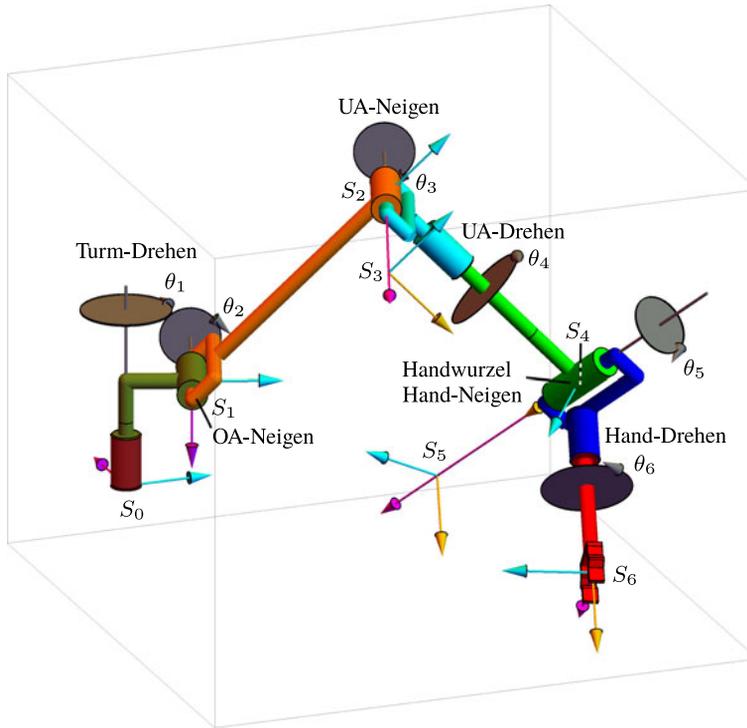
### 3.5 Basiskinematik 4: Anthropomorpher 6-DoF Manipulator

Die in Abb. 3.11 (Nullposition) und Abb. 3.12 (geneigte Position) dargestellte Kinematik ähnelt der Kinematik des menschlichen Arms – daher die Bezeichnung *anthropomorph*. Siehe in Abschn. 1.1 die Erläuterungen zu Abb. 1.4 für eine Beschreibung der Gelenkbezeichnungen aus Abb. 3.12.

Koordinatensysteme  $S_2$  und  $S_3$  fallen in ihren Ursprüngen aufeinander. Daher ist  $S_3$  nach außen versetzt dargestellt; Gleiches gilt für  $S_4$  und  $S_5$ . Analog zu  $S_3$  ist auch  $S_5$  aus Gründen der Übersichtlichkeit nach außen versetzt dargestellt.



**Abb. 3.11** Topologische Anordnung des anthropomorphen 6-DoF Manipulators in Nullposition



**Abb. 3.12** Anthropomorpher 6-DoF Manipulator: Zur Veranschaulichung der Beweglichkeit sowie der räumlichen Gelenkanordnung ist anstelle der sonst üblichen Nullposition, Position  $\theta = (-20^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$  dargestellt

Die inverse Kinematik betrachtet die folgende Aufgabenstellung: Gegeben sei die Endeffektorlage mit

$$\tilde{R}_{06}^{\text{soll}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\text{soll}} & \mathbf{r}_2^{\text{soll}} & \mathbf{r}_3^{\text{soll}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_6^{\text{soll}}.$$

Gesucht sind Gelenkwinkel  $\theta = (\theta_1 \quad \dots \quad \theta_6)$ .

Zur Lösung ist die Position von Ursprung  $S_4$  von entscheidender Bedeutung. Daher bezeichnet man dieses Koordinatensystem in Anlehnung an den menschlichen Körperbau auch als *Handwurzel*. Unter Zuhilfenahme der vorangegangenen drei Basiskinematiken lässt sich die gesuchte inverse Kinematik in folgenden drei Schritten ermitteln:

Schritt 1: Projektion der Handwurzelposition in die  $x_0$ - $y_0$ -Ebene liefert die Eingangsgröße zur Berechnung von  $\theta_1$  mittels Basiskinematik 1.

Schritt 2:  $S_2$  bis  $S_4$  bewegen sich immer in der  $x_1$ - $y_1$ -Ebene. Mit der Handwurzelposition in  $S_1$ -Koordinaten als Eingangsgröße liefert Basiskinematik 2 die beiden Gelenkwinkel  $\theta_2$  und  $\theta_3$ .

Zur Berechnung der hinteren drei Gelenkwinkel wird die Handwurzelposition benötigt. Diese kann durch einen einfachen Trick ermittelt werden: Die Endeffektorposition (im vorliegenden Fall Ursprungsposition von  $S_6$ ) ist mit  $\mathbf{t}_6^{\text{soll}}$  gegeben. Von dort aus gelangt man zur Handwurzelposition  $\mathbf{t}_4$  in entgegengesetzter Richtung des Approach-Vektors (hier die  $z_6$ -Achse; entspricht dem gegebenen Einheitsvektor  $\mathbf{r}_3^{\text{soll}}$ ) um Weglänge  $l_3$ :

$$\mathbf{t}_4 = \mathbf{t}_6^{\text{soll}} - l_3 \mathbf{r}_3^{\text{soll}} \quad (3.7a)$$

Aus vorangegangenem Schritt ist  $\theta_1$  bekannt. Damit kann die Handwurzelposition  $\mathbf{t}_4$  in  $S_1$ -Koordinaten ermittelt werden, gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_4^1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{T}_{10}(\theta_1) \begin{pmatrix} \mathbf{t}_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{T}_{01}^{-1}(\theta_1) \begin{pmatrix} \mathbf{t}_4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7b)$$

Schritt 3: Die letzten drei Gelenkachsen schneiden sich in der Handwurzel. Basiskinematik 3 tritt auf, wenn die Endeffektororientierung in  $S_3$ -Koordinaten betrachtet wird, das heißt mit  $\tilde{R}_{36}$  als Eingangsgröße. Damit lassen sich  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  und  $\theta_6$  mittels der InvEuler323-Funktion bestimmen. Da die ersten drei Gelenkwinkel aus vorangegangenen Schritten 1 und 2 bereits bekannt sind, kann aus der direkten Kinematik die Orientierung von  $S_3$  mit Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{03}$  berechnet werden. Hieraus ergibt sich die benötigte Rotationsmatrix zu

$$\tilde{R}_{36} = \tilde{R}_{03}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^{-1} \tilde{R}_{06}^{\text{soll}} = \tilde{R}_{30}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tilde{R}_{06}^{\text{soll}}. \quad (3.8)$$

In Aufgabe 3.5 wird für die vorliegende inverse Kinematik ein Nassi-Shneiderman-Struktogramm erstellt.

Das Vorgehen in obigen drei Schritten basiert im Prinzip auf einem Lösungskonzept von Donald Lee Pieper [5] für die inverse Kinematik von 6-DoF Manipulatoren in geschlossener Form. Dabei wird die Bedingung gestellt, dass sich mindestens drei hintereinanderliegende Achsen in einem Punkt schneiden oder parallel<sup>5</sup> sind.

Bei vorliegender Kinematik aus Abb. 3.11 und Abb. 3.12 ist Piepers Anforderung erfüllt: Die letzten drei Gelenkachsen schneiden sich in der Handwurzelposition  $t_4$ . Diese Position ist somit von den hinteren drei Gelenkwinkeln unabhängig. Sie kann daher durch (3.7a) direkt (das heißt ohne Kenntnis von Gelenkwinkeln) aus der gegebenen Endeffektorposition berechnet werden.

Gleichzeitig ist die Handwurzelposition ausschließlich von den vorderen drei Gelenkwinkeln abhängig. So können diese vorderen Gelenkwinkel *unabhängig* von den hinteren drei Gelenkwinkeln berechnet werden. Dadurch ist  $\tilde{T}_{03}$  vollständig bekannt und die hinteren drei Gelenkwinkel hängen nur noch von  $\tilde{R}_{36}$  ab, siehe (3.8).

Beim hier betrachteten 6-DoF Manipulator sind Position und Orientierung des Endeffektors von allen sechs Gelenkwinkeln abhängig. Darin begründet sich die hohe Berechnungskomplexität der inversen Kinematik. Piepers Lösung basiert im Prinzip auf der Idee, drei Gelenkwinkel (hier die vorderen drei) *unabhängig* von den restlichen drei Gelenkwinkeln zu berechnen.

Dies gelingt immer dann, wenn sich mindestens drei aufeinanderfolgende Gelenkachsen in einem Punkt schneiden oder parallel sind.

Schneiden sich – wie im vorliegenden Fall – die letzten drei rotatorischen Gelenkachsen, so bestimmen die vorderen drei Gelenkwinkel tendenziell die Position des Endeffektors, die hinteren drei Gelenkwinkel dessen Orientierung. Das zugrunde liegende 6-DoF Problem spaltet sich so in ein 3-DoF-Positions- und 3-DoF-Orientierungsproblem auf. Für beide existieren geschlossene Lösungen. Setzt man diese zusammen, so ergibt sich die gewünschte geschlossene Lösung für das 6-DoF Problem.

In [5] werden auch Lösungen zu Fällen hergeleitet, bei denen die drei sich in einem Punkt schneidenden Gelenkachsen vorne oder mittig liegen. Dabei werden alle möglichen Kombinationen von Translations- und Drehgelenken betrachtet.

Für weitergehende Betrachtungen siehe [1–4, 7, 8].

---

<sup>5</sup> Die Eigenschaft, dass sich Geraden schneiden, schließt mathematisch Parallelität von Geraden als Sonderfall ein: Verringert man den Schnittwinkel zweier Geraden, so entfernt sich deren Schnittpunkt bezogen auf einen fixen Beobachtungspunkt immer weiter. Damit stellen parallele Geraden den Grenzfall zweier, sich im Unendlichen schneidenden Geraden dar.

**Beispiel 3.3.** Konfigurationen beim anthropomorphen 6-DoF Manipulator: Betrachtet werde der Manipulator in Nullposition aus Abb. 3.11 mit Parametern  $b = 3/50$ ,  $l_1 = 1/4$ ,  $h = 1/10$ ,  $l_2 = 1/4$ ,  $l_3 = 1/5$ . Siehe Aufgabe 2.18 für die DH-Parameter.

Für diesen Manipulator sollen die Gelenkwinkel so eingestellt werden, dass der Endeffektor folgende Lage einnimmt:

$$\begin{aligned} \text{Endeffektororientierung:} \quad \tilde{R}_{06}^{\text{sol}} &= \begin{bmatrix} -0.347927 & 0.868187 & 0.353833 \\ -0.00638728 & 0.375209 & -0.926918 \\ -0.9375 & -0.32476 & -0.125 \end{bmatrix} \\ \text{Endeffektorposition:} \quad \mathbf{t}_6^{\text{sol}} &= \begin{pmatrix} 0.213136 \\ -0.237202 \\ 0.416506 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Schritt 1 ergeben sich die beiden möglichen Konfigurationen (Turm) „links“ und „rechts“ für  $\theta_1$ .

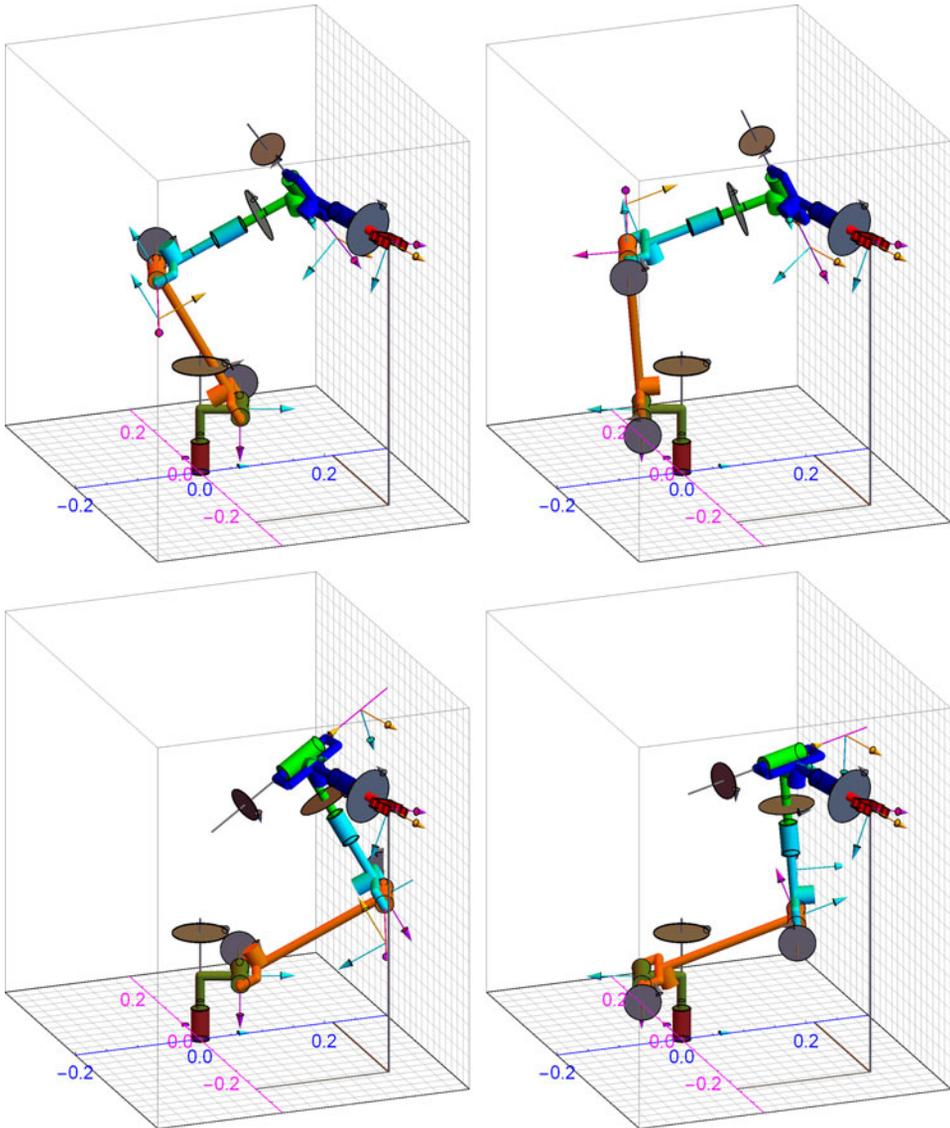
Schritt 2 liefert ebenso zwei Konfigurationen für  $(\theta_2, \theta_3)$ , die mit (Ellenbogen) „oben“, „unten“ bezeichnet werden.

Im letzten Schritt ergeben sich Gelenkwinkel  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  und  $\theta_6$  durch ZYZ Euler-Winkel. Die zugehörigen beiden Konfigurationen werden mit „1“ und „2“ bezeichnet. Diese drei Teil-Konfigurationen können untereinander beliebig zusammengestellt werden. Damit ergeben sich acht Konfigurationen wie in Tabelle 3.1 aufgelistet. Konfigurationen Nr. 1 bis 4 variieren in (Turm) „links“/„rechts“ und (Ellenbogen) „oben“/„unten“; die letzten drei Gelenke befinden sich dabei immer in Teil-Konfiguration „1“. Abb. 3.13 zeigt die zugehörigen vier Manipulator-Stellungen.

In Abb. 3.14 erkennt man den Unterschied zwischen Teil-Konfiguration „1“ und „2“ bei sonst gleicher Teilkonfiguration „links“/„oben“.  $\triangleleft$

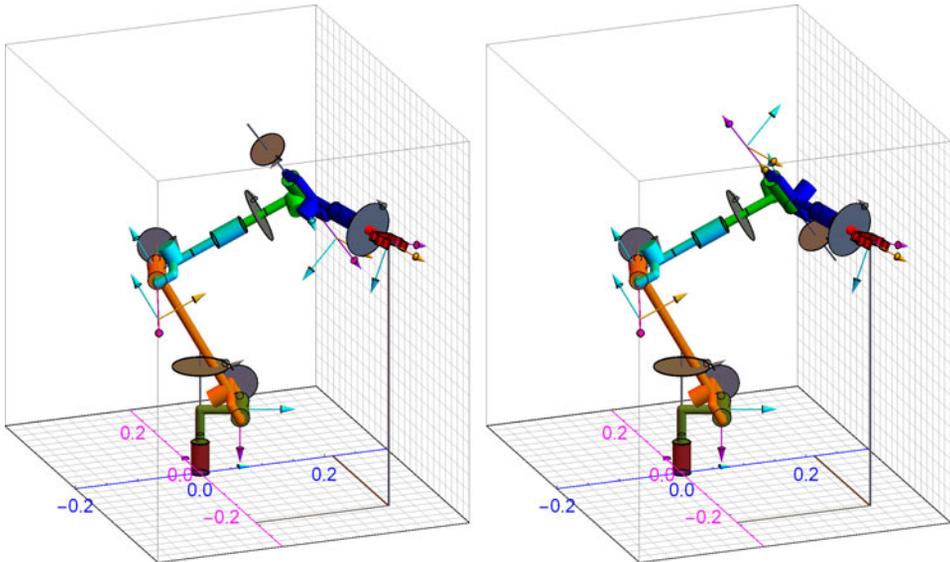
**Tab. 3.1** Konfigurationen beim anthropomorphen 6-DoF Manipulator für die Endeffektorlage aus Beispiel 3.3

Nr.	Turm	Ellenbogen	Euler	$\theta$
1	links	oben	1	$(-20^\circ, -120^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$
2	links	unten	1	$(-20^\circ, -30^\circ, -90^\circ, 123.69^\circ, 115.66^\circ, -43.90^\circ)$
3	recht	oben	1	$(160^\circ, -85.23^\circ, -73.09^\circ, -64.60^\circ, 56.13^\circ, 38.68^\circ)$
4	rechts	unten	1	$(160^\circ, -158.32^\circ, 73.09^\circ, -49.66^\circ, 100.29^\circ, -22.77^\circ)$
5	links	oben	2	$(-20^\circ, -120^\circ, 90^\circ, -60^\circ, -60^\circ, -150^\circ)$
6	links	unten	2	$(-20^\circ, -30^\circ, -90^\circ, -56.31^\circ, -115.66^\circ, 136.102^\circ)$
7	recht	oben	2	$(160^\circ, -85.23^\circ, -73.09^\circ, 115.40^\circ, -56.13^\circ, -141.32^\circ)$
8	rechts	unten	2	$(160^\circ, -158.32^\circ, 73.09^\circ, 130.34^\circ, -100.29^\circ, 157.23^\circ)$



**Abb. 3.13** Vergleich der Teil-Konfigurationen (Turm) „links“/„rechts“ und (Ellenbogen) „oben“/„unten“ beim anthropomorphen 6-DoF Manipulator.

*Teilbild links-oben:* Konfiguration Nr. 1 „links-oben-1“; *Teilbild rechts-oben:* Konfiguration Nr. 3 „rechts-oben-1“; *Teilbild links-unten:* Konfiguration Nr. 2 „links-unten-1“; *Teilbild rechts-unten:* Konfiguration Nr. 4 „rechts-unten-1“



**Abb. 3.14** Vergleich von Teil-Konfiguration „1“ und „2“ beim anthropomorphen 6-DoF Manipulator. *Linkes Teilbild:* Konfiguration Nr. 1 „links-oben-1“; *rechtes Teilbild:* Konfiguration Nr. 5 „links-oben-2“

## Aufgaben

*Musterlösungen* finden sich unter [www.springer.com](http://www.springer.com) auf der Seite des vorliegenden Werks.

### 3.1 Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator

- a) Erstellen Sie für den planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Basiskinematik 2 ein Nassi-Shneiderman-Struktogramm der inversen Kinematik

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \text{InvKinEllenbogen}(x, y).$$

Nun seien Längen gegeben mit  $l_1 = l_2 = 1$ . Implementieren Sie das Struktogramm in Matlab, Mathematica oder einer anderen Hochsprache/Sprache der 4. Generation. Berechnen Sie damit numerisch Winkel  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  sowie ZYZ Euler-Winkel  $\alpha$  (unter der Bedingung  $\beta = \gamma = 0$ ) für folgende kartesische Positionen:

- b)  $(x, y) = (1, 0)$   
 c)  $(x, y) = (1/\sqrt{2} + 1, 1/\sqrt{2})$   
 d)  $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Führen Sie für b)-d) einen Plausibilitätscheck mit aussagekräftigen Skizzen durch.

### 3.2 Kartesischer 2-DoF Manipulator

Erstellen Sie die inverse Kinematik für den kartesischen 2-DoF Manipulator aus Aufgabe 2.16.

### 3.3 Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator

Gegeben sei der planare 3-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Abb. 2.31.

- a) Klassifizieren Sie grafisch die unterschiedlichen Konfigurationen der inversen Kinematik. Benutzen Sie dabei die üblichen Bezeichnungen „oben“/„unten“ und geben Sie die Winkelbereiche an.

Orientierung und Lage des Endeffektors soll nun durch Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{03} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$  und Translationsvektor  $t_3$  vorgegeben sein.

- b) Erstellen Sie in Abhängigkeit von  $\tilde{R}_{03}$  und  $t_3$  die inverse Kinematik für eine der in Teilaufgabe a) ermittelten Konfigurationen. Verwenden Sie dabei die Lösungsfunktion  $\text{InvKinEllenbogen}(x, y)$  aus Aufgabe 3.1.

Nun seien Zahlenwerte gegeben:

- Armlängen  $l_1 = 0.3$ ,  $l_2 = 0.25$  und  $l_3 = 0.15$
- Position und Orientierung:

$$t_3 = \begin{pmatrix} 0.58956 \\ 0.21082 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_{03} = \begin{bmatrix} 0.906308 & -0.422618 & 0 \\ 0.422618 & 0.906308 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- c) Berechnen Sie die Winkel für die gegebenen Zahlenwerte.

### 3.4 Existenz und Bedeutung geschlossener Lösungen

- a) Unter welcher Bedingung ist nach Pieper für einen 6-DoF Manipulator eine geschlossene Lösung für die inverse Kinematik berechenbar?  
 b) Existiert ein 3-DoF Manipulator, für den es keine geschlossene Lösung der inversen Kinematik gibt? Begründen Sie die Aussage.

- c) Welche Vorteile bietet eine geschlossene Lösung gegenüber numerischen Näherungsverfahren?
- d) Welche technischen Implementierungsprobleme können bei einer inversen Kinematik entstehen? Wie kann man dem entgegenwirken?
- e) Erläutern Sie die Bedeutung der inversen Kinematik im Rahmen einer Manipulator-Steuerung.
- f) Angenommen, Sie haben keine Möglichkeit, die inverse Kinematik eines Fertigungs-Manipulators zu implementieren. Wie können Sie trotzdem – zumindest näherungsweise – eine im Arbeitsraum definierte Aufgabenstellung mit diesem Manipulator erfüllen?

### 3.5 Anthropomorpher 6-DoF Manipulator

Erstellen Sie ein Nassi-Shneiderman-Struktogramm für die inverse Kinematik des anthropomorphen 6-DoF Manipulators (Basiskinematik 4) aus Abb. 3.11.

Weitere Aufgaben zur inversen Kinematik finden sich zum Beispiel in [6] am Ende von Kap. 3.

---

## Literatur

1. Benati, M., Morasso, P., Tagliasco, V.: The inverse kinematic problem for anthropomorphic manipulator arms. *J. Dyn. Syst. Meas. Control.* **104**(1), 110–113 (1982)
2. Goldenberg, A., Benhabib, B., Fenton, R.: A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots. *IEEE J. Robot. Automat.* **1**(1), 14–20 (1985)
3. Hollerbach, J.M., Gideon, S.: Wrist-partitioned, inverse kinematic accelerations and manipulator dynamics. *Sage Int. J. Robotics Res.* **2**(4), 61–76 (1983)
4. Murray, R.M., Li, Z., Sastry, S.S.: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton (1994)
5. Pieper, D.L.: *The Kinematics of Manipulators under Computer Control*. Ph.D. thesis, Stanford University (1968)
6. Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasager, M.: *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken (2006)
7. Tasi, L.W., Morgan, A.P.: Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods. *J. Mech. Transm. Autom. Des.* **107**, 189–200 (1985)
8. Veslin, E.Y., Dutra, M.S., Lengerke, O., Carreno, E.A., Morales Tavera, M.J.: A hybrid solution for the inverse kinematic on a seven dof robotic manipulator. *IEEE Latin Am. Trans.* **12**(2), 212–218 (2014)

**Zusammenfassung** Eine Grundaufgabe der Manipulatorsteuerung besteht darin, aus gegebenen Gelenkvariablen die Lage des resultierenden Endeffektors zu bestimmen. Die Umkehraufgabe, nämlich eine gewünschte Endeffektorlage durch passende Gelenkvariablen einzustellen, wird sogar als *Herzstück* der Manipulatorsteuerung bezeichnet. Diese unter der Bezeichnung direkte und inverse Kinematik bekannten Aufgabenstellungen werden durch die Geschwindigkeitskinematik ergänzt: Für gegebene Gelenkgeschwindigkeiten wird die Geschwindigkeit von Position und Orientierung des Endeffektors gesucht. Für die Momentanbetrachtung einer konstanten Gelenkposition führt dies auf eine lineare Abbildung. Dieses lineare Gleichungssystem wird mit Hilfe einer Jacobi-Matrix in Vektorform zusammengefasst.

Beschreibt man dabei die Orientierungsgeschwindigkeit des Endeffektors durch einen Drehgeschwindigkeitsvektor, so spricht man von einer *geometrischen Jacobi-Matrix*. Werden hingegen die Geschwindigkeiten der Euler-Winkel herangezogen, so ergibt sich die *analytische Jacobi-Matrix*.

Das Umkehrproblem, nämlich für eine gegebene Geschwindigkeit der Endeffektorlage die dazu notwendigen Gelenkgeschwindigkeiten zu berechnen, bezeichnet man als *inverse Geschwindigkeitskinematik*. Das Lösungsverhalten dieser Aufgabenstellung ist von der Zahl und momentanen Stellung der Gelenke abhängig. Zur systematischen Behandlung werden im vorliegenden Buch drei Kategorien der *Manipulator-Bestimmtheit* eingeführt: *Manipulator-Vollbestimmtheit*, bei der eine eindeutige Lösung für die inverse Geschwindigkeitskinematik existiert. Bei *Manipulator-Überbestimmtheit* ergibt sich durch redundante Gelenke eine nichtabzählbare Lösungsvielfalt. Ist der Manipulator *unterbestimmt* bzw. *unteraktuiert*, so existiert keine Lösung.

Ein zentrales und bislang nur rudimentär gelöstes Problem besteht darin, dass sich die Manipulator-Bestimmtheit während des laufenden Betriebs in bestimmten Gelenkpositionen von voll- bzw. überbestimmt auf unterbestimmt ändern kann. Diese Gelenkpositionen nennt man *Singularitäten*. Sie entsprechen den bei der inversen Kinematik ebenfalls auftretenden Singularitäten. In der Nähe einer Singularität nähern sich Nenner-Terme in den

Steuerungsalgorithmen dem Wert Null und verursachen damit sehr hohe Gelenkgeschwindigkeiten. Bei klassischen Manipulationsaufgaben, wie zum Beispiel bei Pick&Place-Aufgaben, können Singularitäten bei der Planung der Endeffektorpfade vermieden werden. Steuert jedoch der Mensch im Rahmen eines Master-Slave-Manipulators, so muss die Steuerung mit Singularitäten zurecht kommen.

Bei Manipulator-Überbestimmtheit kann die Redundanz der Gelenke genutzt werden, um Singularitäten zu vermeiden. Hierfür dient das sogenannte *Manipulierbarkeitsmaß*. Aber auch *Nullraumbewegungen* werden durch Manipulator-Überbestimmtheit ermöglicht: Dabei können die Gelenke bewegt werden, ohne dass sich der Endeffektor bewegt. Eine dritte Anwendung besteht schließlich darin, mittels *Pseudo-Rechts-Inverser*, den RMS-Wert der Gelenkgeschwindigkeiten zu minimieren.

Neben Position und Geschwindigkeit werden für einige Anwendungen auch die Kinematik der Beschleunigung sowie deren Inverse benötigt. Dies ermöglicht die Umrechnung von Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Bahn vom Gelenkraum in den Arbeitsraum und umgekehrt.

Die Jacobi-Matrix ermöglicht eine weitere wichtige Berechnung: Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit kann das Problem der Statik auf die Geschwindigkeitskinematik zurückgeführt werden, wobei keine Gewichts- und Haftreibungskräfte berücksichtigt werden. Gesucht werden dabei die Gelenkmomente und -kräfte, die den Manipulator im Stillstand halten, wenn von extern Kräfte und Momente am Endeffektor angreifen. Mit der transponierten Jacobi-Matrix kann – analog zur Geschwindigkeitskinematik – wieder ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Zur Lösung des dazu inversen Problems kann die Kategorisierung in Manipulator-Bestimmtheiten herangezogen werden.

Aufgrund der engen Verwandtschaft zwischen Geschwindigkeitskinematik und dem statischen Problem ohne Gewichts- und Haftreibungskräfte werden beide Themen im vorliegenden Kapitel mit dem Begriff *differenzielle Kinematik* zusammengefasst.

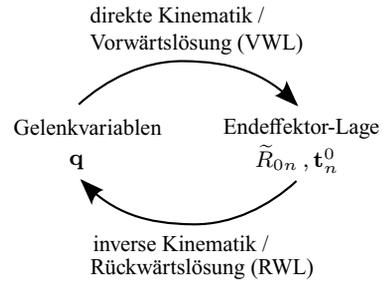
---

## 4.1 Einführung

In den vorangegangenen beiden Kapiteln wurde die direkte und inverse Kinematik eingeführt. Mathematisch gesehen bildet die direkte Kinematik die Gelenkvariablen auf die Endeffektorlage ab. Die dazu inverse Abbildung stellt die inverse Kinematik dar, siehe Abb. 4.1.

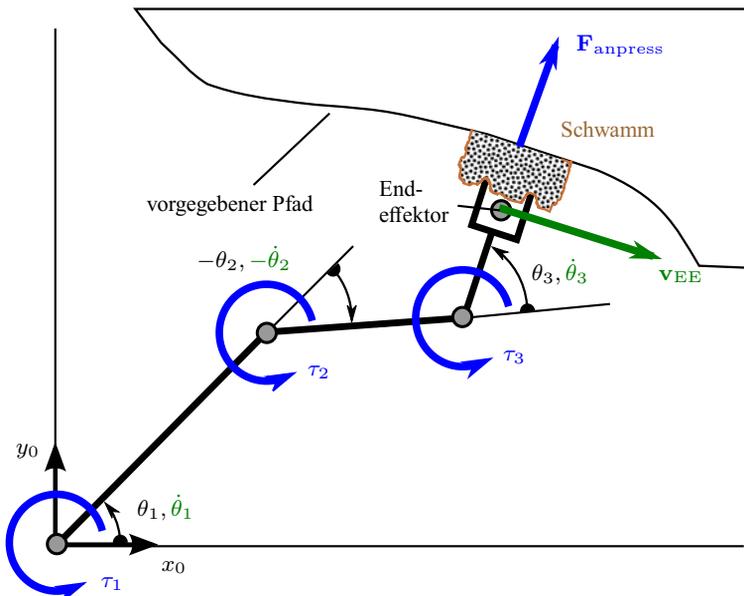
In realen Anwendungen wird neben der Lage des Endeffektors auch dessen Geschwindigkeit gefordert bzw. vorgegeben. Man bezeichnet dies als *Geschwindigkeitskinematik*. Zusätzlich werden oft Kräfte und Momente gefordert, die der Endeffektor im Stillstand auf die Umgebung ausüben soll. Dies bezeichnet man als *Statik*.

**Abb. 4.1** Direkte und inverse Kinematik als jeweils zueinander inverse Abbildungen



Beispiele solcher Anwendungen:

- Reinigen der Oberfläche eines feststehenden Werkstücks mit einem flexiblen Schwamm, siehe Abb. 4.2. Hier soll der Endeffektor mit einer definierten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{EE}$  in Richtung eines vorgegebenen Pfads (zur Definition eines Pfads siehe Kap. 6) fahren, und dabei den Schwamm mit einer vorgegebenen Kraft  $\mathbf{F}_{\text{anpress}}$  anpressen. Betrachtet man eine feststehende Position des Manipulators, so liegt der statische Fall vor. Demgegenüber ist im bewegten Fall (Dynamik) die Berechnung der Kräfte und Momente deutlich aufwendiger, siehe Kap. 5.



**Abb. 4.2** Vorgabe von Anpresskraft und Geschwindigkeit für den Endeffektor eines planaren 3-DoF-Ellebogen-Manipulators. Die dafür notwendigen Drehmomente sind mit  $\tau_i$  bezeichnet. Die Zählrichtungen sind durch die Pfeile der blauen kreisförmigen Linien gekennzeichnet

- Eindrehen einer Schraube in ein fixiertes Gewinde. Dies erfordert eine definierte Vorschubgeschwindigkeit, Drehgeschwindigkeit (hängen zusammen über die Gangzahl des Gewindes) sowie Anpresskraft (zur Überwindung der Reibung im Gewinde). Auch hier liegt der statische Fall für eine konstante Position vor.

Das vorliegende Kapitel teilt sich in zwei Abschnitte auf: Im ersten Abschn. 4.2 wird die Geschwindigkeitskinematik hergeleitet. Das dabei entwickelte Konzept einer linearen Abbildung durch eine Jacobi-Matrix lässt sich im folgenden Abschn. 4.3 mit nur geringen Änderungen auch auf das Problem der Statik (ohne Gewicht- und Haftreibungskräfte) anwenden.

---

## 4.2 Geschwindigkeitskinematik

Gegeben sei Gelenkvariablengeschwindigkeit  $\dot{q}$ . Bei Drehgelenken sind dies Drehgeschwindigkeiten in  $\text{rad/s}$ , bei Translationsgelenken Vorschubgeschwindigkeiten in  $\text{m/s}$ . Die Geschwindigkeitskinematik liefert damit die zugehörige Geschwindigkeit des Endeffektors.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann im Folgenden angenommen werden, dass das Endeffektorkoordinatensystem  $S_{EE}$  mit dem letzten Koordinatensystem  $S_n$  übereinstimmt. Damit ergibt sich dessen Position aus Translationsvektor  $t_n$  sowie dessen Orientierung aus Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{0n}$ . Dabei ist unmittelbar klar: Durch zeitliches Ableiten der einzelnen Komponenten des Translationsvektors erhält man den Vektor der Translationsgeschwindigkeit des Endeffektors.

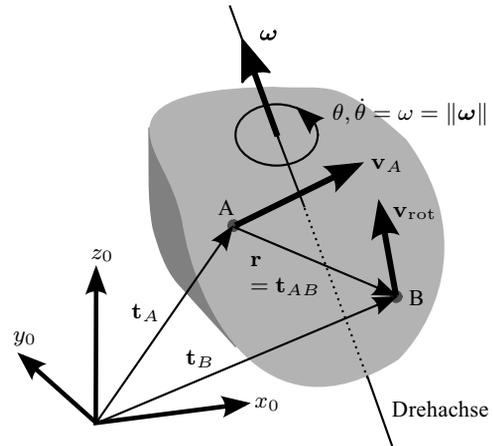
Für die Orientierung in Form einer Rotationsmatrix lässt sich hingegen nicht so einfach eine zeitliche Ableitung finden, da die zeitliche Ableitung einer Rotationsmatrix eine erweiterte Betrachtung erfordert, siehe Abschn. 4.2.4. Im folgenden Abschnitt wird daher zunächst für einen allgemeinen freien Körper im Raum ein Konzept zur Darstellung der Geschwindigkeit eingeführt.

### 4.2.1 Geschwindigkeit eines allgemeinen Körpers im Raum

Auf einem Körper werden zwei beliebige Punkte A und B betrachtet, siehe Abb. 4.3. Eine Rotationsbewegung des Körpers kann durch eine Rotation mit Drehwinkel  $\theta$  um eine Drehachse mit einer bestimmten Drehgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \omega$  in  $\text{rad/s}$  ausgedrückt werden. Hierzu führt man Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega$  ein. Seine Orientierung bestimmt die Orientierung der Drehachse. Die Drehrichtung bestimmt sich dabei nach der Schraubenregel: Der rechte Daumen zeigt in Richtung des Drehgeschwindigkeitsvektors. Die vier restlichen, gekrümmten Finger müssen dann in Richtung der Drehung zeigen. Die Länge des Drehgeschwindigkeitsvektors liefert schließlich den Betrag der Drehgeschwindigkeit, das heißt

$$|\omega| = \|\omega\| \quad \text{in rad/s.}$$

**Abb. 4.3** Zusammensetzung der Geschwindigkeit eines Körperpunkts B aus translatorischer Führungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  und rotatorischer Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$



Jeder Punkt des Körpers rotiert mit derselben Drehgeschwindigkeit, das heißt Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  ist für jeden Punkt des Körpers gleich.

Falls der Körper nicht rotiert, also für  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , besitzt jeder Körperpunkt dieselbe sogenannte *Translationsgeschwindigkeit*.

Man kann die Geschwindigkeit eines Punktes B immer darstellen als Summe der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  des Punktes A und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{AB}$ , die B relativ zu A aufweist, also

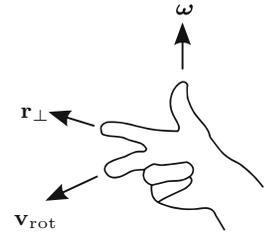
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}. \quad (4.1)$$

Man bezeichnet  $\mathbf{v}_{AB}$  in der Mechanik als *Relativgeschwindigkeit* und  $\mathbf{v}_A$  als *Führungsgeschwindigkeit*. Zusammenhang (4.1) ist anschaulich klar, wenn A auf der Drehachse liegt: In diesem Fall stellt  $\mathbf{v}_A$  die Translationsgeschwindigkeit des Körpers dar, also die Geschwindigkeit, die jeder Körperpunkt ohne Rotation besäße. Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{AB}$  kann dann nur aus einer Rotation von B um A resultieren. Die Gesamtgeschwindigkeit ergibt sich dann aus der Summe von Translations- und Rotationsgeschwindigkeit.

Der Sachverhalt gilt aber auch für allgemein gewählte Positionen der Punkte A und B – und dies ist alles andere als anschaulich klar. Hierzu findet sich eine leicht verständliche Herleitung zum Beispiel in [5, Abschn. 3.1.3].

Da im Kontext dieses Buches ausschließlich starre Körper betrachtet werden, besitzen Körperpunkte stets denselben Abstand voneinander. Aus diesem Grund kann Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{AB}$  nur aus einer Rotationsbewegung von B um A resultieren, das heißt

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.2)$$

**Abb. 4.4** Rechte-Hand-Regel

mit  $\mathbf{r}$  als Abstandsvektor  $\mathbf{AB}$ , siehe [5, Abschn. 3.1.2] für eine Herleitung dieser Formel. Die Richtung von  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$  kann mit der Rechten-Hand-Regel nach Abb. 4.4 ermittelt werden:

- Der Daumen (rechte Hand) zeigt in Richtung des Drehgeschwindigkeitsvektors.
- Der Zeigefinger zeigt in Richtung des Vektors  $\mathbf{r}_{\perp}$ , der senkrecht auf der Drehachse steht und von dort zum Punkt B zeigt.
- Der Mittelfinger zeigt in Richtung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors in B.

Eingesetzt in (4.1) folgt

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{t}_B - \mathbf{t}_A). \quad (4.3)$$

Dabei wurde  $\mathbf{r}$  durch eine Vektorsumme aus  $\mathbf{t}_B$  und  $\mathbf{t}_A$  ausgedrückt, siehe auch Abb. 4.3.

Das folgende Beispiel illustriert die oben hergeleiteten Formeln anhand eines einfachen Manipulators mit nur einem Segment und einem Drehgelenk:

**Beispiel 4.1.** Geschwindigkeiten bei einem einzelnen Drehgelenk mit einer DH-konformen Kinematik: Wie in Abb. 4.5 dargestellt, werde Koordinatensystem  $S_1$  um die  $z_0$ -Achse mit Gelenkvariable  $\theta_1$  gedreht. Wählt man als Bezugspunkt A den feststehenden Ursprung  $S_0$  des Weltkoordinatensystems, so wird die Geschwindigkeit von Ursprung  $S_1$  nur aus Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{S_0, S_1}$  bestimmt. Diese bezieht sich auf das ruhende Weltkoordinatensystem, so dass dafür kurz  $\mathbf{v}_1$  geschrieben wird. Aus (4.2) ergibt sich:

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{t}_1 \quad (4.4)$$

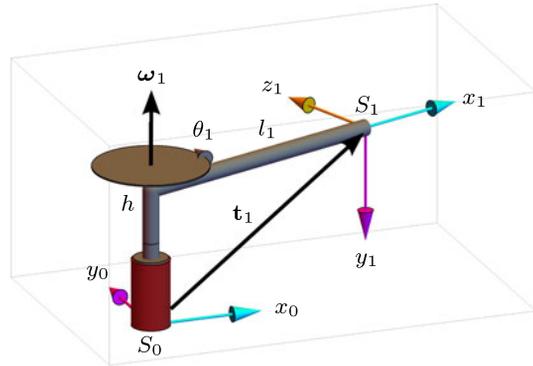
Der DH-Konvention folgend, dreht sich  $S_1$  bezüglich Drehachse  $\mathbf{e}_{z_0}$  um Winkel  $\theta_1$ . Aus der zeitlichen Änderung von  $\theta_1(t)$  ergibt sich damit als Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}_1$ :

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{d}{dt} \theta_1(t) \mathbf{e}_{z_0} = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Translationsvektor lässt sich leicht ablesen zu

$$\mathbf{t}_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ h \end{pmatrix}.$$

**Abb. 4.5** Geschwindigkeit bei einer Kinematik mit einem Drehgelenk



Zusammen mit  $\omega_1$  folgt aus (4.4) Translationsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ h \end{pmatrix} = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \cdot h - 1 \cdot l_1 \sin \theta_1 \\ 1 \cdot l_1 \cos \theta_1 - 0 \cdot h \\ 0 \cdot l_1 \sin \theta_1 - 0 \cdot l_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta}_1 l_1 \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ kann  $\mathbf{v}_1$  auch durch zeitliches Ableiten von  $\mathbf{t}_1$  berechnet werden gemäß

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt} \mathbf{t}_1(t) = \frac{d\theta_1(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_1(\theta_1(t)) = \dot{\theta}_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_1(\theta_1).$$

Dabei wurde Kettenregel<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta_1}$$

verwendet. Mit

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathbf{t}_1(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ h \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert die Berechnung von  $\mathbf{v}_1$  aus der zeitlichen Ableitung von  $\mathbf{t}_1$  dasselbe Ergebnis, wie bei obiger Berechnung mittels Kreuzprodukt. <

<sup>1</sup> Im vorliegenden Beispiel ist  $\mathbf{t}_1$  nur von einer Gelenkvariablen  $\theta_1$  abhängig. Daher könnte in diesem Fall Operator  $d$  anstelle von Operator  $\partial$  verwendet werden. Im Allgemeinen treten an dieser Stelle jedoch Translationsvektoren auf, die von mehreren Gelenkvariablen abhängen, so dass dann zwingend Operator  $\partial$  verwendet werden muss.

## 4.2.2 Geschwindigkeiten bei einer DH-konformen kinematischen Kette

Die Betrachtungen des vorangegangenen Beispiels werden nun auf  $n$  Gelenke erweitert.

**EE-Translationsgeschwindigkeit in Weltkoordinaten** Die translatorische Endeffektor-Geschwindigkeit in Weltkoordinaten ergibt sich allgemein durch die zeitliche Ableitung des Endeffektor-Translationsvektors  $\mathbf{t}_n$ . Falls nur Drehgelenke vorhanden sind, folgt für den Translationsgeschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}_n^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{t}_n = \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial \theta_n} \dot{\theta}_n$$

und im allgemeinen Fall

$$\mathbf{v}_n^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{t}_n = \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial q_n} \dot{q}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (4.5)$$

Da aufgrund der DH-Vereinbarungen stets entweder ein Dreh- oder ein Translationsgelenk vorliegt, können die Ausdrücke  $\frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i$  deutlich vereinfacht werden. Dazu betrachtet man separat die beiden Fälle  $q_i = \theta_i$  (Drehgelenk) und  $q_i = \sigma_i$  (Translationsgelenk):

### Fall 1: Translationsgelenk

Annahme: Es bewege sich nur Gelenk Nr.  $i$  mit Gelenkvariablen  $q_i = \sigma_i$  und Geschwindigkeit  $\dot{q}_i = \dot{\sigma}_i$ . An dieser Stelle wird daran erinnert, dass sich nach der DH-Konvention Translationsgelenk Nr.  $i$  entlang der  $z_{i-1}$ -Achse bewegt. Die Translationsgeschwindigkeit muss damit stets in Richtung der  $z_{i-1}$ -Achse verlaufen. Da sich per Annahme die restlichen Gelenke im Stillstand befinden, bewegt sich der Endeffektor also mit Translationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_n^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{t}_n = \frac{\partial \mathbf{t}_n}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i = \mathbf{e}_{z(i-1)}^0 \dot{\sigma}_i = \tilde{R}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\sigma}_i.$$

### Fall 2: Drehgelenk

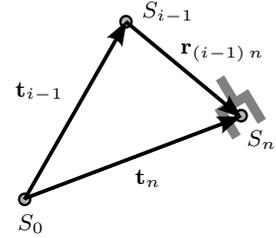
Annahme: Es bewege sich nur Gelenk Nr.  $i$  mit Gelenkvariablen  $q_i = \theta_i$  und Geschwindigkeit  $\dot{q}_i = \dot{\theta}_i = \omega_i$ . Analog zu Fall 1 ist darauf hinzuweisen, dass sich nach der DH-Konvention Rotationsgelenk Nr.  $i$  um die  $z_{i-1}$ -Achse dreht.

Der Abstandsvektor zwischen den Ursprüngen  $S_{i-1}$  und  $S_{EE}$  ergibt sich in Weltkoordinaten aus einer geschlossenen Vektorkette mit Hilfe der Translationsvektoren  $\mathbf{t}_n$  und  $\mathbf{t}_{i-1}$  zu

$$\mathbf{r}_{(i-1)n}^0 = \mathbf{t}_n - \mathbf{t}_{i-1},$$

siehe Abb. 4.6.

**Abb. 4.6** Berechnung des Abstandsvektors  $\mathbf{r}_{(i-1)n}$  aus Translationsvektoren. Der Endeffektor ist durch einen grauen Greifer symbolisiert



Zusammen mit (4.2) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_n^0 &= \frac{\partial \mathbf{t}_n^0}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i = \underbrace{(\mathbf{e}_{z(i-1)}^0 \dot{\theta}_i)}_{=\boldsymbol{\omega}_i^0} \times \mathbf{r}_{(i-1)n}^0 \\
 &= \dot{\theta}_i \underbrace{\left( \tilde{\mathbf{R}}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathbf{e}_{z(i-1)}^0} \times (\mathbf{t}_n - \mathbf{t}_{i-1}) .
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

**EE-Drehgeschwindigkeit in Weltkoordinaten** Zunächst wird angenommen, dass nur Drehgelenke vorhanden sind. Koordinatensystem  $S_1$  bewegt sich, bezogen auf das Weltkoordinatensystem, mit der gegebenen Drehgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_1$ . Diese Drehung findet gemäß DH-Konvention um die  $z$ -Achse von  $S_0$  statt, also um  $\mathbf{e}_{z0}$ . Daraus lässt sich Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}_1^0 = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_{z0}^0$  zusammensetzen.

Drehgeschwindigkeitsvektoren dürfen vektoriell addiert werden, wenn für sie das selbe Bezugssystem vorliegt. Im folgenden Fall soll dies das Weltkoordinatensystem sein. Das zweite Gelenk dreht sich DH-konform um die  $z_1$ -Achse mit Richtung  $\mathbf{e}_{z1}$  und Drehwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}_2$ . Analog zum ersten Gelenk lässt sich daraus Drehgeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{e}_{z1}^0 \dot{\theta}_2$  zusammensetzen. Der Drehgeschwindigkeitsvektor von  $S_2$  bezogen auf  $S_0$  ergibt sich damit durch

$$\boldsymbol{\omega}_2^0 = \boldsymbol{\omega}_1^0 + \mathbf{e}_{z1}^0 \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \tilde{\mathbf{R}}_{01}(\theta_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei  $\mathbf{e}_{z1}^0$  die dritte Spalte von Rotationsmatrix  $\tilde{\mathbf{R}}_{01}$  darstellt. Dies lässt sich für alle nachfolgenden Koordinatensysteme analog fortsetzen:

$$\boldsymbol{\omega}_3^0 = \boldsymbol{\omega}_2^0 + \mathbf{e}_{z2}^0 \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \tilde{\mathbf{R}}_{01}(\theta_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_3 \tilde{\mathbf{R}}_{02}(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_i^0 &= \boldsymbol{\omega}_{i-1}^0 + \mathbf{e}_{z(i-1)}^0 \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_2 \tilde{\mathbf{R}}_{01}(\theta_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_i \tilde{\mathbf{R}}_{0(i-1)}(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^i \dot{\theta}_k \tilde{\mathbf{R}}_{0(k-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gelenkauswahlvariable  $\xi$  (1 für Rotation, 0 für Translation, siehe (2.23)) kann dieses Ergebnis auf den allgemeinen Fall translatorischer und rotatorischer Gelenke ausgeweitet werden und man erhält

$$\boldsymbol{\omega}_n^0 = \sum_{i=1}^n \xi_i \dot{q}_i \tilde{\mathbf{R}}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

### 4.2.3 Geometrische Jacobi-Matrix

Aus (4.5) und (4.7) erkennt man, dass Translations- und Rotationsgeschwindigkeit für festes  $\mathbf{q}$  (das heißt zu einem momentanen Zeitpunkt) jeweils *linear* von den Geschwindigkeiten  $q_i$  abhängen. Daher lässt sich durch eine vektorielle Zusammenfassung beider Geschwindigkeitsanteile in Matrixschreibweise eine kompakte Darstellung erzielen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^0 \\ \boldsymbol{\omega}_n^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^n \xi_i \tilde{\mathbf{R}}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{q}_i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_n^0}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{r}_n^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{r}_n^0}{\partial q_n} \\ \xi_1 \tilde{\mathbf{R}}_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \xi_2 \tilde{\mathbf{R}}_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \xi_n \tilde{\mathbf{R}}_{0(n-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

Die dabei entstehende Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  wird *geometrische Jacobi-Matrix*, kurz Jacobi-Matrix genannt. Falls die Bewegung des Endeffektors frei im Raum erfolgen kann, also im allgemeinen 3D-Fall, besitzt  $\tilde{\mathbf{J}}$  insgesamt 6 Zeilen (Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade<sup>2</sup> des Endeffektors) und so viele Spalten, wie Gelenke vorhanden sind (also  $n$  viele).

Die oberen drei Zeilen von  $\tilde{\mathbf{J}}$  bezeichnet man als *Lineargeschwindigkeits-Jacobi-Matrix*  $\tilde{\mathbf{J}}_v$ , die unteren drei Zeilen als *Drehgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix*  $\tilde{\mathbf{J}}_\omega$ :

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{J}}_v \\ \tilde{\mathbf{J}}_\omega \end{bmatrix}$$

Diese Teil-Jacobi-Matrizen ermöglichen eine separate Darstellung der Geschwindigkeitsanteile gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n^0 &= \tilde{\mathbf{J}}_v \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_n^0 &= \tilde{\mathbf{J}}_\omega \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

<sup>2</sup> Zur Definition von Bewegungsfreiheitsgraden siehe Kap. 5.

Die Spalten von  $\tilde{J}_v$  bzw.  $\tilde{J}_\omega$  werden im Folgenden mit  $J_{vi}$  bzw.  $J_{\omega i}$  bezeichnet:

$$\tilde{J}_v = \begin{bmatrix} J_{v1} & J_{v2} & \cdots & J_{vn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{J}_\omega = \begin{bmatrix} J_{\omega 1} & J_{\omega 2} & \cdots & J_{\omega n} \end{bmatrix}.$$

Setzt man (4.6) und (4.7) ein, so erhält man eine allgemeine Berechnungsvorschrift für die Spalten der beiden Teil-Jacobi-Matrizen:

$$J_{vi} = \begin{cases} \left( \tilde{R}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{t}_n - \mathbf{t}_{i-1}) & \text{für } \xi_i = 1 \text{ (Drehung)} \\ \tilde{R}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \xi_i = 0 \text{ (Translation)} \end{cases} \quad (4.9a)$$

$$J_{\omega i} = \begin{cases} \tilde{R}_{0(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \xi_i = 1 \text{ (Drehung)} \\ \mathbf{0} & \text{für } \xi_i = 0 \text{ (Translation)}. \end{cases} \quad (4.9b)$$

**Beispiel 4.2.** Endeffektorgeschwindigkeiten beim artikulierten planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Beispiel 2.21: Da nur Drehgelenke vorhanden sind, ergibt sich aus (4.6) die (geometrische) Jacobi-Matrix zu

$$\tilde{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z0}^0 \times \mathbf{r}_{03}^0 & \mathbf{e}_{z1}^0 \times \mathbf{r}_{13}^0 & \mathbf{e}_{z2}^0 \times \mathbf{r}_{23}^0 \\ \mathbf{e}_{z0}^0 & \mathbf{e}_{z1}^0 & \mathbf{e}_{z2}^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_0) & \left( \tilde{R}_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_1) & \left( \tilde{R}_{02} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_2) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \tilde{R}_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \tilde{R}_{02} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

In Übung 2, Aufgabe 15 wurde dafür bereits die Kinematik aufgestellt. Die für die Geschwindigkeitskinematik benötigten Größen sind die Translationsvektoren

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} b c_1 \\ b s_1 \\ h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} c_1(l_1 c_2 + b) \\ s_1(l_1 c_2 + b) \\ h - l_1 s_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} c_1(l_1 c_2 + b + l_2 c_{23}) \\ s_1(l_1 c_2 + b + l_2 c_{23}) \\ h - l_1 s_2 - l_2 s_{23} \end{pmatrix}$$

sowie Basisvektoren

$$\mathbf{e}_{z1}^0 = \tilde{R}_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{z2}^0 = \tilde{R}_{02} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es liegen nur Drehgelenke vor, so dass zur Berechnung von  $\mathbf{J}_{vi}$  in (4.9a) sowie  $\mathbf{J}_{\omega i}$  in (4.9b) jeweils nur die obere Zeile angewendet werden muss. Mit  $\mathbf{r}_{03}^0 = \mathbf{t}_3$ ,  $\mathbf{r}_{13}^0 = \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_1$  und  $\mathbf{r}_{23}^0 = \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_2$  liefert (4.9a) die drei Spalten der Lineargeschwindigkeits-Jacobi-Matrix zu

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{v1} &= \mathbf{e}_{z0}^0 \times \mathbf{r}_{03}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1(l_1 c_2 + b + l_2 c_{23}) \\ s_1(l_1 c_2 + b + l_2 c_{23}) \\ h - l_1 s_2 - l_2 s_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1(l_1 c_2 + b + l_2 c_{23}) \\ c_1(l_1 c_2 + b + l_2 c_{23}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{v2} &= \mathbf{e}_{z1}^0 \times \mathbf{r}_{13}^0 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1(c_2 l_1 + c_{23} l_2) \\ s_1(c_2 l_1 + c_{23} l_2) \\ -l_1 s_2 - l_2 s_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1(l_1 s_2 + l_2 s_{23}) \\ -s_1(l_1 s_2 + l_2 s_{23}) \\ -c_2 l_1 - c_{23} l_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{v3} &= \mathbf{e}_{z2}^0 \times \mathbf{r}_{23}^0 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times l_2 \begin{pmatrix} c_1 c_{23} \\ s_1 c_{23} \\ -s_{23} \end{pmatrix} = -l_2 \begin{pmatrix} c_1 s_{23} \\ s_1 s_{23} \\ c_{23} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Spalten der Drehgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix folgen nach (4.9b) einfach zu  $\mathbf{J}_{\omega i} = \mathbf{e}_{z(i-1)}^0$ . Zusammengefasst ergeben sich schließlich die beiden Teile der Jacobi-Matrix zu

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{J}}_v(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} -s_1(b + c_2 l_1 + c_{23} l_2) & -c_1(l_1 s_2 + l_2 s_{23}) & -c_1 l_2 s_{23} \\ c_1(b + c_2 l_1 + c_{23} l_2) & -s_1(l_1 s_2 + l_2 s_{23}) & -l_2 s_1 s_{23} \\ 0 & -c_2 l_1 - c_{23} l_2 & -c_{23} l_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{J}}_\omega(\theta_1) &= \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Damit berechnen sich die Endeffektorgeschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3^0(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \tilde{\mathbf{J}}_v(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{\omega}_3^0(\theta_1, \dot{\theta}_1) &= \tilde{\mathbf{J}}_\omega(\theta_1) \dot{\theta}_1.\end{aligned}$$

**Interpretation/Plausibilitätscheck:** Ausgestreckter Arm  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$

Der Translationsgeschwindigkeitsvektor berechnet sich in diesem Fall zu

$$\mathbf{v}_3^0(\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b + l_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -l_{12} & -l_2 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1(b + l_{12}) \\ -l_{12} \dot{\theta}_2 - l_2 \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

mit Betrag der Endeffektorgeschwindigkeit

$$\|\mathbf{v}_3^0\| = \sqrt{(\dot{\theta}_1(b + l_{12}))^2 + (l_{12}\dot{\theta}_2 + l_2\dot{\theta}_3)^2}$$

und momentanem Einheitsvektor in Richtung der Translationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{e}_v^0 = \frac{\mathbf{v}_3^0}{\|\mathbf{v}_3^0\|}.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit folgt zu

$$\boldsymbol{\omega}_3^0(\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}.$$

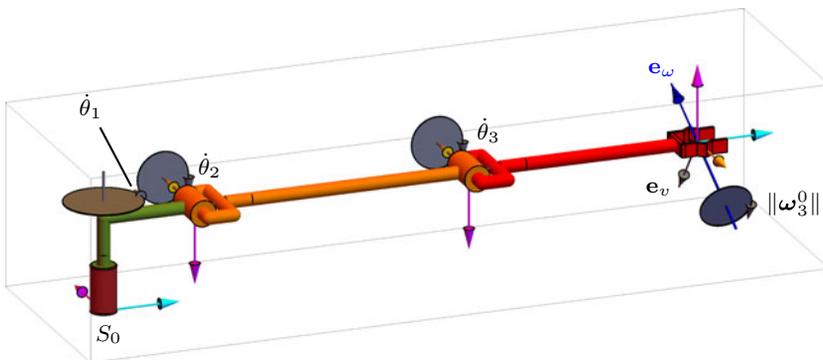
Daraus ergeben sich für den Drehgeschwindigkeitsvektor Betrag und Richtung zu

$$\|\boldsymbol{\omega}_3^0\| = \sqrt{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_{23}^2}$$

$$\mathbf{e}_\omega^0 = \frac{\boldsymbol{\omega}_3^0}{\|\boldsymbol{\omega}_3^0\|}.$$

Für  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und Längen  $l_1 = 0.3, l_2 = 0.25, h = 0.1, b = 0.1$  folgt damit numerisch

$$\mathbf{e}_v^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.631 \\ -0.776 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\omega^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.894 \\ 0.447 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{v}_3^0\| = 1.03, \quad \|\boldsymbol{\omega}_3^0\| = 2.24.$$



**Abb. 4.7** Ausgestreckter Fall beim artikulierten 3-DoF-Ellebogen-Manipulator. Blau: Einheitsvektor  $\mathbf{e}_\omega$  des Drehgeschwindigkeitsvektors, schwarz: Einheitsvektor  $\mathbf{e}_v$  des Translationsgeschwindigkeitsvektors

Zur graphischen Validierung wird in Abb. 4.7 der Manipulator in der betrachteten Position  $\theta_i = 0$  (ausgestreckter Fall) gezeigt. Für die oben angenommenen Winkelgeschwindigkeiten der Gelenke bewegt sich der Endeffektor translativ in Richtung des eingezeichneten Einheitsvektors  $e_v$ . Dabei führt der Endeffektor eine Drehbewegung um die momentane Drehachse in Richtung  $e_\omega$  und der eingetragenen Drehrichtung aus.  $\triangleleft$

#### 4.2.4 Analytische Jacobi-Matrix

Neben der *geometrischen* Jacobi-Matrix gibt es noch die *analytische* Jacobi-Matrix<sup>3</sup>. Diese bezieht sich nicht auf Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_n^0$  sondern auf zeitliche Ableitungen skalarer Orientierungsgrößen, wie zum Beispiel der Euler-Winkel  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Namenszusatz „geometrisch“ zeigt auf, dass die Berechnung des Drehgeschwindigkeitsvektors auf geometrischer Anschauung basiert. Demgegenüber kennzeichnet Namenszusatz „analytisch“, dass eine analytische Berechnung in Form einer zeitlichen Ableitung von Orientierungsgrößen zugrunde liegt.

Diese zeitlich abgeleiteten Orientierungsgrößen sind oft einfacher zu interpretieren als der Drehgeschwindigkeitsvektor. Außerdem kann man durch zeitliche Integration die Orientierung rekonstruieren. Daher wird die algebraische Jacobi-Matrix oft der geometrischen Jacobi-Matrix vorgezogen, obwohl die Berechnung der algebraischen Jacobi-Matrix deutlich aufwendiger ausfällt.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_n^0$  eingeführt, um die zeitliche Änderung der Endeffektororientierung zu beschreiben. Für die analytische Jacobi-Matrix benötigt man eine Darstellung der Endeffektordrehgeschwindigkeit, die aus der zeitlichen Ableitung einer Größe zur Darstellung der Endeffektororientierung hervorgeht. Eine solche Größe gibt es für Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_n^0$  nicht<sup>4</sup>, so dass man damit nicht zur analytischen Jacobi-Matrix kommt.

Euler-Winkel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  erfüllen hingegen diese Eigenschaft: Sie selbst beschreiben die Endeffektororientierung und deren zeitliche Ableitung  $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$  (im Folgenden mit Euler-Winkelgeschwindigkeiten bezeichnet) die Endeffektordrehgeschwindigkeit. Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen diesen Euler-Winkelgeschwindigkeiten und Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_n^0 = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$  hergeleitet.

Die Orientierung des Endeffektors wird durch Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{0n}$  bestimmt. Dreht der Endeffektor mit Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_n^0$ , so ändert sich natürlich auch die

<sup>3</sup> In der deutschsprachigen Literatur findet sich für *analytische Jacobi-Matrix* auch der Begriff *algebraische Jacobi-Matrix*.

<sup>4</sup> Für eine infinitesimal kleine Drehung existiert ein *infinitesimaler Drehvektor*, dessen zeitliche Ableitung zum Drehgeschwindigkeitsvektor führt, siehe auch die Hinweise aus Abschn. 5.4.3.

Rotationsmatrix. Um diese Änderung darzustellen, wird durch Differenzialquotient

$$\dot{\tilde{R}}_{0n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}_{0n}(t + \Delta t) - \tilde{R}_{0n}(t)}{\Delta t}$$

die zeitliche Ableitung der Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{0n}$  eingeführt. Man kann zeigen, dass zwischen dieser Änderungsgeschwindigkeit der Rotationsmatrix und den Komponenten des Drehgeschwindigkeitsvektors Zusammenhang

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{R}}_{0n} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tilde{R}_{0n} \\ \Leftrightarrow \dot{\tilde{R}}_{0n} \tilde{R}_{0n}^T &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

besteht, siehe zum Beispiel [3, Sect. 5.4 Eq. (5.36), (5.40), (5.41)]. Die Elemente von  $\tilde{R}_{0n}$  seien mit  $r_{ij}$ , die von  $\dot{\tilde{R}}_{0n}$  mit  $\dot{r}_{ij}$  bezeichnet, so dass sich die linke Seite zu

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{R}}_{0n} \tilde{R}_{0n}^T &= \\ & \begin{bmatrix} r_{11} \dot{r}_{11} + r_{12} \dot{r}_{12} + r_{13} \dot{r}_{13} & r_{21} \dot{r}_{11} + r_{22} \dot{r}_{12} + r_{23} \dot{r}_{13} & r_{31} \dot{r}_{11} + r_{32} \dot{r}_{12} + r_{33} \dot{r}_{13} \\ r_{11} \dot{r}_{21} + r_{12} \dot{r}_{22} + r_{13} \dot{r}_{23} & r_{21} \dot{r}_{21} + r_{22} \dot{r}_{22} + r_{23} \dot{r}_{23} & r_{31} \dot{r}_{21} + r_{32} \dot{r}_{22} + r_{33} \dot{r}_{23} \\ r_{11} \dot{r}_{31} + r_{12} \dot{r}_{32} + r_{13} \dot{r}_{33} & r_{21} \dot{r}_{31} + r_{22} \dot{r}_{32} + r_{23} \dot{r}_{33} & r_{31} \dot{r}_{31} + r_{32} \dot{r}_{32} + r_{33} \dot{r}_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ausmultipliziert. Zieht man für  $\omega_x$  das 32-Element, für  $\omega_y$  das 13-Element und für  $\omega_z$  das 21-Element heran, so folgt Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{r}_{31} r_{21} + \dot{r}_{32} r_{22} + \dot{r}_{33} r_{23} \\ \omega_y &= \dot{r}_{11} r_{31} + \dot{r}_{12} r_{32} + \dot{r}_{13} r_{33} \\ \omega_z &= \dot{r}_{21} r_{11} + \dot{r}_{22} r_{12} + \dot{r}_{23} r_{13} . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt müssen die enthaltenen  $r_{ij}$  sowie  $\dot{r}_{ij}$  durch die Elemente einer Euler-Rotationsmatrix ersetzt werden.

Wählt man beispielsweise eine ZYZ Euler-Rotation aus, so sind die  $r_{ij}$ -Elemente aus Matrix  $\tilde{R}_{0n} = \text{Euler323}(\alpha, \beta, \gamma)$  aus (2.20) gegeben. Damit beträgt beispielsweise das 31-Element von  $\tilde{R}_{0n}$

$$r_{31} = -s_\beta c_\gamma$$

mit zeitlicher Ableitung

$$\dot{r}_{31} = \frac{d\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial\beta} r_{31} + \frac{d\gamma}{dt} \frac{\partial}{\partial\gamma} r_{31} = -c_\beta c_\gamma \dot{\beta} + s_\beta s_\gamma \dot{\gamma}.$$

Nach Umformungen mit Hilfe eines Formelmanipulationsprogramms führt dies auf

$$\boldsymbol{\omega}_n^0 = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta \end{bmatrix}}_{= \tilde{J}_{\text{Euler}323}} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Matrix  $\tilde{J}_{\text{Euler}323}$  bezeichnet man als *Euler-Jacobi-Matrix*. Im vorliegenden Fall bildet sie für festes  $\mathbf{q}$  (das heißt für einen momentanen Zeitpunkt) den Euler-Winkelgeschwindigkeitsvektor linear auf den Drehgeschwindigkeitsvektor ab.

Alternativ zur vorangegangenen Herleitung lässt sich mit Hilfe des Konzepts der *infinitesimalen Drehung* Zusammenhang (4.10) deutlich einfacher herleiten, siehe [4, Abschn. 4-8, Absätze über Gl. (4-103)]. Dabei wird der Drehgeschwindigkeitsvektor einer Euler-Drehung aus der Summe infinitesimaler Drehungen um die drei Drehachsen zusammengesetzt: Bei der betrachteten ZYZ Euler-Drehung dreht  $\alpha$  stets um die z-Achse des Weltkoordinatensystems. Damit ergibt sich für diese einzelne Drehung der zugehörige Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}_{n,\alpha}^0$  zu

$$\boldsymbol{\omega}_{n,\alpha}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\alpha}.$$

Das gedrehte Koordinatensystem ist in Weltkoordinaten durch  $\tilde{R}_z(\alpha)$  gegeben, siehe auch Abschn. 2.3.4 für eine ausführliche Behandlung der ZYZ Euler-Drehung. Damit stellt die zweite Spalte von  $\tilde{R}_z(\alpha)$  die Drehachse der zweiten Drehung in Weltkoordinaten dar. Aus (2.17a) folgt so bei einer infinitesimalen Drehung der zugehörige Drehgeschwindigkeitsvektor zu

$$\boldsymbol{\omega}_{n,\beta}^0 = \begin{pmatrix} -s_\alpha \\ c_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\beta}.$$

Die Einheitsvektoren des durch  $\alpha$  und  $\beta$  gedrehten Koordinatensystems berechnen sich in Weltkoordinaten zu

$$\tilde{R}_z(\alpha) \tilde{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}.$$

Die dritte Spalte stellt die Drehachse der letzten Euler-Drehung um Winkel  $\gamma$  dar, so dass bei einer infinitesimalen Drehung gilt:

$$\boldsymbol{\omega}_{n,\gamma}^0 = \begin{pmatrix} c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha s_\beta \\ c_\beta \end{pmatrix} \dot{\gamma}.$$

Durch Addition der einzelnen Komponenten des Drehgeschwindigkeitsvektors ergibt sich

$$\boldsymbol{\omega}_n^0 = \boldsymbol{\omega}_{n,\alpha}^0 \dot{\alpha} + \boldsymbol{\omega}_{n,\beta}^0 \dot{\beta} + \boldsymbol{\omega}_{n,\gamma}^0 \dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Dies bestätigt das oben bereits hergeleitete Resultat aus (4.10).

Setzt man (4.10) in

$$\boldsymbol{\omega}_n^0 = \tilde{J}_\omega \dot{\boldsymbol{q}}$$

aus (4.8) ein, so folgt

$$\tilde{J}_{\text{Euler323}} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \tilde{J}_\omega \dot{\boldsymbol{q}}.$$

Außerhalb der Euler-Singularität (also für  $\beta \neq \{0, \pi\}$ , siehe Abschn. 2.3.4) existiert die Inverse der Euler-Jacobi-Matrix und berechnet sich zu

$$\tilde{J}_{\text{Euler323}}^{-1} = \frac{1}{s_\beta} \begin{bmatrix} -c_\alpha c_\beta & -c_\beta s_\alpha & s_\beta \\ -s_\alpha s_\beta & c_\alpha s_\beta & 0 \\ c_\alpha & s_\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} &= \tilde{J}_{\text{Euler323}}^{-1} \tilde{J}_{\omega} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \tilde{J}_{\text{Euler323}}^{-1} \underbrace{\left( \text{InvEuler323}(\tilde{R}_{0n}(\mathbf{q})) \right)}_{(\alpha, \beta, \gamma)} \tilde{J}_{\omega}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Analog zum Vorgehen bei der geometrischen Jacobi-Matrix werden die translative und rotative Geschwindigkeitskomponente in einem Vektor zusammengefasst. Die Drehgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix  $\tilde{J}_{\omega}$  wird nun durch  $\tilde{J}_{\text{Euler323}}^{-1} \tilde{J}_{\omega}$  ersetzt und man erhält die Darstellung mit analytischer Jacobi-Matrix  $\tilde{J}_a$ , gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{J}_v(\mathbf{q}) \\ \tilde{J}_{\text{Euler323}}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{J}_{\omega}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}}_{\tilde{J}_a(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}}.$$

Zur Unterscheidung von der geometrischen Jacobi-Matrix erhält die analytische Jacobi-Matrix ein tiefgestelltes  $a$ .

**Beispiel 4.3.** Fortsetzung von Beispiel 4.2: Drehratensensor im Endeffektor

Nun sei ein Winkelgeschwindigkeitssensor/Drehratensensor für alle drei Achsen im Endeffektor montiert. Die mitgelieferte SW des Sensors gibt die Drehgeschwindigkeiten der ZYZ Euler-Winkel  $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I$  bezogen auf ein inertiales Koordinatensystem  $\tilde{S}_I$  an. Dabei ist die Orientierung von  $\tilde{S}_I$  in  $\tilde{S}_0$  bekannt mit  $\tilde{R}_{0I} = \text{const}$ . Das hochgestellte I soll die Euler-Winkel in  $\tilde{S}_I$ -Koordinaten von den Euler-Winkeln in Weltkoordinaten unterscheiden. Zusätzlich seien Gelenkwinkel  $\boldsymbol{\theta}$  und Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{0n}(\boldsymbol{\theta})$  bekannt.

Aus den gemessenen Drehgeschwindigkeiten  $(\dot{\alpha}^I, \dot{\beta}^I, \dot{\gamma}^I)$  soll der Drehgeschwindigkeitsvektor des Endeffektors in Weltkoordinaten  $\boldsymbol{\omega}_3^0$  bestimmt werden.

Hierfür folgt der gesuchte Drehgeschwindigkeitsvektor des Endeffektors zu

$$\boldsymbol{\omega}_3^0 = \tilde{R}_{0I} \boldsymbol{\omega}_3^I$$

mit

$$\boldsymbol{\omega}_3^I \stackrel{(4.10)}{=} \tilde{J}_{\text{Euler323}}(\alpha^I, \beta^I, \gamma^I) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}^I \\ \dot{\beta}^I \\ \dot{\gamma}^I \end{pmatrix}.$$

Die darin benötigte Euler-Winkel berechnet man schließlich durch

$$\begin{pmatrix} \alpha^I \\ \beta^I \\ \gamma^I \end{pmatrix} = \text{InvEuler323}(\tilde{R}_{I3}(\boldsymbol{\theta}))$$

mit

$$\tilde{R}_{I3}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{R}_{I0} \tilde{R}_{03}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{R}_{0I}^T \tilde{R}_{03}(\boldsymbol{\theta}). \quad \triangleleft$$

#### 4.2.5 Inverse Geschwindigkeitskinematik und Manipulator-Bestimmtheit

In den vorangegangenen Abschnitten wurde für die Geschwindigkeiten am Manipulator folgende Aufgabenstellung betrachtet:

Gegeben seien Gelenkvariablen  $\boldsymbol{q}$  mit Geschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{q}}$ , gesucht sind die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des Endeffektors.

In diesem Abschnitt wird die dazu inverse Aufgabenstellung betrachtet. Hierfür sind zunächst einige Definitionen notwendig:

- Zur Reduzierung des Schreibaufwands wird eine neue Variable  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  eingeführt, so dass sich (4.8) in kompakter Form

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{J}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}} \quad (4.11)$$

darstellen lässt. Damit folgt die Aufgabenstellung der inversen Geschwindigkeitskinematik zu

$$(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \mapsto \dot{\boldsymbol{q}}.$$

- Die Zahl der Gelenke wird mit  $N$  bezeichnet, die Zahl der betrachteten Geschwindigkeitskomponenten des Endeffektors mit  $M$ , das heißt

$$\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^N, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^M \quad \implies \quad \tilde{J} \in \mathbb{R}^{M \times N}.$$

- Die Endeffektorgeschwindigkeit kann maximal aus drei translatorischen und drei rotatorischen Elementen bestehen, so dass  $M \leq 6$ . Hier wird  $M$  als Zahl der *Endeffektorfreiheitsgrade* bezeichnet. Die Zahl linear unabhängiger Zeilen bzw. der Zeilenrang der Jacobi-Matrix sei  $m$ . In Abschn. 4.2.6 B wird gezeigt, dass der Fall  $m < M$  auch praktische Relevanz besitzt. Zum Beispiel kann auf einer sogenannten Begrenzungs-Singularität eine ganze Zeile von  $\tilde{J}$  zu Null werden.
- Die Zahl linear unabhängiger Spalten bzw. der Spaltenrang von  $\tilde{J}$  sei  $n$ .

**Anmerkung 4.1.** zur Nomenklatur: Bislang wurde die Zahl der Gelenke immer mit  $n$  bezeichnet. In diesem Abschnitt ist jedoch eine Unterscheidung der Zahl der Gelenke und des Spaltenrangs notwendig. Da der Spaltenrang stets kleiner oder gleich der Zahl der Gelenke ist, wird Kleinbuchstabe  $n$  für den Spaltenrang der Jacobi-Matrix und Großbuchstabe  $N$  für die Gelenkzahl gewählt.  $\square$

Für gegebene Werte der Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$  stellt (4.11) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem dar. Zeilen und Spalten von  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q})$  können auf bestimmten Gelenkpositionen (sogenannte *Singularitäten*, siehe weiter unten) linear abhängig werden. Spalten können auch von Haus aus linear abhängig sein. Das Lösungsverhalten hängt damit vom Zeilenrang  $m$  und Spaltenrang  $n$  von  $\tilde{\mathbf{J}}$  ab. Um es zu klassifizieren, wird hier der Begriff der *Manipulator-Bestimmtheit* mit den drei Fällen aus Tabelle 4.1 eingeführt.

**Tab. 4.1** Definition und Kurzinterpretation der Manipulator-Bestimmtheit

Nr.	Manipulator-Bestimmtheit	Bedingungen	Interpretation
# 1	Vollbestimmter Manipulator	$M = m \wedge N = n$ $\wedge N = M$ $\iff$ $N = M \wedge \text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}) \neq 0$	<p>Für alle geforderten Endeffektor-Geschwindigkeiten existiert genau eine Kombination von Gelenkwinkelgeschwindigkeiten.</p> <p>Dies stellt in der Praxis den Normalfall dar.</p>
# 2	Überbestimmter Manipulator (kinematische Redundanz)	$M = m \wedge N > M$ $\wedge n = m$ $\iff$ $N > M \wedge \text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{J}}^T) \neq 0$	<p>Der Manipulator ist „beweglicher“ als notwendig: Es sind mehr Gelenke als Endeffektor-Freiheitsgrade vorhanden. Man spricht daher auch von <i>redundanter</i> Kinematik.</p> <p>In diesem Fall gibt es für die geforderten Endeffektor-Geschwindigkeiten eine Lösungsvielfalt für die Gelenkgeschwindigkeiten. Nach bestimmten Optimierungskriterien kann daraus eine besonders geeignete Lösung gewählt werden („Luxus“!).</p>
# 3	Unterbestimmter Manipulator (unteraktuierter Manipulator)	$(N \geq M \wedge \text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{J}}^T) = 0) \vee N < M$	<p>Der Manipulator ist zu „unbeweglich“: Es sind zu wenige „wirksame“ Gelenke vorhanden, um die geforderten Endeffektorgeschwindigkeiten realisieren zu können; es existiert keine Lösung.</p> <p>Dieser Fall tritt in der Praxis auf einzelnen Gelenkpositionen (Singularitäten) auf, bei denen ein sonst oft voll- oder überbestimmter Manipulator auf unterbestimmt wechselt.</p> <p>Im Fall <math>N &lt; M</math> wären weniger Gelenke als geforderte Endeffektorfreiheitsgrade vorhanden. Dieser Fall tritt in der Praxis nicht auf und ist hier nur der Vollständigkeit halber angegeben.</p>

**Anmerkung 4.2.** zur Namensgebung *Unter-/Überbestimmtheit* eines Manipulators:

Weiter unten wird ersichtlich, dass Fall 2 des *überbestimmten* Manipulators in ein mathematisch *unterbestimmtes* lineares Gleichungssystem und Fall 3 des *unterbestimmten* Manipulators in ein *überbestimmtes* lineares Gleichungssystem resultiert.

Grob gesagt geht es bei Manipulator-Bestimmtheit darum, wie viele Gelenke (genauer: wie viele Komponenten von  $\dot{\mathbf{q}}$ ) zur Realisierung bzw. Bestimmung der geforderten Endeffektorfreiheitsgrade (hier Zahl  $M$ ) zur Verfügung stehen. Demgegenüber steht in der Mathematik hinter dem Begriff der Bestimmtheit eines linearen Gleichungssystems die Frage, ob für die gegebenen Unbekannten (hier: Anzahl  $N$  an Komponenten von  $\dot{\mathbf{q}}$ ) ausreichend viele Gleichungen (hier: Anzahl  $M$  an Endeffektorfreiheitsgraden) vorliegen. Diese unterschiedliche Sichtweise begründet die kontroverse Namensgebung „über-/unterbestimmt“, was zu einer gewissen Verwechslungsgefahr führt.  $\square$

#### 4.2.5.1 Fall 1: Vollbestimmter Manipulator

Ein vollbestimmter Manipulator liefert stets ein quadratisches lineares Gleichungssystem. So folgt beispielsweise mit  $N = 6$  Gelenken und  $M = 6$  Endeffektorgeschwindigkeitskomponenten

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_4 \\ \dot{\eta}_5 \\ \dot{\eta}_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}_{\tilde{J}(\mathbf{q}): (6 \times 6)\text{-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix}.$$

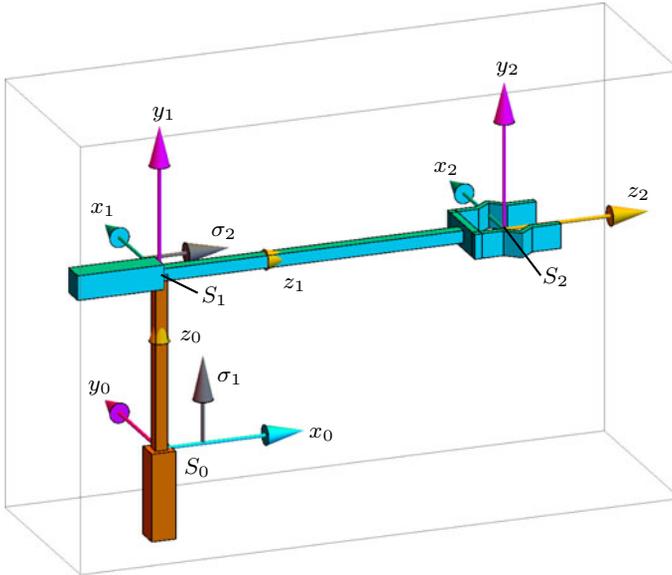
Daraus ergeben sich zwei notwendige Kriterien für Manipulator-Vollbestimmtheit: Zum einen muss  $M = m$  gelten, das heißt  $\tilde{J}(\mathbf{q})$  darf keine linear abhängigen Zeilen aufweisen (voller Zeilenrang). Andernfalls läge Fall 3 des unterbestimmten Manipulators vor. Zum anderen muss die Jacobi-Matrix quadratisch sein, das heißt  $N = M$ . Diese beiden notwendigen Kriterien können zusammengefasst werden zu einem notwendigen und hinreichenden Kriterium:

Der Manipulator ist genau dann vollbestimmt, wenn  $\tilde{J}(\mathbf{q})$  regulär ist, das heißt wenn

$$\text{Det}(\tilde{J}(\mathbf{q})) \neq 0. \quad (4.12)$$

Unter dieser Bedingung existiert Matrixinverse  $\tilde{J}^{-1}$ . Die gesuchte inverse Abbildung zu (4.11) folgt damit zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\eta}}.$$



**Abb. 4.8** Kartesischer 2-DoF-Manipulator aus Beispiel 4.4

**Beispiel 4.4.** Kartesischer 2-DoF-Manipulator aus Abb. 4.8: Die Gelenkvariablen sind  $\mathbf{q} = (\sigma_1, \sigma_2)$ . Als Endeffektorgeschwindigkeit wird nur der translative Teil  $\mathbf{v}_2^0 = \begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2z}^0 \end{pmatrix}$  betrachtet. Dafür folgt Lineargeschwindigkeits-Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_v$  gemäß

$$\begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}_v} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}_v^{-1}} \begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2z}^0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt  $M = m = 2$ , da es keine linear abhängigen Zeilen in  $\tilde{\mathbf{J}}$  gibt. Außerdem gilt  $N = n = 2$ , da auch die Spalten von  $\tilde{\mathbf{J}}$  linear unabhängig sind. Wegen  $M = m = 2 \wedge N = n = 2$  liegt ein vollbestimmter Manipulator vor.

Da  $\tilde{\mathbf{J}}$  quadratisch ist, kann als notwendiges und hinreichendes Kriterium auch (4.12) herangezogen werden: Man erhält  $\text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}_v) = -1 \neq 0$  und bestätigt so obige Aussage der Manipulator-Vollbestimmtheit.  $\triangleleft$

#### Mathematischer Einschub zum Rang von $\tilde{\mathbf{J}}$

Für den Rang einer Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  gilt allgemein  $\text{Rg}(\tilde{\mathbf{J}}) \leq \min(M, N)$  sowie  $\text{Rg}(\tilde{\mathbf{J}}) = \min(m, n)$ . Daraus folgt:

$$\text{Rg}(\tilde{\mathbf{J}}) \leq \begin{cases} N & \text{für } M > N \text{ (}\tilde{\mathbf{J}} \text{ stehend)} \\ M & \text{für } M < N \text{ (}\tilde{\mathbf{J}} \text{ liegend)} \end{cases}$$

Man kann zum Beispiel mittels Singulärwertzerlegung und Ranginvarianz bei Ähnlichkeitstransformationen zeigen, dass

$$\text{Rg}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = \text{Rg}(\tilde{J}^T\tilde{J}) = \text{Rg}(\tilde{J}),$$

siehe zum Beispiel [8, Abschn. 2.6 (S. 51–63)]. Zusammen mit

$$\begin{aligned}\tilde{J}\tilde{J}^T \in \mathbb{R}^{M \times M} &\implies \text{Rg}(\tilde{J}\tilde{J}^T) \leq M \\ \tilde{J}^T\tilde{J} \in \mathbb{R}^{N \times N} &\implies \text{Rg}(\tilde{J}^T\tilde{J}) \leq N\end{aligned}$$

ergeben sich einfach zu testende Rangabfall-Kriterien:

$$\begin{aligned}\tilde{J} \text{ quadratisch } M = N: & \quad \text{Det}(\tilde{J}) \neq 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) = M = N \\ & \quad \text{Det}(\tilde{J}) = 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) < M = N \\ \tilde{J} \text{ stehend } M > N: & \quad \text{Det}(\tilde{J}^T\tilde{J}) \neq 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) = N \\ & \quad \text{Det}(\tilde{J}^T\tilde{J}) = 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) < N \\ \tilde{J} \text{ liegend } M < N: & \quad \text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) \neq 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) = M \\ & \quad \text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) < M\end{aligned}$$

Bei quadratischem  $\tilde{J}$  gilt außerdem  $\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = \text{Det}(\tilde{J})\text{Det}(\tilde{J}^T) = \text{Det}(\tilde{J})^2$  und daher  $\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = 0 \iff \text{Det}(\tilde{J}) = 0$ . Daher kann obiger quadratischer und liegender Fall zusammengefügt werden zu

$$\begin{aligned}\tilde{J} \text{ liegend oder quadratisch, das heißt } M \leq N: & \quad \text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) \neq 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) = M \\ & \quad \text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = 0 \iff \text{Rg}(\tilde{J}) < M.\end{aligned}$$

#### 4.2.5.2 Fall 2: Überbestimmter Manipulator (redundante Kinematik)

Charakteristisch für überbestimmte Manipulatoren ist, dass die Zahl  $N$  vorhandener Gelenke die Zahl  $M$  geforderter Endeffektorfreiheitsgrade übersteigt, das heißt  $N > M$ .  $\tilde{J}$  ist also eine liegende Matrix, wie beispielsweise für  $M = 5$  und  $N = 6$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_4 \\ \dot{\eta}_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}_{\tilde{J}(\mathbf{q}): (5 \times 6)\text{-Matrix}} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix}.$$

In der Mathematik wird dies als *unterbestimmtes lineares Gleichungssystem* bezeichnet. Der Rang von  $\tilde{J}$  kann höchstens Zahl  $M$  der Zeilen entsprechen. Da es mehr Spalten als

Zeilen gibt, sind auf jeden Fall immer Spalten von  $\tilde{J}$  linear abhängig. Es dürfen aber nicht zu viele Spalten linear abhängig sein: Damit es wenigstens eine Lösung gibt, muss der Rang von  $\tilde{J}$  gleich der Zeilenzahl sein, also  $\text{Rg}(\tilde{J}) = M$ . Dies ist genau dann erfüllt, wenn  $\tilde{J}$  genau  $M$  viele linear unabhängige Zeilen und Spalten besitzt. In obigem Beispiel bedeutet dies  $\text{Rg}(\tilde{J}) = 5$ .

Nach obigem mathematischen Einschub zu Rangbedingungen ist diese Rang-Forderung gleichbedeutend mit  $\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) \neq 0$ . Zusammengefasst ergibt sich so die hinreichende und notwendige Bedingung für einen überbestimmten Manipulator zu

$$N > M \wedge \text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) \neq 0. \quad (4.13)$$

Man bezeichnet  $N - M$  als *Grad der (Manipulator)-Überbestimmtheit*. In obigem Beispiel liegt also eine Überbestimmtheit vom Grad 1 bzw. eine 1-fache Überbestimmtheit vor.

#### Beispiel 4.5. Planarer 4-DoF Ellenbogen-Manipulator

In diesem Beispiel liegen  $N = 4$  Drehgelenke vor. Da sich der Endeffektor aber immer nur in der  $x_0 - y_0$ -Ebene bewegen kann, ist die Zahl der Endeffektorfreiheitsgrade auf  $M = 3$  ( $2 \times$  Position,  $1 \times$  Orientierung) begrenzt. Die Geschwindigkeitszusammenhänge ergeben sich zu

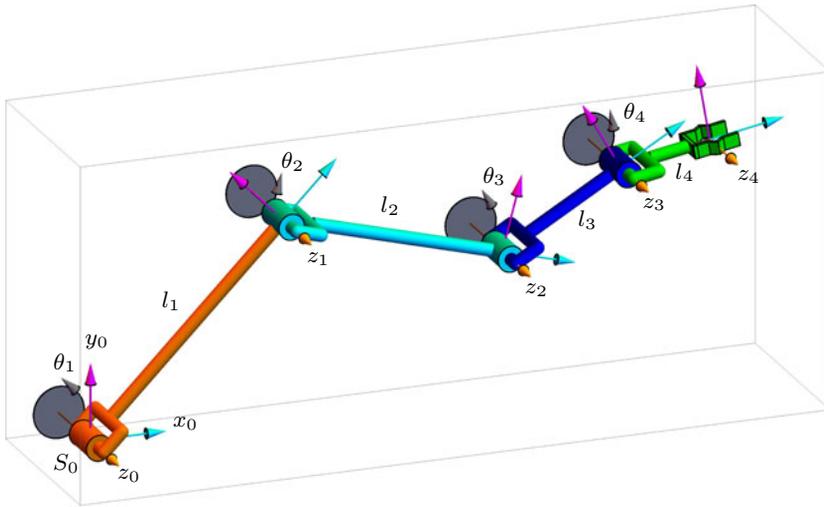
$$\begin{pmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \\ \omega_z^0 \end{pmatrix} = \tilde{J}(\theta) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}$$

mit einer  $3 \times 4$ -Jacobi-Matrix, gemäß

$$\tilde{J} = \left[ \begin{array}{cc|c} \hline -l_1s_1 - l_2s_{12} - l_3s_{123} - l_4s_{1234} & -l_2s_{12} - l_3s_{123} - l_4s_{1234} & \cdots \\ l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} + l_4c_{1234} & l_2c_{12} + l_3c_{123} + l_4c_{1234} & \cdots \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \cdots & \begin{array}{cc|c} \hline -l_3s_{123} - l_4s_{1234} & -l_4s_{1234} & \\ l_3c_{123} + l_4c_{1234} & l_4c_{1234} & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline \end{array} & \cdots \end{array} \right].$$

Für die Abb. 4.9 zugrunde liegenden Längen  $l_1 = 0.3$ ,  $l_2 = 0.25$ ,  $l_3 = 0.15$ ,  $l_4 = 0.1$  und Winkel  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_2 = -60^\circ$ ,  $\theta_3 = 45^\circ$ ,  $\theta_4 = -20^\circ$  liefert ein Formelmanipulationsprogramm

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} -0.239792 & -0.0276601 & -0.0923648 & -0.0173648 \\ 0.681998 & 0.469866 & 0.228385 & 0.0984808 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



**Abb. 4.9** Planarer 4-DoF Ellenbogen-Manipulator als Beispiel für einen Manipulator mit redundanten Gelenken; aus Beispiel 4.5

mit

$$\tilde{J}\tilde{J}^T = \begin{bmatrix} 0.0670981 & -0.199339 & -0.377182 \\ -0.199339 & 0.747753 & 1.47873 \\ -0.377182 & 1.47873 & 4 \end{bmatrix}$$

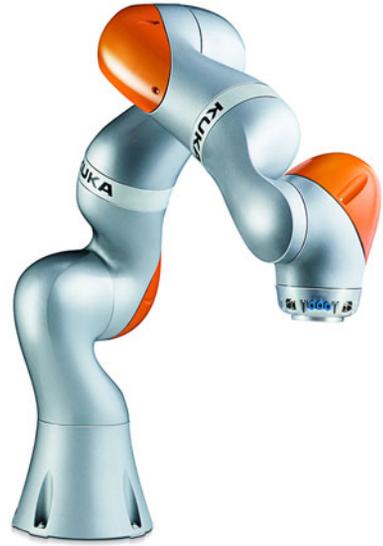
und  $\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = 0.0110104 \neq 0$ . Daraus folgt  $\text{Rg}(\tilde{J}) = 3$ . Wegen  $N = 4 > M = 3$  liegt damit eine  $N - M = 1$ -fache Manipulator-Überbestimmtheit vor.  $\triangleleft$

Beispiele redundanter Manipulatoren bzw. überbestimmter Manipulatoren:

- LBR iiwa der Fa. Kuka (7 Gelenke; in Abb. 4.10 Darstellung ohne Greifer)
- Menschlicher Arm: Sieben Gelenke (Schulter: 3, Ellenbogen: 1, Hand: 3)
- Menschliche Hand: 22 Gelenke
- „Snake“-Roboter (besitzen üblicherweise mehr als 10 Gelenke für 6 Freiheitsgrade; Abb. 4.11 zeigt Aiko<sup>5</sup> der Firma ROBOTNOR mit 20 Gelenken)

<sup>5</sup> Aiko – A snake robot with DC motors: <https://robotnor.no/research/aiko-a-snake-robot-with-dc-motors/>, Stand 24. September 2017.

**Abb. 4.10** Überbestimmter Manipulator LBR iiwa von KUKA Roboter GmbH: 7 Gelenke. Darstellung genehmigt von KUKA AG



**Abb. 4.11** Überbestimmter snake-robot Aiko von ROBOTNOR (mit freundlicher Genehmigung von NTNU/with courtesy of NTNU): 20 Gelenke



In der Mathematik bezeichnet man die hier auftretende Vielzahl an Lösungen als *Lösungsvielfalt*. Es gibt unterschiedliche Methoden, diese Redundanz sinnvoll zu nutzen:

- Min-Norm-Lösung:

$$\min \|\dot{\mathbf{q}}\|$$

unter Berücksichtigung von  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$

Damit werden die *betragsmäßig kleinsten Gelenkvariablen-Geschwindigkeiten* gesucht, die die Jacobi-Abbildung erfüllen. Die optimale Lösung dieses Minimierungsproblems mit Gleichungsnebenbedingung ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \tilde{\mathbf{J}}^+ \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{J}}^+ = \tilde{\mathbf{J}}^T (\tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{J}}^T)^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{J}}^+ \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (4.14)$$

wobei die optimale Lösung durch ein hochgestelltes  $\bullet^*$  gekennzeichnet ist. Dabei ist nach Voraussetzung von Fall 2 die  $M \times M$ -Matrix  $\tilde{J}\tilde{J}^T$  regulär, so dass stets auch die in der optimalen Lösung benötigte Inverse  $(\tilde{J}\tilde{J}^T)^{-1}$  existiert. Da man durch Rechtsmultiplikation von  $\tilde{J}^+$  auf  $\tilde{J}$  gemäß

$$\tilde{J}\tilde{J}^+ = \tilde{J} \left( \tilde{J}^T (\tilde{J}\tilde{J}^T)^{-1} \right) = \tilde{J}\tilde{J}^T (\tilde{J}\tilde{J}^T)^{-1} = \tilde{E} \quad (4.15)$$

auf die Einheitsmatrix kommt, bezeichnet man  $\tilde{J}^+$  als *Pseudo-Rechts-Inverse*<sup>6</sup>, siehe auch Beispiel 4.8 sowie [6, 7], [8, Abschn. 2.6 (S. 51–63)].

#### Herleitung der optimalen Lösung $\dot{q}^*$ :

Wegen  $\|\dot{q}\| = \sqrt{\dot{q}^T \dot{q}}$  kann zur Lösung des Minimierungsproblems die einfachere Gütefunktion

$$F(\dot{q}) = \dot{q}^T \dot{q}$$

verwendet werden. Da es sich um eine Minimierung mit Gleichungsnebenbedingung

$$\dot{\eta} - \tilde{J}(q)\dot{q} = \mathbf{0}$$

handelt, wird zur Lösung Lagrange-Funktion

$$L(\dot{q}, \lambda) = F(\dot{q}) + (\dot{\eta} - \tilde{J}(q)\dot{q})^T \lambda$$

aufgestellt. Die erste Optimalitätsbedingung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(\dot{q}, \lambda) \Big|_{(\dot{q}=\dot{q}^*, \lambda=\lambda^*)} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}} F(\dot{q}) \Big|_{\dot{q}=\dot{q}^*} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\tilde{J}(q)\dot{q})^T \Big|_{\dot{q}=\dot{q}^*} \lambda^* \\ &= 2\dot{q}^* - \tilde{J}^T(q)\lambda^* \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Setzt man das aus der Optimalitätsbedingung folgende

$$\dot{q}^* = \frac{1}{2} \tilde{J}^T(q)\lambda^*$$

in obige Gleichungsnebenbedingung ein, so ergibt sich

$$\dot{\eta} = \tilde{J}(q)\dot{q}^* = \frac{1}{2} \tilde{J}(q)\tilde{J}^T(q)\lambda^*$$

<sup>6</sup> Im Angelsächsischen nach seinen Erfindern *Moore-Penrose-Inverse* benannt. Anders als im Deutschen wird hier nicht zwischen Pseudo-Links-Inverser (alle Spalten von  $\tilde{J}$  linear unabhängig sowie  $M \geq N$ ) und Pseudo-Rechts-Inverser (alle Zeilen von  $\tilde{J}$  linear unabhängig benötigt  $M \leq N$ ) unterschieden.

mit quadratischem  $\tilde{J}\tilde{J}^T \in \mathbb{R}^{M \times M}$ . Nach Voraussetzung besitzt  $\tilde{J}\tilde{J}^T$  vollen Rang und ist damit invertierbar. Nach  $\lambda^*$  aufgelöst folgt

$$\lambda^* = 2 (\tilde{J}(\mathbf{q})\tilde{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \dot{\eta}.$$

Rückeinsetzen ergibt schließlich die gesuchte optimale Lösung

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{2} \tilde{J}^T(\mathbf{q}) 2 (\tilde{J}(\mathbf{q})\tilde{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \dot{\eta} = \underbrace{\tilde{J}^T(\mathbf{q}) (\tilde{J}(\mathbf{q})\tilde{J}^T(\mathbf{q}))^{-1}}_{\tilde{J}^+} \dot{\eta}.$$

In Beispiel 4.8 wird exemplarisch die Pseudo-Rechts-Inverse für einen überbestimmten planaren 4-DoF Manipulator berechnet.

- Singularitätsvermeidung durch Maximierung der *Manipulierbarkeit*  
Alternativ kann Redundanz auch dazu verwendet werden, den Manipulator in Positionen zu fahren, in denen er eine möglichst große Reichweite (bezogen auf Orientierung und Position) besitzt. Hierfür wurde ein *Manipulierbarkeitsmaß* entwickelt, [11, S. 153–156]:

$$\mu = \sqrt{\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T)}.$$

Die Maximierung von  $\mu$  führt dazu, dass der Manipulator nur minimale Wege zurücklegen muss.

- *Nullraumbewegung*  
Bei redundanten Manipulatoren können die Gelenke bewegt werden, ohne dass sich der Endeffektor bewegt. Ein Beispiel dafür zeigt Abb. 1.13 mit dem einfach-redundanten Manipulator LBR iiwa.  
Die dafür notwendigen Gelenkgeschwindigkeiten müssen

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}} = (\tilde{E} - \tilde{J}^+ \tilde{J}) \mathbf{w} \quad (4.16)$$

erfüllen, mit einem beliebigen Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ , siehe auch [9, 10, 12].  
Begründung: Setzt man  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}}$  in Ausgangsgleichung (4.11) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \tilde{J} \dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}} = \tilde{J} (\tilde{E} - \tilde{J}^+ \tilde{J}) \mathbf{w} \\ &= (\tilde{J} - \tilde{J} \tilde{J}^+ \tilde{J}) \mathbf{w} \end{aligned}$$

und wegen (4.15) weiter

$$= (\tilde{J} - \tilde{J}) \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Nichttriviale Lösungen  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}}$  des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

liegen im sogenannten *Nullraum* der Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$ . Dies motiviert oben eingeführten Index  $\bullet_{\text{Null}}$ . Eine weitere gängige Bezeichnung für den Nullraum ist *Kern der Matrix*; man schreibt dafür  $\text{Kern}(\tilde{\mathbf{J}})$ . Aus der elementaren Mathematik (Gauß-Algorithmus) ist bekannt, dass (4.17) eine Lösungsschar (bestehend aus nichttrivialen Lösungsvektoren) mit  $N - \text{Rg}(\tilde{\mathbf{J}})$  vielen Parametern aufweist. Diese Lösungsvektoren spannen den Nullraum von  $\tilde{\mathbf{J}}$  auf.

Überlagert man die für bestimmte Endeffektorgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  ermittelten Gelenkgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  mit einer Gelenkgeschwindigkeit des Nullraums, so ändert sich an der Endeffektorgeschwindigkeit nichts:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{J}} \left( \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}} \right) = \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}} = \tilde{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$$

Somit kann man zum Beispiel bei feststehendem Endeffektor durch eine entsprechende Nullraum-Gelenkgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}} \neq \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  die Position der Gelenke verändern, siehe zum Beispiel Abb. 4.10.

#### 4.2.5.3 Fall 3: Unterbestimmter Manipulator (unteraktuierter Manipulator)

Anschaulich bedeutet *Manipulator-Unterbestimmtheit*, dass mit den verfügbaren Gelenken (Anzahl  $N$ ) der Endeffektor nicht in Richtung aller geforderter Freiheitsgrade (Anzahl  $M$ ) bewegt werden kann. Es existiert keine Lösung für  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Es lassen sich zwei mögliche Ursachen für Manipulator-Unterbestimmtheit unterscheiden:

- a) Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  ist liegend oder quadratisch, das heißt  $N \geq M$ . Falls  $\tilde{\mathbf{J}}$  linear abhängige Zeilen oder Spaltenrang  $n < M$  aufweist, liegt der unterbestimmte Fall vor. In beiden Fällen gilt  $\text{Rg}(\tilde{\mathbf{J}}) < M$  und es folgt die

hinreichende Bedingung für Unterbestimmtheit:

$$M \leq N \wedge \text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{J}}^T) = 0. \quad (4.18)$$

Dieser Fall tritt häufig bei vollbestimmten Manipulatoren auf, die auf einer bestimmten Gelenkposition (sogenannte *Singularitäten*, siehe später) einen Abfall im Zeilenrang  $m$  erfahren und so von voll- auf unterbestimmt wechseln. Bei quadratischem  $\tilde{\mathbf{J}}$  gilt  $\text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}) = 0 \iff \text{Det}(\tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{J}}^T) = 0$ , so dass sich (4.18) entsprechend vereinfacht.

Auf einer speziellen Art der Singularität, die man Begrenzungs-Singularität (siehe Abschn. 4.2.6) nennt, können von der Jacobi-Matrix  $M - m$  Zeilen sogar vollständig zu Null werden. Beispielsweise ergibt sich für  $M = N = 6$  und  $m = 5$  ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_4 \\ \dot{\eta}_5 \\ \dot{\eta}_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}_{\tilde{J}(q): (6 \times 6)\text{-Matrix}} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix}.$$

Hier kann eine von Null verschiedene Endeffektorgeschwindigkeitskomponente  $\dot{\eta}_3$  durch keine Wahl von  $\dot{q}$  realisiert werden. Nur im Sonderfall  $\dot{\eta}_3 = 0$  gibt es keinen Widerspruch in der Geschwindigkeitskinematik. Siehe Beispiel 4.5 für  $q = \theta = 0$ .

Analog zum Fall linear abhängiger Zeilen tritt der unterbestimmte Fall auch häufig bei vollbestimmten Manipulatoren auf, die auf einer bestimmten Position (meist auf einer sogenannten *internen Singularität*, siehe Abschn. 4.2.6) einen Abfall im Spaltenrang  $n$  erfahren.

**Beispiel 4.6.** Unterbestimmter Fall beim anthropomorphen 6-DoF-Manipulator in der singulären Position aus Abb. 4.15: Hier tauchen in der gesamten inversen Kinematik die Gelenkwinkel für Turm-Drehen und Greifer-Drehen nur noch als Summe  $\theta_1 + \theta_6$  auf. In diesem Fall müssen also Spalten 1 und 6 voneinander linear abhängig sein, so dass  $\tilde{J}$  singulär ist.  $\triangleleft$

Jacobi-Matrix  $\tilde{J}$  verändert auf einer Singularität natürlich nicht ihre Spaltenzahl, da sich die Zahl der Gelenkvariablen nicht verändert (konstruktiv bedingt). Und auch die Zahl der geforderten Freiheitsgrade und damit die Zeilenzahl von  $\tilde{J}$  bleibt konstant. Man erkennt den unterbestimmten Fall also nicht an der Form von  $\tilde{J}$ ; vielmehr ist der Rangabfall von  $\tilde{J}$  entscheidend.

- b) Akademischer Sonderfall: Es liegen weniger Gelenke als Freiheitsgrade vor, das heißt  $N < M$  und damit  $\tilde{J}$  stehend.

In der Praxis werden Manipulatoren mechanisch natürlich immer so konstruiert, dass bestimmte Manipulationsaufgaben erfüllt werden können. Damit sind diese Manipulatoren sehr oft vollbestimmt, manchmal auch überbestimmt. Nur auf Singularitäten wechselt die Bestimmtheit auf unterbestimmt. Vorliegender Fall b) tritt in der Praxis also nicht auf.

Beispiel einer stehenden Matrix  $\tilde{J}(\mathbf{q})$  für  $N = 5$ ,  $M = 6$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_4 \\ \dot{\eta}_5 \\ \dot{\eta}_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}}_{\tilde{J}(\mathbf{q}): (6 \times 5)\text{-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall liegt ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem vor, so dass für allgemeine  $\dot{\eta}$  keine Lösung  $\dot{q}$  existiert.

## 4.2.6 Singularitäten

Oft sind Manipulatoren in den meisten Gelenkpositionen vollbestimmt oder sogar überbestimmt. In bestimmten Positionen werden sie aber unterbestimmt. Das inverse Problem zu (4.11) besitzt dann keine Lösung  $\dot{q}$  mehr, siehe Fall 2 (a) des vorangegangenen Abschnitts. Solche speziellen Gelenkpositionen werden als *Singularitäten* bezeichnet, da hier die Jacobi-Matrix  $\tilde{J}$  bzw. das Matrizenprodukt  $\tilde{J}\tilde{J}^T$  mathematisch singularär ist. Dies führt auf die Singularitätsbedingung:

Ein voll- oder überbestimmter Manipulator befindet sich genau dann auf einer Singularität, wenn (4.18) zutrifft.

Diese eher formal-mathematische Bedingung lässt sich in Sonderfällen anschaulich physikalisch begründen. Hierzu unterscheidet man zwei unterschiedliche Arten von Singularitäten:

A. (*Arbeitsraum-*) *interne Singularitäten*: In diesem Fall sind weniger linear unabhängige Spalten in der Jacobi-Matrix vorhanden, als Endeffektorfreiheitsgrade gefordert sind, das heißt  $n < M$ . Gleichzeitig befindet sich der Endeffektor nicht auf dem Rand des Arbeitsraums.

Aus (4.9) folgt allgemein die Bedingung für lineare Abhängigkeit von  $p \leq M$  vielen Spalten der Jacobi-Matrix zu

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} J_{v1} \\ J_{\omega 1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_p \begin{pmatrix} J_{vp} \\ J_{\omega p} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.19a)$$

$$\implies \lambda_1 \mathbf{e}_{z1} + \dots + \lambda_p \mathbf{e}_{zp} = \mathbf{0}, \quad (4.19b)$$

wobei mindestens einer der Faktoren  $\lambda_i$  von Null verschieden sein muss. Dies soll in den folgenden Ausdrücken zutreffen. Zur Reduzierung des Formalismus wurde dabei für die Spaltenindizes der Jacobi-Matrix  $\{1, \dots, p\}$  gewählt.

Aus (4.19b) liest man eine *notwendige Bedingung für eine interne Singularität* ab: Die Richtungsvektoren der Rotations-Gelenkachsen müssen linear abhängig und damit entweder komplanar<sup>7</sup> oder kollinear<sup>8</sup> sein.

Im häufig anzutreffenden Sonderfall, dass nur Rotationsgelenke betrachtet werden, liefert der obere Teil von (4.19a) Bedingung

$$\lambda_1 \mathbf{e}_{z1} \times \mathbf{r}_{1EE} + \dots + \lambda_p \mathbf{e}_{zp} \times \mathbf{r}_{pEE} = \mathbf{0}. \quad (4.19c)$$

Neben (4.19b) muss auch die zweite Bedingung (4.19c) für lineare Abhängigkeit erfüllt sein. Dies wird im Folgenden für zwei Sonderfälle näher betrachtet:

Sonderfall 1: Zwei Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix sind linear abhängig, das heißt kollinear:

$$\lambda_i \mathbf{e}_{zi} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{e}_{zj} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \mathbf{e}_{zi}$$

In (4.19c) eingesetzt liefert

$$\lambda_i \mathbf{e}_{zi} \times \mathbf{r}_{iEE} - \lambda_j \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \mathbf{e}_{zi} \times \mathbf{r}_{jEE} = \lambda_i \mathbf{e}_{zi} \times \underbrace{(\mathbf{r}_{iEE} - \mathbf{r}_{jEE})}_{\mathbf{r}_{ij}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

$\implies$

$$\text{Singularitätsbedingung 1: } \{\mathbf{e}_{zi}, \mathbf{e}_{zj}\} \text{ kollinear} \wedge \mathbf{e}_{zi} \times \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Damit muss also Verbindungsvektor  $\mathbf{r}_{ij}$  der Gelenke Nr.  $i$  und  $j$  kollinear zum Richtungsvektor beider (kollinearer) Gelenkachsen liegen. Aus einer einfachen geometrischen Betrachtung wird klar: Singularitätsbedingung (4.20) wird genau dann erfüllt, wenn die betrachteten Rotationsachsen aufeinander zu liegen kommen.

Sonderfall 2: Es besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen drei Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix. Dabei wird nur der komplanare Fall betrachtet, da der kollineare Fall vom vorangegangenen Sonderfall 1 bereits abgedeckt ist:

$$\lambda_i \mathbf{e}_{zi} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj} + \lambda_k \mathbf{e}_{zk} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{e}_{zk} = -\frac{1}{\lambda_k} (\lambda_i \mathbf{e}_{zi} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj})$$

<sup>7</sup> Komplanare Vektoren liegen innerhalb einer Ebene.

<sup>8</sup> Kollineare Vektoren sind parallel oder antiparallel.

In (4.19c) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} & \lambda_i \mathbf{e}_{zi} \times \mathbf{r}_{iEE} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj} \times \mathbf{r}_{jEE} - \lambda_k \frac{1}{\lambda_k} (\lambda_i \mathbf{e}_{zi} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj}) \times \mathbf{r}_{kEE} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ \implies & \\ \text{Singularitätsbedingung 2:} & \quad \{\mathbf{e}_{zi}, \mathbf{e}_{zj}, \mathbf{e}_{zk}\} \text{ komplanar} \wedge \\ & \quad \lambda_i \mathbf{e}_{zi} \times \mathbf{r}_{ik} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj} \times \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Der untere Teil von (4.21) erfordert, dass alle vier enthaltenen Vektoren komplanar sind.

Häufig schneiden sich zwei der drei betrachteten Gelenkachsen, sodass die Ursprünge der zugehörigen lokalen Koordinatensysteme aufeinander fallen. Betrifft dies zum Beispiel die ersten beiden betrachteten Gelenke, so folgt  $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_{jk}$ . In diesem Sonderfall vereinfacht sich der untere Teil von (4.21) wegen  $\lambda_i \mathbf{e}_{zi} \times \mathbf{r}_{ik} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj} \times \mathbf{r}_{ik} = (\lambda_i \mathbf{e}_{zi} + \lambda_j \mathbf{e}_{zj}) \times \mathbf{r}_{ik}$  zu

$$-\lambda_k \mathbf{e}_{zk} \times \mathbf{r}_{ik} = \mathbf{0}.$$

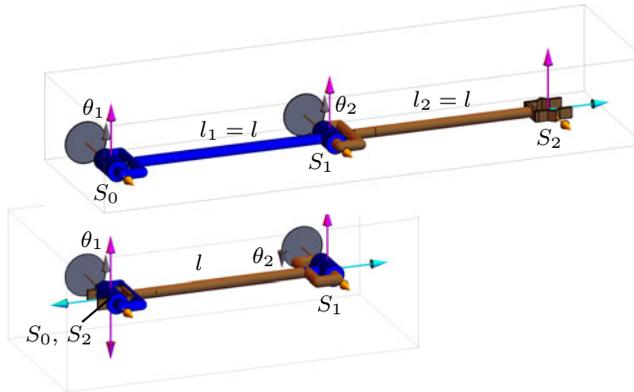
Dies bedeutet, dass die betrachtete dritte Gelenkachse  $\mathbf{e}_{zk}$  kollinear zum Verbindungsvektor von Gelenk  $i$  und  $k$  bzw.  $j$  und  $k$  liegen muss.

Analog zum oben betrachteten Fall können auch Singularitäten durch eine lineare Abhängigkeit zwischen vier oder mehr Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix auftreten.

B. (*Arbeitsraum-*) *Begrenzungs-Singularitäten*: Ränder des durch Armgeometrien beschränkten Arbeitsraums sind erreicht. Gelenkvariablengeschwindigkeiten können dann eine oder mehrere Komponenten der Endeffektorgeschwindigkeit (Position und/oder Orientierung) nicht mehr unabhängig voneinander oder gar nicht beeinflussen. Damit ist diese Arte der Singularität dadurch geprägt, dass Zeilen der Jacobi-Matrix linear abhängig sind. Ein häufig anzutreffender Sonderfall besteht darin, dass eine ganze Zeile der Jacobi-Matrix nur mit Nullen besetzt ist.

In allen praktisch relevanten Fällen gilt  $N \geq M$ , so dass der maximale Rang der Jacobi-Matrix von der Zahl linear unabhängiger Zeilen  $m$  beschränkt ist. Ein Abfall im Zeilenrang  $m$  führt daher stets auch zum Abfall im Spaltenrang. Rangbedingungen alleine genügen also nicht, um zwischen Begrenzungs- und interner Singularität zu unterscheiden. Vielmehr ist entscheidend, ob auf der Singularität der Rand des Arbeitsraums erreicht ist.

Für die Benennungen der beiden Arten von Singularitäten siehe auch [3, Abschn. 5.8, S. 151].



**Abb. 4.12** Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit gleichen Armlängen in Beschränkungs-Singularitäten. *Oben*: ausgestreckte Position mit  $\theta_2 = 0$ ; *unten*: eingefaltete Position mit  $\theta_2 = \pi$

**Beispiel 4.7.** Singuläre Positionen beim planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Abb. 4.12 mit gleichen Armlängen  $l_1 = l_2 = l$ , vergleiche auch Aufgabe 4.4.

Jacobi-Matrix  $\tilde{J}$  und deren Determinante berechnen sich zu

$$\begin{pmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \end{pmatrix} = l \underbrace{\begin{bmatrix} -s_1 - s_{12} & -s_{12} \\ c_1 + c_{12} & c_{12} \end{bmatrix}}_{\tilde{J}} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{Det}(\tilde{J}_v) = l^2 s_2.$$

Daraus liest man direkt die singulären Positionen ab zu  $\theta_2 \in \{0, \pm\pi\}$ .

Für  $\theta_2 = \pi$  ergibt sich

$$\tilde{J}|_{\theta_2=\pi} = l \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \end{bmatrix}.$$

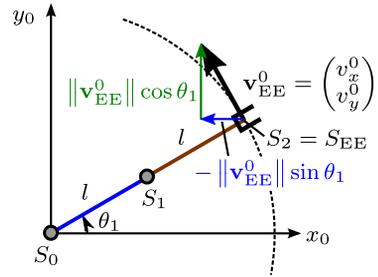
Damit kann in dieser Singularität nur Gelenk 2 die Endeffektorgeschwindigkeit verändern, Gelenk 1 hat keinen Einfluss. Da also nur ein Gelenk zur Verfügung steht, kann damit auch nur ein Endeffektorfreiheitsgrad eingestellt/bestimmt werden. Der andere Freiheitsgrad bestimmt sich dann automatisch durch die lineare Abhängigkeit der beiden Zeilen von  $\tilde{J}$ , gemäß

$$v_x^0 (-c_1) = v_y^0 s_1.$$

In dargestellter Position aus Abb. 4.12 (oben) gilt wegen  $\theta_1 = 0$

$$v_x^0 (-\cos(0)) = v_y^0 \sin(0) \iff v_x^0 = 0.$$

**Abb. 4.13** Eingeschränkte  
Endeffektorbewegungsrichtung  
auf Singularität  $\theta_2 = 0$



Der Endeffektor kann sich in dieser Position also nur senkrecht nach oben oder unten bewegen. Für Positionen, an denen  $s_1 \neq 0$  gilt, folgt hingegen

$$\frac{v_y^0}{v_x^0} = -\frac{c_1}{s_1}.$$

Dies beschreibt die in Abb. 4.13 gestrichelt dargestellte Kreisbahn. Dies erkennt man auch daran, dass der Endeffektorgeschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_{EE} = \begin{pmatrix} v_x^0 & v_y^0 \end{pmatrix}^T$  stets senkrecht auf Translationsvektor  $\mathbf{t}_{EE}$  steht:

$$\begin{aligned} 2l \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \end{pmatrix} &= 2l (v_x^0 \cos \theta_1 + v_y^0 \sin \theta_1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow v_x^0 \cos \theta_1 &\stackrel{!}{=} -v_y^0 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt das anschauliche Ergebnis, dass die Endeffektorbewegungsrichtung auf der Singularität  $\theta_2 = 0$  auf diese Kreisbahn beschränkt ist.

Für allgemeine Werte von  $v_x^0, v_y^0$  existiert also keine Lösung – der Manipulator ist auf dieser Singularität unterbestimmt.

Auch auf der zweiten Singularität bei  $\theta_2 = 0$  ergibt sich ein Rangabfall in der Jacobi-matrix

$$\tilde{\mathbf{J}}|_{\theta_2=0} = l \begin{bmatrix} -2s_1 & -s_1 \\ 2c_1 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Analog zu obigem Fall folgen aus der linearen Abhängigkeit der Zeilen von  $\tilde{\mathbf{J}}$  die zulässigen Endeffektorgeschwindigkeiten zu

$$v_x^0 c_1 = -v_y^0 s_1.$$

Zur Art der Singularität: Bei beiden singulären Positionen besteht ein Abfall im Zeilen- und Spaltenrang. Außerdem ist auf beiden Singularitäten der Rand des Arbeitsraums erreicht, so dass Beschränkungs-Singularitäten vorliegen. <

**Beispiel 4.8.** Fortsetzung von Beispiel 4.5 (mit veränderten Längen)

Falls das zweite Gelenk des 4-DoF Ellenbogen-Manipulators mit  $\theta_2 = \pi$  ganz eingeklappt ist, sowie alle Armlängen 1 betragen, kommt die dritte Achse auf der ersten Achse zu liegen. Spalten 1 und 3 der Jacobi-Matrix

$$\tilde{J}|_{\theta_2=\pi} = \begin{bmatrix} s_{13} + s_{134} & s_1 + s_{13} + s_{134} & s_{13} + s_{134} & s_{134} \\ -c_{13} - c_{134} & -c_1 - c_{13} - c_{134} & -c_{13} - c_{134} & -c_{134} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

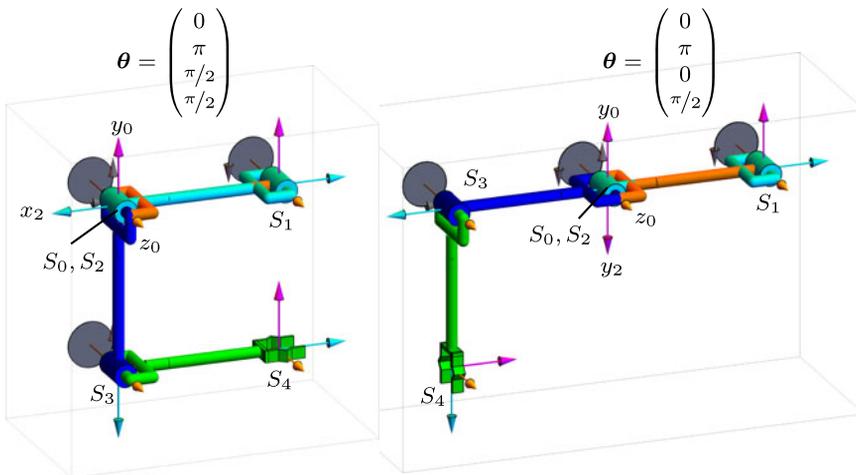
sind in diesem Fall identisch und damit linear abhängig. Wegen

$$\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T)|_{\theta_2=\pi} = 2s_3^2$$

liegen aber für  $s_3 \neq 0$  immer noch drei linear unabhängige Spaltenvektoren in  $\tilde{J}$  und damit noch keine Singularität vor. Daraus erkennt man, dass das Auftreten aufeinander liegender Achsen noch kein hinreichendes Kriterium für Singularitäten ist. Erst für  $s_3 = 0$  liegt eine Singularität vor.

Wegen  $\theta_2 = \pi$  kommen in beiden Teilgrafiken von Abb. 4.14 Achsen 1 und 3 aufeinander zu liegen. Im Fall der linken Teilgraphik berechnet sich die Jacobi-Matrix zu

$$\tilde{J}|_{\theta_1=0, \theta_2=\pi, \theta_3=\pi/2, \theta_4=\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$



**Abb. 4.14** Planarer 4-DoF Manipulator mit gleichen Armlängen und aufeinander liegender Achsen 1 und 3; *links*: keine singuläre Position; *rechts*: singuläre Position

Spalten 1 und 3 sind linear abhängig. Wegen

$$\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T)|_{\theta_1=0, \theta_2=\pi, \theta_3=\pi/2, \theta_4=\pi/2} = 2 \neq 0$$

muss  $\tilde{J}$  vollen Rang, das heißt Rang 3 besitzen. Daher liegt trotz aufeinander liegender Gelenkachsen keine Singularität vor. Vielmehr ist der Manipulator in dieser Position immer noch 1-fach überbestimmt, so dass eine eindimensionale Lösungsvielfalt für das resultierende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \\ \omega_z^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}$$

existieren muss. Eine Lösung kann man von Hand zum Beispiel durch das Gauß-Eliminationsverfahren ermitteln:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & v_x^0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & v_y^0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \omega_z^0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{Z_2 = -1 \cdot (Z_2 - Z_1) \\ Z_3 = Z_3 - Z_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & v_x^0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -v_y^0 + v_x^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_z^0 - v_x^0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{Z_2 = Z_2 + Z_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & v_x^0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \omega_z^0 - v_y^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega_z^0 - v_x^0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Aus Zeile 2 und 3 liest man ab:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_z^0 - v_y^0 \\ \dot{\theta}_4 &= \omega_z^0 - v_x^0 \end{aligned}$$

Dies ergibt zusammen mit Parameter  $\lambda = \dot{\theta}_1$  aus Zeile 1:

$$\lambda + \omega_z^0 - v_y^0 + \dot{\theta}_3 = v_x^0 \iff \dot{\theta}_3 = v_x^0 - \omega_z^0 + v_y^0 - \lambda.$$

Zusammengefasst folgt schließlich als Lösung die einparametrische Lösungsschar

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_z^0 - v_y^0 \\ v_x^0 - \omega_z^0 + v_y^0 \\ \omega_z^0 - v_x^0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit freiem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Die Min-Norm-Lösung ergibt mit Pseudo-Rechts-Inverser

$$\begin{aligned}
 \tilde{j}^+ &= \tilde{J}^T (\tilde{J} \tilde{J}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

die optimale Lösung

$$\dot{\theta}^* = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\tilde{j}^+} \begin{pmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \\ \omega_z^0 \end{pmatrix}.$$

Für  $v_x^0 = v_y^0 = \omega_z^0 = 1$  und  $\lambda = 0$  liefert die erste Berechnungsvariante  $\dot{\theta} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ . Die optimale Lösung berechnet sich hierfür zu  $\dot{\theta}^* = (1/2 \ 0 \ 1/2 \ 0)^T$  mit  $\|\dot{\theta}^*\| = 1/\sqrt{2} < \|\dot{\theta}\| = 1$ .

Abb. 4.14 (rechts) zeigt eine Position, die sich gegenüber der Position der linken Teilgrafik nur im dritten Gelenk unterscheidet. Wegen  $\theta_3 = 0$  ergibt sich hier

$$\tilde{J}|_{\theta_1=0, \theta_2=\pi, \theta_3=0, \theta_4=\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Zeile 1 und 3 sind identisch und daher linear abhängig. Damit reduziert sich der Zeilenrang auf  $m = 2$ . Der dabei auftretende Rangabfall wird rechnerisch durch

$$\text{Det}(\tilde{J} \tilde{J}^T)|_{\theta_1=0, \theta_2=\pi, \theta_3=0, \theta_4=\pi/2} = 0$$

bestätigt, so dass hier eine singuläre Position vorliegt. Diese lässt wegen den identischen Zeilen 1 und 3 nur eine Lösung im Sonderfall  $v_x^0 = \omega_z^0$  zu.

Man kann den Rangabfall alternativ auch durch eine Betrachtung der Spalten von  $\tilde{J}$  bestimmen: Spalten 1 und 3 sind identisch. Außerdem sind die Summen von Spalte 1 und 3 sowie von Spalte 2 und 4 ebenfalls identisch. Damit gibt es nur zwei linear unabhängige Spaltenvektoren in  $\tilde{J}$ , womit obige Zeilen-Betrachtung bestätigt wird.

Die Singularität tritt in diesem Fall nicht am Rand des Arbeitsraums auf, so dass eine interne Singularität vorliegt. Im Vergleich zum vorangegangenen Fall aus Abb. 4.14 (links) fällt auf, dass für die interne Singularität kein weiteres Gelenkachsenpaar aufeinander zu liegen kommen muss.

Im ausgestreckten Fall  $\theta = \mathbf{0}$  ergibt sich

$$\tilde{J}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1234} & l_{234} & l_{34} & l_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass die  $v_x$ -Komponente der Endeffektorgeschwindigkeit nicht mehr beeinflussbar ist und immer verschwindet. Die Zahl linear unabhängiger Zeilen reduziert sich wieder auf  $m = 2$ , so dass  $\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = 0$ . Die ausgestreckte Position ist damit eine Singularität. Da sie am Rand des Arbeitsraums liegt, handelt es sich um eine Begrenzungs-Singularität.  $\triangleleft$

**Beispiel 4.9.** Singuläre Position beim anthropomorphen 6-DoF-Manipulator aus Beispiel 3.3. Abb. 4.15 zeigt ein Beispiel für eine interne Singularität:

Drehachsen  $z_0$  (Turm-Drehen) und  $z_5$  (Greifer-Drehen) fallen aufeinander. Damit bestimmt lediglich Summe  $\theta_1 + \theta_6$  die Endeffektororientierung. Drehen sich beide Achsen mit entgegengesetzt gleicher Drehgeschwindigkeit, so verändert dies die Endeffektororientierung nicht. Man bezeichnet eine solche Bewegung auch als Nullraumbewegung. Es sollen  $M = 6$  viele Endeffektorfreiheitsgrade bestimmt werden. Auf der dargestellten Singularität reduziert sich die Zahl linear unabhängiger Spalten auf  $n = 5$ , so dass  $\tilde{J}$  einen Rangabfall aufweist, und eine Singularität vorliegt.

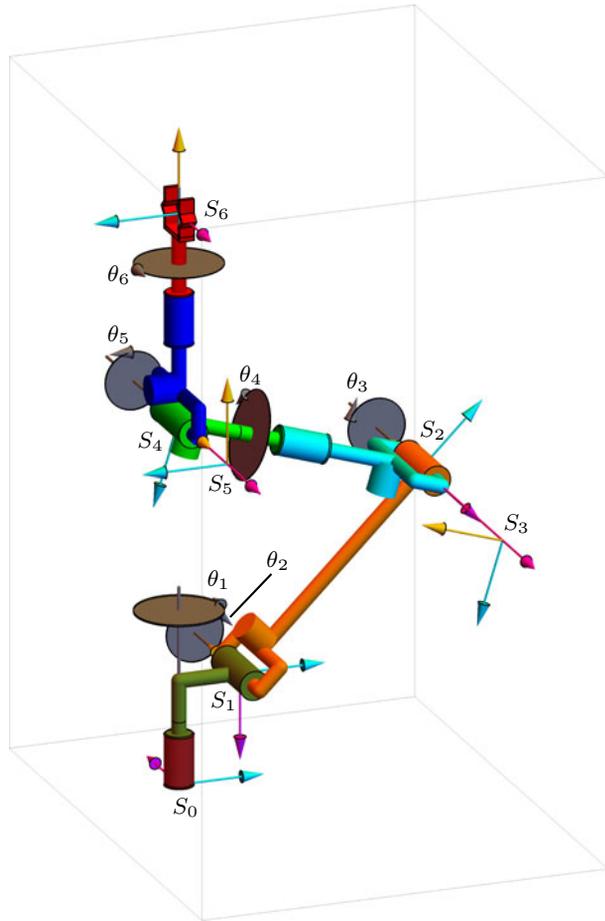
Die in Abb. 4.15 dargestellte Position des Endeffektors in  $S_0$  beträgt  $t_6 = (0 \ 0 \ 0.55)^T$ , die Orientierung wird bestimmt durch

$$\tilde{R}_{06} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In der dargestellten Konfiguration (links-oben-2) betragen die Gelenkwinkel

$$\theta \approx (0^\circ \quad -44.4396^\circ \quad -118.112^\circ \quad 0^\circ \quad -72.5518^\circ \quad 0^\circ). \quad \triangleleft$$

**Abb. 4.15** Anthropomorpher Manipulator in singulärer Position. Beispiel für den vollbestimmten Fall, bei dem in singulären Positionen der Manipulator unterbestimmt wird. Koordinatensysteme  $S_3$  und  $S_5$  sind aus Gründen einer besseren Darstellung nach außen versetzt dargestellt



Weitere Beispiele für singuläre Positionen finden sich in [11, S. 145–147].

### Zusammenhang zwischen Singularitäten bei Geschwindigkeitskinematik und inverser Kinematik

In Abschn. 3.1 wurden Singularitäten als Positionen des Manipulators definiert, bei denen unendlich viele Lösungen der inversen Kinematik auftreten. Eine solche Singularität trat beispielsweise bei Basiskinematik 2 aus Abschn. 3.3 bei  $\theta_2 = \mp\pi$  auf. Betrachtet wurde dabei ein 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit gleichen Armlängen wie aus Beispiel 4.7. Im Vergleich stellt man fest, dass die Singularität bei  $\theta_2 = \pm\pi$  in der Geschwindigkeitsgleichung mit der Singularität aus der inversen Kinematik übereinstimmt.

Auch im folgenden Beispiel von Basiskinematik 3 besteht dieser Zusammenhang zwischen den Singularitäten:

**Beispiel 4.10.** Basiskinematik 3 (Pseudo-Kugelgelenk) aus Abschn. 3.4 besteht aus einer Gelenkanordnung, die durch ZYZ Euler-Winkel  $\alpha = \theta_1$ ,  $\beta = \theta_2$  und  $\gamma = \theta_3$  beschrieben werden kann. Die inverse Kinematik wurde in Form der Funktion  $\text{InvEuler323}$  in Abschn. 2.3.4 hergeleitet. Dabei wurden die Euler-Singularitäten bei  $\beta \in \{0, \pi\}$  identifiziert. Auf diesen Singularitäten der inversen Kinematik kann nach (2.22) nur die Summe oder Differenz  $\alpha \pm \gamma$  bestimmt werden, so dass definitionsgemäß eine unendlich große Lösungsmenge für die inverse Kinematik auftritt.

Jacobi-Matrix  $\tilde{J}_{\text{Euler323}}$  ist durch (4.10) gegeben, mit Determinante

$$\text{Det}(\tilde{J}_{\text{Euler323}}) = -\sin(\beta).$$

Schränkt man den Winkelbereich wie bei der inversen Kinematik auf  $\beta \in ]-\pi; \pi[$  ein, so liegen die Singularitäten der Geschwindigkeitskinematik bei  $\beta \in \{0, \pi\}$ . Auch in diesem Beispiel liegen also die Singularitäten von inverser Kinematik und Geschwindigkeitskinematik an derselben Gelenkposition.  $\triangleleft$

Es ist anzumerken, dass die Auswirkungen von Singularitäten bei der inversen Kinematik und bei der inversen Geschwindigkeitskinematik unterschiedlich sind:

- Eine Singularität bei der inversen Kinematik führt zu unendlich vielen Lösungen.
- Eine Singularität bei der Geschwindigkeitsgleichung führt im allgemeinen Fall dazu, dass keine Lösung existiert (unterbestimmter Manipulator).

Die übereinstimmenden Gelenkpositionen von Singularitäten bei inverser Kinematik und inverser Geschwindigkeitskinematik in den vorangegangenen Beispielen vollbestimmter Manipulatoren sind natürlich nicht zufällig. Um den Zusammenhang für *vollbestimmte* Manipulatoren zu erläutern, wird die direkte Kinematik durch eine vektorwertige Funktion  $f: \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^n$  gemäß

$$\eta = f(q)$$

dargestellt. Dabei soll die Orientierung nicht durch eine Rotationsmatrix, sondern durch Euler-Winkel dargestellt sein, das heißt die unteren drei Koordinaten von  $\eta$  sind die drei Euler-Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . (Damit entspricht das hier verwendete  $\eta$  nicht dem Integral von  $\dot{\eta}$  aus (4.11)!) Existiert Inverse  $f^{-1}$ , so folgt damit die inverse Kinematik zu

$$q = f^{-1}(\eta).$$

Sei  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$  die offene Menge<sup>9</sup> aller zulässigen Gelenkpositionen  $q$ . Weiterhin sei  $q^*$  ein innerer Punkt davon. Außerdem sei  $f$  auf einer lokalen Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $q^*$  stetig

<sup>9</sup> Zu einem inneren Punkt einer Menge gibt es immer eine Umgebung, die vollständig ebenfalls zur Menge gehört. Ein innerer Punkt liegt also nicht auf dem Rand der Menge. Bei einer offenen Menge ist daher jeder Punkt ein innerer Punkt.

differenzierbar. Dann existiert nach dem *Satz über Umkehrfunktionen* Inverse  $f^{-1}$  genau dann in  $\mathcal{U}$ , wenn die analytische Jacobi-Matrix<sup>10</sup>

$$\tilde{J}_a(\mathbf{q}) = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial q_N} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

in Punkt  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$  regulär ist, das heißt wenn  $\text{Det}(\tilde{J}_a(\mathbf{q}^*)) \neq 0$ .

Daraus folgt für vollbestimmte Manipulatoren: Auf Singularitäten der Geschwindigkeitskinematik existiert keine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  der direkten Kinematik und damit auch keine eindeutige Lösung für die inverse Kinematik. Davon ausgenommen sind Singularitäten am Rand des zulässigen Bereichs von  $\mathbf{q}$ , da diese definitionsgemäß nicht in  $\mathcal{M}$  liegen. Bei Drehachsen treten die Gelenkvariablen jedoch nur im Argument einer sin- oder cos-Funktion auf. Wegen deren  $2\pi$ -Periodizität kann damit bei obiger Betrachtung  $\mathcal{M}$  als unbeschränkt angenommen werden, so dass es keine Randpunkte gibt.

**Beispiel 4.11.** Basiskinematik 2 (2-DoF Ellenbogen-Manipulator) aus Abschn. 3.3: Homogene Transformationsmatrix  $\tilde{T}_{02}$  folgt aus  $\tilde{T}_{01}$  und  $\tilde{T}_{12}$  von Beispiel 2.20 des 3-DoF Ellenbogen-Manipulators zu

$$\tilde{T}_{02} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_1 l_1 + c_{12} l_2 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Als direkte Kinematik wird nur kartesische Endeffektorposition

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} x_{EE}^0 \\ y_{EE}^0 \end{pmatrix} = \underbrace{l \begin{pmatrix} c_1 + c_{12} \\ s_1 + s_{12} \end{pmatrix}}_{f(\mathbf{q})}$$

mit  $l_1 = l_2 = l$  betrachtet, so dass der Manipulator außerhalb von Singularitäten vollbestimmt ist. Da nur kartesische Positionen und keine Orientierungen betrachtet werden, sind analytische und geometrische Jacobi-Matrix gleich. Sie berechnet sich nach der allgemeinen Definition aus (5.46a) zu

$$\tilde{J}(\mathbf{q}) = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -s_1 - s_{12} & -s_{12} \\ c_1 + c_{12} & c_{12} \end{bmatrix}$$

<sup>10</sup> Siehe auch (5.46a) für eine allgemeine Definition der Jacobi-Matrix.

mit  $\text{Det}(\tilde{J}(\mathbf{q})) = l^2 \sin(\theta_2)$  und den durch  $\sin(\theta_2) = 0$  definierten Singularitäten. Damit existiert in einer *lokalen* Umgebung jedes nichtsingulären Punkts die inverse Kinematik.

Da es zu einem  $\eta$  bei der inversen Kinematik nach Abschn. 3.3 zwei Lösungen  $\mathbf{q}_{\text{oben}}$  und  $\mathbf{q}_{\text{unten}}$  gibt, existiert keine *globale* stetige inverse Funktion  $\mathbf{f}^{-1}$ . Die in der inversen Kinematik aus Abschn. 3.3 enthaltenen Fallunterscheidungen bestätigen diese Aussage.

◁

Bei einem *überbestimmten bzw. redundanten Manipulator* können Singularitäten in der inversen Kinematik auftauchen, ohne dass dabei die Geschwindigkeitskinematik singularär wird. Ein Beispiel dafür zeigt Abb. 4.14 (links). Für eine feste Endeffektorlage ist dabei nur  $\theta_1 + \theta_3$  bestimmt, so dass in der inversen Kinematik eine Singularität besteht. Die Geschwindigkeitskinematik ist jedoch nichtsingulär.

### Praktische Auswirkungen von Singularitäten

- In realen Anwendungen besteht die Gefahr, dass in den SW-implementierten Gleichungen der inversen Jacobi-Matrix aus  $\dot{\mathbf{q}} = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\eta}$  Nenner gegen 0 laufen, wenn eine Singularität angesteuert wird.
- Je näher ein Manipulator mit inverser Kinematik in der Steuerung einer internen Singularität kommt, desto größer werden die Gelenkgeschwindigkeiten, wenn die Endeffektorgeschwindigkeit konstant bleiben soll, siehe Beispiel 4.12. Antriebsseitige Geschwindigkeitsbegrenzungen in den Gelenkantrieben bestimmen damit minimal zulässige Abstände zu internen Singularitäten. Es gibt verschiedene Strategien, um bei der Bahnplanung diese minimal zulässigen Abstände einzuhalten, siehe zum Beispiel [11].
- In einer Singularität ist der Endeffektor in seinen Bewegungsrichtungen eingeschränkt, siehe Beispiele 4.7 und 4.8.
- Bei Annäherung an eine Singularität kann ein Manipulator trotz begrenzter Antriebsmomente theoretisch unbegrenzte Kräfte und Momente auf die Umgebung ausüben, siehe Abschn. 4.3.2. In der Praxis sind diese Kräfte und Momente natürlich immer durch Bruchgrenzen verwendeter Materialien beschränkt.
- Oft wird bereits bei der mechanischen Konstruktion darauf geachtet, dass Gelenkachsen im gesamten Bewegungsbereich nicht aufeinander fallen können und somit eine häufige Ursache interner Singularitäten inhärent ausgeschlossen wird.

**Beispiel 4.12.** Fortsetzung von Beispiel 4.7: Mit inverser Jacobi-Matrix

$$\tilde{J}_v^{-1} = \frac{1}{l c_2} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -c_1 - c_{12} & -s_1 - s_{12} \end{bmatrix}$$

berechnen sich die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten aus der Translationsgeschwindigkeit des Endeffektors zu

$$\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \tilde{J}_v^{-1} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{l c_2} \begin{pmatrix} c_{12} v_x + s_{12} v_y \\ -(c_1 + c_{12}) v_x - (s_1 + s_{12}) v_y \end{pmatrix}$$

mit Betrag

$$\|\dot{\theta}\| = \frac{1}{l |c_2|} \sqrt{(c_{12} v_x + s_{12} v_y)^2 + ((c_1 + c_{12}) v_x + (s_1 + s_{12}) v_y)^2}.$$

Setzt man darin inverse Kinematik

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \text{InvKinEllenbogen}(x, y)$$

aus Aufgabe 3.1 ein, so erhält man eine Funktionsvorschrift  $(x, y) \mapsto \|\dot{\theta}\|$ .

Nun wird der Fall betrachtet, dass sich der Endeffektor auf einer konstanten Höhe  $y = 0.025$  von  $x = 1.8$  nach  $x = -1.8$  mit konstanter Endeffektorgeschwindigkeit  $v_x = -1$ ,  $v_y = 0$  bewegen soll, siehe auch [9]. Dies liefert für den Betrag der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

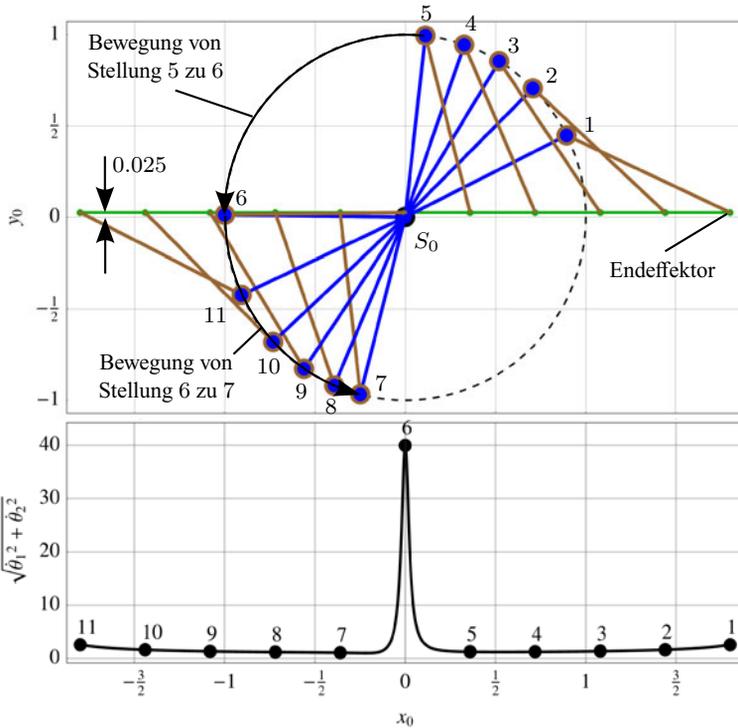
$$\|\dot{\theta}\| = \frac{1}{|c_2|} \sqrt{c_1^2 + 2 c_1 c_{12} + 2 c_{12}^2}.$$

Setzt man darin  $\theta_1$  und  $\theta_2$  aus der inversen Kinematik ein, so folgt der Betrag der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten aus Abb. 4.16 (unten). Im oberen Teilplot sind für 11 Positionen auf der Geraden (kleine grüne Punkte) die zugehörigen Armstellungen des Manipulators eingetragen und entsprechend durchnummeriert. Da die Endeffektorgeschwindigkeit konstant ist, ist die Zeit zwischen zwei dargestellten Armstellungen immer gleich. Man erkennt, dass zwischen Stellung 5 und 6 sowie zwischen Stellung 6 und 7 relativ große Wege zurückgelegt werden, so dass hier entsprechend große Gelenkwinkelgeschwindigkeiten auftreten. In der Nähe der Singularität wird also der Betrag der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten groß, wenn dabei die Endeffektorgeschwindigkeit konstant bleiben soll. Aus dem unteren Teilplot entnimmt man so den maximal auftretenden Wert  $\|\dot{\theta}\| = 40$  bei Stellung 6. ◁

## 4.2.7 Ausblick auf Beschleunigungskinetik

In Kap. 2 wurde *direkte Kinematik*

$$\text{DirKin} : \underbrace{\mathbf{q}}_{\text{(Drehwinkel } \theta_i, \text{ Verschiebelängen } \sigma_i)} \mapsto \underbrace{\boldsymbol{\eta}}_{\text{(Position \& Orientierung Endeffektor)}}$$



**Abb. 4.16** Hohe Gelenkgeschwindigkeiten beim Durchfahren einer nahen Umgebung der Singularität am Beispiel des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators mit Armlängen  $l_1 = l_2 = 1$ , Endeffektorgeschwindigkeit  $v_x = -1$ ,  $v_y = 0$  und konstanter Höhe  $y_0 = 0.025$ . Der Endeffektorpfad ist dunkelgrün gekennzeichnet. *Oben*: 11 Armstellungen entlang des Pfads; Zahlen kennzeichnen Armstellungen; *Unten*: RMS-Wert der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

mit Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$  und Endeffektorlage  $\boldsymbol{\eta}$  hergeleitet. In der Regel wird jedoch die Endeffektorlage vorgegeben, und die dafür notwendigen Gelenkvariablen gesucht. Dies führte in Kap. 3 auf *inverse Kinematik*

$$\text{InvKin} : \boldsymbol{\eta} \mapsto \mathbf{q} .$$

Neben Position  $\mathbf{q}$  und Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}$  der Gelenkvariablen benötigt man zur Berechnung der Gelenkmomente- und Kräfte mittels Dynamik noch Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Diese drei Größen sind über die inversen Kinematiken durch Bahnen<sup>11</sup>  $\boldsymbol{\eta}(t)$  der Endeffektorlage vorgegeben. Man benötigt also die erste und zweite zeitliche Ableitung der Lage  $\boldsymbol{\eta}(t)$ .

<sup>11</sup> Der *Bahn*-Begriff wird in Kap. 6 definiert.

Verwendet man zur Beschreibung der Orientierung eine Rotationsmatrix, so muss deren zeitliche Ableitung berechnet werden. Wie in Abschn. 4.2.4 gezeigt, ergibt sich dabei eine relativ komplizierte Umrechnung in einen Drehgeschwindigkeitsvektor. Aus diesem Grund wird hier, zur Berechnung der zeitlichen Ableitungen der Orientierung, die Euler-Winkel Darstellung vorgezogen. Dies führt bei den inversen Zusammenhängen zur analytischen Jacobi-Matrix  $\tilde{J}_a$ . Damit wurde im vorangegangenen Teil des vorliegenden Kapitels für vollbestimmte Manipulatoren Zusammenhang

$$\dot{\eta} = \tilde{J}_a(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{und falls } \tilde{J}_a(\mathbf{q}) \text{ nichtsingulär: } \dot{\mathbf{q}} = \tilde{J}_a^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\eta}$$

aufgestellt. Der noch fehlende Beschleunigungszusammenhang folgt daraus durch zeitliches Ableiten zu

$$\ddot{\eta} = \frac{d}{dt} (\tilde{J}_a(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = \tilde{J}_a(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} (\tilde{J}_a(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{q}}.$$

Dabei wurde die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit von  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  und  $\ddot{\mathbf{q}}$  zur besseren Übersichtlichkeit weggelassen. Für  $\text{Det}(\tilde{J}_a) \neq 0$  (vollbestimmter Manipulator) ergibt sich so inverse Beschleunigungskinetik

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{J}_a^{-1}(\mathbf{q}) \left( \ddot{\eta} - \frac{d}{dt} (\tilde{J}_a(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{q}} \right).$$

Zusammengefasst können damit Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer gegebene Bahn  $\eta(t)$  des Endeffektors in entsprechende Größen der Gelenkraumbahn umgerechnet werden, das heißt

$$(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) \mapsto (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}).$$

### 4.3 Statik

*Statik* kommt aus dem Griechischen *statikós* und bedeutet übersetzt „zum Stillstehen bringend“, [2, Band 21, S. 29]. Statik ist die demnach die Lehre der Kräfte und Momente, die so an und zwischen Körpern wirken, dass sich diese nicht bewegen.

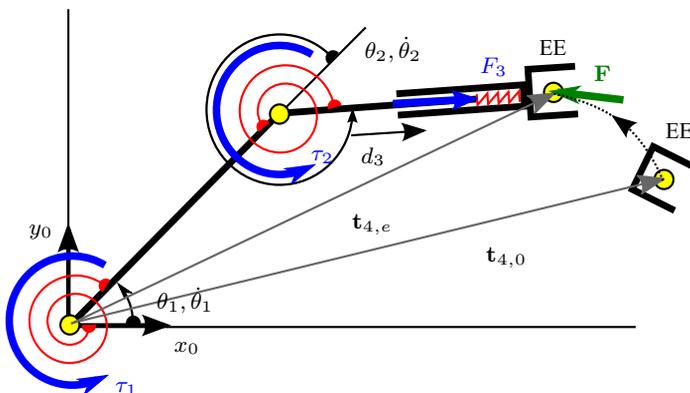
Im vorangegangenen Abschnitt diente die Jacobi-Matrix zur mathematischen Beschreibung der Beziehung zwischen Gelenk- und Endeffektorgeschwindigkeiten. Und obwohl sich in der Statik definitionsgemäß nichts bewegt, wird sich im Verlaufe dieses Abschnitts zeigen, dass die Transponierte derselben Jacobi-Matrix der Schlüssel zur Berechnung von statischen Kräften und Momenten ist. Dabei werden *Gewichtskräfte* und *Haftreibungskräfte* nicht betrachtet.

Zunächst soll die Problemstellung anhand der einfachen Kinematik aus Beispiel 4.13 veranschaulicht werden.

**Beispiel 4.13.** Einfederung eines Manipulators durch externe Krafteinwirkung am Endeffektor: Der 3-DoF Manipulator aus Abb. 4.17 besitze zwei Drehachsen mit Gelenkwinkeln  $(\theta_1, \theta_2)$  und eine Linearachse mit Achsvorschub  $d_3$ . In den Drehachsen sollen sich Drehfedern befinden, in der Linearachse eine gerade bzw. lineare Feder. Alle drei Federn sind rot markiert. Die Bewegungsebene verlaufe senkrecht zum Gravitationsfeld, so dass keine Gewichtskräfte wirken. Außerdem seien keine Haftreibungskräfte vorhanden.

Die Federn sollen zunächst entspannt sein. Der Manipulator befinde sich also in Ruhe und die zugehörige Endeffektorposition sei  $t_{4,0}$  – in der Skizze ist dies die untere, nur durch den Endeffektor angedeutete Position.

Nun wirke eine konstante externe Kraft  $F$  (grüner Pfeil) am Endeffektor (siehe Aufgabe 4.3 und weiter unten für eine Erläuterung der Eigenschaft *extern* im Kontext von Kräften und Momenten). Diese Kraft  $F$  stütze sich also gegen das Inertialsystem ab und drücke den Manipulator aus seiner bisherigen Ruheposition  $t_{4,0}$  heraus. Durch das Eindrücken der Federn entsteht in den Federn eine Rückstellkraft (bei der Linearfeder) bzw. ein Rückstellmoment (bei den Drehfedern). Diese Kräfte wirken entgegen der Dehnung der Federn, das heißt entgegen der Auslenkungsrichtung. Die Gelenke federn so weit ein, bis sich ein Kräfte-Momenten-Gleichgewicht zwischen diesen Feder-Rückstellkräften und -Momenten sowie der externen Kraft einstellt. Der Manipulator nimmt dann eine neue Ruheposition  $t_{4,e}$  ein. Index „0“ kennzeichnet dabei den Zustand ohne Krafteinwirkung, „e“ den Endzustand/Ruhezustand unter Krafteinwirkung. <



**Abb. 4.17** Externe Krafteinwirkung am Endeffektor eines 3-DoF Manipulators (ohne Gewicht- und Haftreibungskräfte)

Die von den Federn initiierten Rückstellmomente bzw. Rückstellkraft werden als Federmomente bzw. Federkraft bezeichnet und mit Index „f“ gekennzeichnet. Da per Definition die Federkraft und Federmomente *gegen* den zurückgelegten Weg wirken (siehe zum Beispiel [5, Abschn. 8.1]), folgt mit positiven Federkonstanten  $k_i$ :

$$\tau_{1f}(\theta_1) = -k_1 \theta_1, \quad \tau_{2f}(\theta_2) = -k_2 \theta_2, \quad F_{3f}(d_3) = -k_3 d_3.$$

wobei  $k_1, k_2$  in Nm/rad und  $k_3$  in N/m.

Im Stillstand kompensieren die Federmomente und Federkraft die anliegende externe Kraft. Sie sind also die Reaktionskräfte bzw. Reaktionsmomente zur externen Kraft. *Extern* bedeutet hier, dass sich die Kraft gegen die Welt und nicht gegen Teile des Manipulators abstützt.

Wegen  $\tau_{1f} = -\tau_1$ ,  $\tau_{2f} = -\tau_2$  und  $F_{3f} = -F_3$  folgt, dass die in Abb. 4.17 eingezeichneten Gelenkmomente  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  sowie die Gelenkkraft  $F_3$  nicht die Rückstellmomente und -kräfte der Federn sind. Vielmehr stellen sie die auf die Federn von der externen Kraft  $\mathbf{F}$  *anteilig* einwirkenden Momente und Kräfte dar.

### 4.3.1 Herleitung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit

Es wird wieder das einführende Beispiel betrachtet: Der Endeffektor durchläuft bei der Einfederung einen Weg von  $\mathbf{t}_{4,0}$  bis  $\mathbf{t}_{4,e}$ . Damit leistet eine externe Energiequelle eine mechanische Arbeit  $W_{\text{extern}}$ . Diese geht über in Spannarbeit  $W_{\text{Federn}}$  der Federn. Da im betrachteten System keine Arbeit verlorengeht (etwa durch Hitze) oder neu hinzukommt, gilt  $W_{\text{Federn}} = W_{\text{extern}}$ . Mit Gelenkpositionen  $\theta_{1,0}$ ,  $\theta_{2,0}$  und  $d_{3,0}$  vor der Einfederung und  $\theta_{1,e}$ ,  $\theta_{2,e}$  und  $d_{3,e}$  nach der Einfederung berechnet sich definitionsgemäß<sup>12</sup> die Feder-Arbeit zu

$$\begin{aligned} W_{\text{Federn}} &= - \int_{\theta_{1,0}}^{\theta_{1,e}} \tau_{1f}(\theta_1) d\theta_1 - \int_{\theta_{2,0}}^{\theta_{2,e}} \tau_{2f}(\theta_2) d\theta_2 - \int_{d_{3,0}}^{d_{3,e}} F_{3f}(d_3) dd_3 \\ &= \int_{\theta_{1,0}}^{\theta_{1,e}} \tau_1(\theta_1) d\theta_1 + \int_{\theta_{2,0}}^{\theta_{2,e}} \tau_2(\theta_2) d\theta_2 + \int_{d_{3,0}}^{d_{3,e}} F_3(d_3) dd_3 \\ &\stackrel{!}{=} W_{\text{extern}} = \int_{\mathbf{t}_{4,0}}^{\mathbf{t}_{4,e}} \mathbf{F}^T d\mathbf{x}^0. \end{aligned}$$

**Anmerkung 4.3.** Arbeit aufgrund von Gewicht- und Haftreibungskräften werden an dieser Stelle nicht betrachtet. Ein Modell, das diese beiden Effekte berücksichtigt, wird

<sup>12</sup> „Mechanische Arbeit ist Kraft längs des Weges“ bzw. für Drehbewegungen „mechanische Arbeit ist Drehmoment längs des Winkels“.

mit Hilfe des Lagrange-Formalismus in Abschn. 5 hergeleitet und kann aus der Bewegungsgleichung (5.44) entnommen werden.  $\square$

Mit obigen Arbeitsintegralen ist im Prinzip der gesuchte Zusammenhang zwischen der externen Kraft und den im Gelenkraum auftretenden Kräften und Momenten bereits hergestellt. Darin enthalten sind jedoch noch die Verstellwege der Gelenke und des Endeffektors.

**Konzept der virtuellen Verrückung:** Man gelangt durch die Betrachtung *infinitesimal kleiner Bewegungen* (gekennzeichnet durch voranstehendes Symbol  $d$ ) oft zu einer handlicheren Form. In der Mechanik und Physik bezeichnet man dies als *virtuelle Verrückung* bzw. *virtuelle Verschiebung* (gekennzeichnet durch voranstehendes Symbol  $\delta$ ), wenn die infinitesimale Bewegung mögliche Zwangsbindungen<sup>13</sup> einhält. Zudem werden, im Gegensatz zur infinitesimalen Bewegung, bei einer virtuellen Verrückung keine Zeitänderungen  $dt$  berücksichtigt, siehe zum Beispiel [4, Abschn. I-4]. Kräfte und Momente sind damit bei einer virtuellen Verrückung konstant.

Im vorliegenden Abschnitt ist eine Unterscheidung in infinitesimale Bewegung und virtuelle Verrückung nicht notwendig. Dies liegt zum einen daran, dass der Zusammenhang zwischen Gelenkvariablen und Endeffektorlage nie explizit von der Zeit abhängt. Zum andern werden die Bewegungen des Manipulators mit Hilfe seiner Gelenkvariablen beschrieben, die definitionsgemäß bereits alle Zwangsbindungen einhalten<sup>14</sup>. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird daher bei einer virtuellen Verschiebung das aus der Mathematik bekannte Symbol  $d$  weiterverwendet.

In obigem Beispiel sind die virtuellen Verrückungen durch  $d\theta_1$ ,  $d\theta_2$ ,  $dd_3$  und  $d\mathbf{x}$  gegeben. Dabei wird mit  $d\mathbf{x}$  zunächst nur die virtuelle Verrückung der kartesischen Position betrachtet. Während dieser virtuellen Verrückung bleiben Federkraft und -momente *konstant*. Damit reduzieren sich die Arbeitsintegrale zu

$$\begin{aligned} dW_{\text{Federn}} &= \tau_1 \cdot d\theta_1 + \tau_2 \cdot d\theta_2 + F_3 \cdot dd_3 = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dd_3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} dW_{\text{extern}} = \mathbf{F}^T d\mathbf{x} . \end{aligned}$$

Mit *verallgemeinertem Gelenkmomentenvektor* (kurz: *verallgemeinerter Momentenvektor* bzw. *verallgemeinertes Moment*, siehe auch Abschn. 5.4.1)  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \quad \tau_2 \quad F_3)^T$  und

<sup>13</sup> Siehe Abschn. 5.1.1 für eine ausführliche Definition von Zwangsbindungen.

<sup>14</sup> Siehe auch das Konzept der generalisierten Variablen aus Abschn. 5.1.1.

$\mathbf{q} = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad d_3)^T$  ergibt sich in vektorieller Form

$$\boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q} \stackrel{!}{=} \mathbf{F}^T d\mathbf{x} .$$

Für eine kartesische virtuelle Verrückung  $d\mathbf{x}$  gilt nach (4.11) mit Umbenennung  $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \mathbf{x}$  Zusammenhang

$$d\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{J}} d\mathbf{q} ,$$

so dass

$$\boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q} \stackrel{!}{=} \mathbf{F}^T \underbrace{\tilde{\mathbf{J}} d\mathbf{q}}_{d\mathbf{x}} . \quad (4.25)$$

Dieser Zusammenhang gilt genau dann für *jede beliebige* virtuelle Verrückung  $d\mathbf{q}$ , wenn

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{F} . \quad (4.26)$$

Die Notwendigkeit von (4.25) für (4.26) ist trivial: Wenn  $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ , dann folgt daraus immer  $\mathbf{a}^T \mathbf{q} = \mathbf{c}^T \mathbf{q}$ . Auch Rückschluss ((4.25) hinreichend für (4.26)) ist leicht gezeigt: Die Skalarprodukte beider Seiten von  $\mathbf{a}^T \mathbf{q} = \mathbf{c}^T \mathbf{q}$  ergeben ausgeschrieben

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots .$$

Dann muss  $a_1 = c_1$  gelten für zum Beispiel  $q_1 \neq 0$  und  $q_2 = q_3 = \dots = 0$ . Also muss  $a_1 = c_1$  gelten, wenn beide Skalarprodukte für alle möglichen  $\mathbf{q}$  gelten soll. Mit demselben Argument zeigt man auch Gleichheit  $a_2 = c_2, a_3 = c_3$  etc. Siehe auch Hilfssatz 5.1.

Man bezeichnet dieses Vorgehen in der Herleitung als *Prinzip der virtuellen Arbeit*. In Abschn. 5.4.3 wird gezeigt, dass die so erhaltene Beziehung auch im allgemeinen Fall gilt, bei dem im Vektor  $\mathbf{F}$  externe Kräfte  $F_i$  und externe Momente  $\tau_i$  enthalten sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird daher an dieser Stelle der *verallgemeinerte Kraftvektor* (kurz: *verallgemeinerte Kraft*)  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^6$  eingeführt, gemäß

$$\mathbf{F} = \left( F_x \quad F_y \quad F_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z \right)^T .$$

Die Darstellung dieser externen Momente und Kräfte erfolgt dabei in Weltkoordinaten. Wegen  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^M$  gilt  $\tilde{\mathbf{J}}^T \in \mathbb{R}^{N \times M}$ . Die drei Drehmoment-Komponenten in  $\mathbf{F}$  bilden zusammen Drehmomentvektor  $(\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z)^T$ , der die Richtung der Drehachse definiert. Um diese Achse wirkt ein Drehmoment mit Betrag  $\|(\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z)^T\|$  und Drehrichtung gemäß Schraubenregel.

**Anmerkung 4.4.** In Abschn. 5.4.3 wird gezeigt, dass (4.26) auch im bewegten (also nichtstatischen) Fall herangezogen werden kann: Die am Endeffektor angreifenden externen Kräfte und Momente  $\mathbf{F}$  führen in den Gelenk-Antriebsachsen zu Kräften und Momenten  $\tau$  gemäß (4.26). Diese überlagern die von den Gelenkantrieben eingprägten Antriebskräfte und -momente.  $\square$

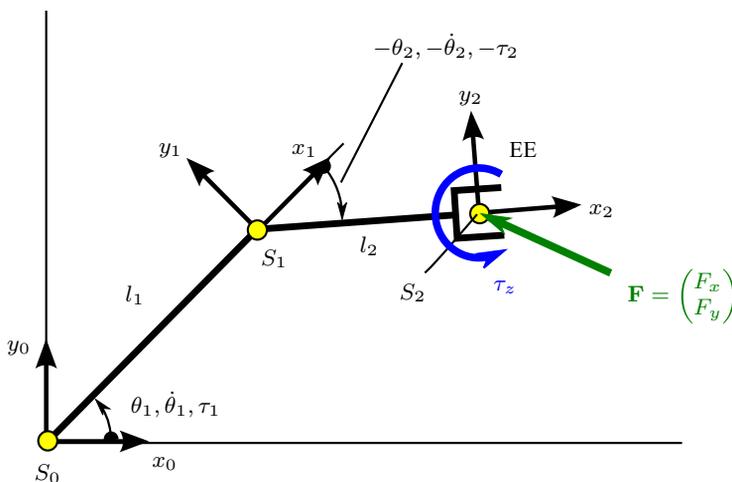
**Beispiel 4.14.** Statik am planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator: Am Endeffektor des Manipulators aus Abb. 4.18 wirke Kraft  $\mathbf{F}$  sowie Drehmoment  $\tau_z$ . Gesucht sind die Gelenkmomente, die die externe Kraft und das externe Moment so kompensieren, dass der Manipulator im Stillstand verbleibt.

Aus Beispiel 4.5 ist der Zusammenhang zwischen Gelenkvariablen- und translativer Endeffektorgeschwindigkeit bereits bekannt. So gilt

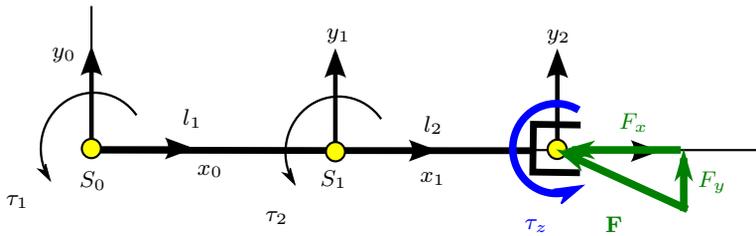
$$\mathbf{v}_2^0 = \begin{pmatrix} v_{2,x}^0 \\ v_{2,y}^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ c_1 l_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}_v} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ergibt sich als Drehgeschwindigkeit  $\omega_{2_z}^0$  um die  $z_0$ -Achse aus Abb. 4.18

$$\omega_{2_z}^0 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2.$$



**Abb. 4.18** Statik am planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Beispiel 4.14



**Abb. 4.19** Statik im ausgestreckten Fall aus Beispiel 4.14

Zusammengefasst folgt Geschwindigkeitskinematik

$$\begin{pmatrix} v_2^0 \\ \omega_{z2}^0 \end{pmatrix} = \tilde{J}(\theta_1, \theta_2) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{J}_v(\theta_1, \theta_2) \\ (1 \quad 1) \end{bmatrix}}_{\tilde{J}(\theta_1, \theta_2)} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Jacobi-Matrix in (4.26) ein, so erhält man die gesuchten Gelenkmomente, die den Manipulator unter der externen Belastung im Stillstand halten bzw. zur Statik führen:

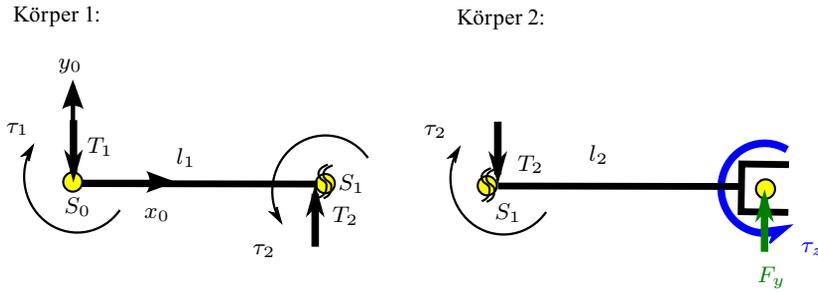
$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & c_1 l_1 + l_2 c_{12} & 1 \\ -l_2 s_{12} & l_2 c_{12} & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{J}^T(\theta_1, \theta_2)} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

Nun werde der in Abb. 4.19 dargestellte Sonderfall „ausgestreckter Arm“ betrachtet. Mit  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  folgt aus obiger Gleichung

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_{12} & 1 \\ 0 & l_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \tau_z \end{pmatrix}.$$

Als Plausibilitätscheck wird das vorliegende Statik-Problem für den Sonderfall „ausgestreckter Arm“ durch Freischneiden und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an den Schnittstellen gelöst, siehe zum Beispiel [5]. Die Freischnittsskizze ist in Abb. 4.20 abgebildet. Darin sind an der Schnittstelle Schnittkräfte  $T_1$  und  $T_2$  (Lagerreaktionskräfte) als Hilfsgrößen für weitere Berechnungen eingezeichnet.

Die Wahl der Richtung der Drehmomente  $\tau_i$  in der Freischnittsskizze ist nicht ganz trivial und erfordert eine genauere Betrachtung: Die in Abb. 4.19 eingetragenen Drehmomente  $\tau_i$  stellen gemäß der hier getroffenen Konvention die Drehmomente dar, die anteilig von der externen Belastung entstehen. Damit Körper 2 in Ruhe bleibt, muss dieses Dreh-



**Abb. 4.20** Freischnittskizze

moment durch die gedachte Feder im Gelenk mit einem gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Rückholmoment kompensiert werden. Aus diesem Grund muss  $\tau_2$  am Schnittpunkt  $S_1$  im Körper 2, wie in Abb. 4.20 dargestellt, gerichtet sein. Folglich tritt bei  $S_1$  im Körper 1 das entgegen gerichtete Moment auf, welches damit dem Moment aus Abb. 4.19 entspricht. Gleiches gilt für  $\tau_1$  bei  $S_0$ ; hier wurde auf die Reaktionsseite verzichtet, da diese das Inertialsystem darstellt. Damit ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen für beide Körper zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 \text{Körper 1:} \quad & \sum_i F_{y0,i} = 0 : \quad T_2 - T_1 = 0 \\
 & \sum_i \tau_{z0,i}^{(S_1)} = 0 : \quad \tau_2 - \tau_1 + l_1 T_1 = 0 \\
 \text{Körper 2:} \quad & \sum_i F_{y0,i} = 0 : \quad F_y - T_2 = 0 \\
 & \sum_i \tau_{z0,i}^{(S_1)} = 0 : \quad -\tau_2 + l_2 F_y + \tau_z = 0 \quad \implies \tau_2 = l_2 F_y + \tau_z
 \end{aligned}$$

Aus Körper 2 folgt  $T_2 = F_y$ , aus Körper 1 folgt  $T_1 = T_2$  sowie

$$\tau_1 = \tau_2 + l_1 T_1 = \tau_2 + l_1 F_y = l_2 F_y + \tau_z + l_1 F_y = \tau_z + l_{12} F_y .$$

Ein Vergleich mit obiger Herleitung bestätigt die Richtigkeit, so dass der Plausibilitätscheck bestanden ist. Außerdem erkennt man, dass die Herleitung der Statik über den klassischen Weg deutlich aufwendiger ist als über die transponierte Jacobi-Matrix.

Dies wird insbesondere im geeigneten Fall deutlich, bei dem jede Kraft in eine x- und y-Komponente zerlegt werden muss. Es entstehen dadurch Hilfsgrößen in Form von Schnittkräften und -momenten, die im Endergebnis nicht benötigt werden. Bei der Berechnung mit der transponierten Jacobi-Matrix spart man sich diese unnötigen Berechnungen.  $\triangleleft$

### 4.3.2 Inverse Statik

Mit (4.26) können die Gelenkmomente und -kräfte  $\boldsymbol{\tau}$  berechnet werden, die sich im statischen Fall durch eine externe mechanische Belastung  $\boldsymbol{F}$  am Endeffektor einstellen. Dabei werden, wie im vorangegangenen Abschnitt, keine Gravitations- und Haftreibungskräfte berücksichtigt. Die inverse Aufgabenstellung bezeichnet man als *inverses statisches Problem*:

gegeben: Gelenkmomente und -kräfte  $\boldsymbol{\tau}$  sowie  
 Gelenkpositionen  $\boldsymbol{q}$  (im Stillstand, ohne Gravitationseinfluss)  
 gesucht: Endeffektorkräfte und -momente  $\boldsymbol{F}$ .

In der Praxis wird diese Aufgabenstellung zum Beispiel für Sicherheitsanalysen bei **Mensch-Roboter-Kollaboration** (kurz: MRK) benötigt: Dabei müssen die maximalen Kräfte und Momente, die ein Manipulator am Endeffektor auf die Umgebung ausüben kann, begrenzt werden.

**Vollbestimmter Manipulator:** Wegen  $\text{Det}(\tilde{\boldsymbol{J}}^T) = \text{Det}(\tilde{\boldsymbol{J}}) \neq 0$  existiert die Inverse von  $\tilde{\boldsymbol{J}}^T$ . Damit kann das inverse statische Problem durch

$$\boldsymbol{F} = (\tilde{\boldsymbol{J}}^T(\boldsymbol{q}))^{-1} \boldsymbol{\tau} \quad (4.27)$$

eindeutig gelöst werden.

In der Nähe einer Singularität strebt  $\text{Det}(\tilde{\boldsymbol{J}}^T)$  gegen Null. Falls  $\boldsymbol{\tau}$  dann eine bestimmte Verträglichkeitsbedingung (siehe (4.31) im folgenden Absatz **Unterbestimmter Manipulator**) nicht erfüllt, strebt  $\|\boldsymbol{F}\|$  nach (4.27) gegen Unendlich.

**Überbestimmter Manipulator bzw. redundante Kinematik:** In diesem Fall stellt  $\tilde{\boldsymbol{J}}^T$  wegen  $N > M$  eine stehende  $N \times M$ -Matrix mit  $\text{Rg}(\tilde{\boldsymbol{J}}^T) = M$  dar. Das zugehörige lineare Gleichungssystem (4.26) ist damit mathematisch überbestimmt. Für das inverse statische Problem existiert keine Lösung, wenn die aus der linearen Algebra bekannte *Verträglichkeitsbedingung*

$$\text{Rg}(\tilde{\boldsymbol{J}}^T) = M = \text{Rg}(\tilde{\boldsymbol{J}}^T | \boldsymbol{\tau}) \quad (4.28)$$

nicht erfüllt ist. Daraus ergeben sich  $N - M$  lineare Nebenbedingungen an  $\boldsymbol{\tau}$ .

Nur im Sonderfall, dass Gelenkmomente und -kräftevektor  $\boldsymbol{\tau}$  Bedingung (4.28) erfüllen, also entsprechend der linearen Abhängigkeit der Zeilen von  $\tilde{\boldsymbol{J}}^T$  gewählt sind, existiert eine Lösung. In diesem Fall lässt sich das überbestimmte lineare Gleichungssystem in ein äquivalentes vollbestimmtes lineares Gleichungssystem wandeln, für das dann eine eindeutige Lösung existiert. Dies korrespondiert mit der Tatsache, dass der Manipulator

nicht für beliebige Momente oder Kräfte der Gelenke im Stillstand (Statik) verbleibt. Vielmehr müssen Gleichgewichtsbedingungen der Statik eingehalten werden.

Die Erstellung eines äquivalenten vollbestimmten linearen Gleichungssystems ist zur Laufzeit mit relativ viel Aufwand verbunden. Man gelangt zu einer einfacheren Lösung mit Hilfe einer Pseudo-Inversen. Pseudo-Rechts-Inverse (4.14) kann jedoch nur für ein mathematisch unter- oder vollbestimmtes lineares Gleichungssystem verwendet werden. Im vorliegenden Fall eines überbestimmten linearen Gleichungssystems ergibt sich eine andere Pseudo-Inverse:

Definitionsgemäß gilt für einen überbestimmten Manipulator  $\text{Rg}(\tilde{J}^T) = m = M$ , die Spalten von  $\tilde{J}^T$  sind also linear unabhängig. Daraus folgt, dass  $\tilde{J}\tilde{J}^T \in \mathbb{R}^{M \times M}$  invertierbar ist. Damit lässt sich eine Pseudo-Inverse von  $\tilde{J}^T$  zu

$$\tilde{J}^{T+} = (\tilde{J}\tilde{J}^T)^{-1}\tilde{J} \in \mathbb{R}^{M \times N} \quad (4.29)$$

bestimmen: So ergibt eine Linksmultiplikation von  $\tilde{J}^{T+}$  auf  $\tilde{J}^T$  Ausdruck

$$\tilde{J}^{T+}\tilde{J}^T = (\tilde{J}\tilde{J}^T)^{-1}\tilde{J}\tilde{J}^T = \tilde{E}.$$

Daher bezeichnet man diese Art der Pseudo-Inversen als *Pseudo-Links-Inverse* und es folgt Lösung

$$\mathbf{F} = \tilde{J}^{T+}\boldsymbol{\tau} \quad (4.30)$$

unter Nebenbedingung (4.28).

**Anmerkung 4.5.** für den Fall, dass Verträglichkeitsbedingung (4.28) nicht gegeben ist:

- Der Manipulator befindet sich dann nicht mehr im Zustand der Statik. Damit ist der Zusammenhang zwischen  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\mathbf{F}$  nicht durch (4.26) gegeben. Vielmehr muss in diesem Fall *Dynamik* herangezogen werden, siehe Kap. 5.
- Man kann leicht zeigen, dass in diesem Fall  $\mathbf{F}^* = \tilde{J}^{T+}\boldsymbol{\tau}$  die Lösung zum berühmten Minimierungsproblem der kleinsten Quadratsumme darstellt, das heißt

$$\left\| \tilde{J}^T \mathbf{F}^* - \boldsymbol{\tau} \right\| = \min!$$

Dies ist als *Methode der kleinsten Quadrate* (MKQ) bekannt und wurde bereits 1809 in der Dissertationsschrift von Carl Friedrich Gauß<sup>15</sup> veröffentlicht, siehe zum Beispiel [1]. □

---

<sup>15</sup> Carl Friedrich Gauß: 1777–1855; gilt seit je her als einer der größten Mathematiker, Physiker und Astronom. Dissertation 1809: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen).

**Beispiel 4.15.** Inverses statisches Problem beim planaren 4-DoF Manipulator aus Beispiel 4.8: Für Position  $\theta = (0 \quad \pi \quad \pi/2 \quad \pi/2)^T$  (linker Teil von Abb. 4.14) ergibt sich die transponierte Jacobi-Matrix aus (4.22) zu

$$\tilde{J}^T \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=\pi, \theta_3=\pi/2, \theta_4=\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

Daraus lässt sich lineare Abhängigkeit

$$\text{Zeile 1} = \text{Zeile 3}$$

ablesen. Verträglichkeitsbedingung (4.28) ist damit für  $\tau_1 = \tau_3$  erfüllt. Ein mögliches äquivalentes Gleichungssystem folgt durch Streichung der dritten Zeile zu

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

$\tau_3 = \tau_1$  (Nebenbedingung für Statik).

Inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

liefert damit für  $\tau_3 = \tau_1$  Lösung

$$\begin{aligned} F_x &= \tau_1 - \tau_4 \\ F_y &= \tau_1 - \tau_2 \\ \tau_z &= -\tau_1 + \tau_2 + \tau_4. \end{aligned}$$

Für  $\tau_3 \neq \tau_1$  existiert hingegen keine Lösung.

Dasselbe Ergebnis erhält man auch mit Hilfe der Pseudo-Links-Inversen aus (4.30). Die Pseudo-Links-Inverse berechnet sich dabei gemäß

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}^{T+} &= (\tilde{J}\tilde{J}^T)^{-1}\tilde{J} \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Aus (4.30) folgt schließlich

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_1 + \tau_3 - 2\tau_4 \\ \tau_1 - 2\tau_2 + \tau_3 \\ -\tau_1 + 2\tau_2 - \tau_3 + 2\tau_4 \end{pmatrix}.$$

Setzt man die für Statik notwendige Nebenbedingung  $\tau_3 = \tau_1$  ein, so ergibt sich die gleiche Lösung wie in obigem äquivalenten Gleichungssystem.  $\triangleleft$

**Anmerkung 4.6.** Verträglichkeitsbedingung (4.28) lässt sich auch durch eine Betrachtung des Nullraums der Jacobi-Matrix  $\tilde{J}$ , gemäß (4.17), darstellen. Im vorangegangenen Beispiel 4.15 führte dies auf

$$\dot{q}_{\text{Null}} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Damit lässt sich Verträglichkeitsbedingung (4.28) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\tau} = 0 \implies \tau_1 - \tau_3 = 0$$

darstellen. Dies bedeutet, dass zulässige  $\boldsymbol{\tau}$  senkrecht auf dem Nullraum der Jacobi-Matrix stehen müssen.  $\square$

**Unterbestimmter Manipulator:** Es wird nur der praktisch relevante Fall b) aus Abschn. 4.2.5.3 betrachtet. In diesem Fall stellt  $\tilde{J}^T \in \mathbb{R}^{N \times M}$  mit  $N \geq M$  definitionsgemäß eine stehende oder quadratische Matrix mit  $\text{Rg}(\tilde{J}^T) = \text{Rg}(\tilde{J}) = m < M$  dar. Analog zum vorangegangenen Fall des überbestimmten Manipulators, muss hier Verträglichkeitsbedingung

$$\text{Rg}(\tilde{J}^T) = m = \text{Rg}(\tilde{J}^T | \boldsymbol{\tau}) \quad (4.31)$$

erfüllt sein. Die Zahl der sich daraus ergebenden linearen Nebenbedingungen an  $\boldsymbol{\tau}$ , ist mit  $N - m$  größer, als im Fall eines überbestimmten Manipulators. Ein weiterer Unterschied zum überbestimmten Fall liegt darin, dass nun  $\text{Rg}(\tilde{J}^T) = m < M$ . Damit ergibt sich, bei Einhaltung der Verträglichkeitsbedingung, keine eindeutige Lösung für  $\boldsymbol{F}$  mehr, sondern eine  $M - m$ -dimensionale Lösungsvielfalt. Darin kann die Min-Norm-Lösung  $\boldsymbol{F}^*$  mittels Pseudo-Rechts-Inverser berechnet werden, wie im folgenden Beispiel 4.16 demonstriert wird.

**Beispiel 4.16.** Fortsetzung von Beispiel 4.15: Verwendet man Gelenkwinkel  $\theta_3 = 0$  anstelle von  $\pi/2$  (rechter Teil von Abb. 4.14), so folgt aus (4.23) transponierte Jacobi-Matrix

$$\tilde{J}^T|_{\theta_1=0, \theta_2=\pi, \theta_3=0, \theta_4=\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

Dafür liest man, hinsichtlich der Zeilen, die beiden linearen Abhängigkeiten

$$\text{Zeile 1} = \text{Zeile 3}$$

$$\text{Zeile 2} = \text{Zeile 1} + \text{Zeile 3} - \text{Zeile 4}$$

ab, so dass  $\text{Rg}(\tilde{J}^T) = m = 2$ . Daraus ergeben sich  $N - m = 4 - 2 = 2$  Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_3 \\ \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 &= 0. \end{aligned}$$

Substituiert man aus Zeile 1  $\tau_3 = \tau_1$  in Zeile 2, so folgt  $2\tau_1 - \tau_2 - \tau_4 = 0$ .

Alternativ können die Verträglichkeitsbedingungen auch über den Nullraum von  $\tilde{J}$  ermittelt werden. Dieser berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{\text{Null}} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Verträglichkeitsbedingung (4.31) ergibt sich damit zu

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\text{Det}(\tilde{J}\tilde{J}^T) = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{array} \right| = 0$$

existiert keine Pseudo-Links-Inverse. Mit oben festgestellten linearen Abhängigkeiten, ergibt sich ein äquivalentes Gleichungssystem zu

$$\begin{pmatrix} \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{J}_{\text{red}}^T} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \tau_3$$

$$\tau_2 = 2\tau_3 - \tau_4.$$

Für die darin definierte, reduzierte transponierte Jacobi-Matrix gilt  $\text{Rg}(\tilde{J}_{\text{red}}^T) = 2$ . Für die drei Unbekannten  $F_x$ ,  $F_y$  und  $\tau_z$  tritt damit eine eindimensionale Lösungsvielfalt auf. Hierfür lässt sich mittels Pseudo-Rechts-Inverser

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\text{red}}^{T+} &= \tilde{J}_{\text{red}} (\tilde{J}_{\text{red}}^T \tilde{J}_{\text{red}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eine Min-Norm-Lösung finden, gemäß

$$\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} F_x^* \\ F_y^* \\ \tau_z^* \end{pmatrix} = \tilde{J}_{\text{red}}^{T+} \begin{pmatrix} \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_4 \\ \frac{-\tau_3 + \tau_4}{2} \\ \frac{\tau_3 - \tau_4}{2} \end{pmatrix}$$

unter Nebenbedingung  $\tau_1 = \tau_3$

$$\tau_2 = 2\tau_3 - \tau_4.$$

<

## Aufgaben

*Musterlösungen* finden sich unter [www.springer.com](http://www.springer.com) auf der Seite des vorliegenden Werks.

### 4.1 Endeffektorgeschwindigkeiten für Basiskinematik 3

Bearbeiten Sie für Basiskinematik 3 aus Abschn. 3.4 folgende Aufgaben:

- Bestimmen Sie Endeffektorgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_3^0$  und  $\boldsymbol{\omega}_3^0$  in Abhängigkeit der Gelenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  und Gelenkwinkel  $\boldsymbol{\theta}$ .
- Unter welcher Bedingung liegt im Endeffektor eine vollständige Kugel-Kinematik vor?

Betrachten Sie zunächst als Endeffektorfreiheitsgrade die Lineargeschwindigkeit  $\mathbf{v}_3^0$ .

- Charakterisieren Sie die Manipulator-Bestimmtheit für  $\theta_2 \neq \{0, \pi\}$ .
- Ist es für  $\theta_2 \neq \{0, \pi\}$  möglich, jede geforderte Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_3^0$  zu realisieren? Begründung!  
Welche Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_3^0$  können realisiert werden? Geben Sie dafür ein Beispiel an.
- Charakterisieren Sie die Manipulator-Bestimmtheit für  $\theta_2 \in \{0, \pi\}$ .

Betrachten Sie nun als Endeffektorfreiheitsgrade Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_3^0$ .

- Wie lautet die Determinante der zugehörigen Drehgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_\omega$ ?  
Unter welcher Bedingung liegt bei  $\dot{\boldsymbol{\theta}} \mapsto \boldsymbol{\omega}_3^0$  eine Singularität vor?  
Bestimmen Sie diese Abbildung auf der Singularität.  
Charakterisieren Sie die Manipulator-Bestimmtheit jeweils außerhalb und auf der Singularität.
- Bestimmen Sie die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  in Abhängigkeit der Endeffektordrehgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_3^0$  außerhalb der Singularität.

### 4.2 Euler-Jacobi-Matrix bei einer ZYX Euler-Drehung

Leiten Sie mit dem Konzept der infinitesimalen Drehung die Euler-Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{\text{Euler}321}$  einer ZYX Euler-Drehung her.

### 4.3 Statik von Basis-Kinematik 3

Basiskinematik 3 aus Abschn. 3.4 sei am Endeffektor mit einer externen Kraft  $F_{\text{extern}}$  und einem externen Moment  $\tau_{\text{extern}}$  beaufschlagt.

- Wann bezeichnet man eine Kraft bzw. ein Moment als *extern*? Geben Sie ein allgemeines Beispiel für eine nichtexterne Kraft an.
- Welche Gelenkmomente sind in Abhängigkeit der Gelenkwinkel erforderlich, um die externe Belastung so zu kompensieren, dass der Manipulator in Ruhe bleibt?

### 4.4 Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit Rotationsgelenken

Bearbeiten Sie für den planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit zwei parallelen Drehachsen aus Abb. 4.12 die folgenden Aufgaben:

- Stellen Sie Geschwindigkeitszusammenhang

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \\ \omega_{2z}^0 \end{pmatrix}$$

- auf und geben Sie die dafür notwendige Jacobi-Matrix an.
- Charakterisieren Sie die Manipulator-Bestimmtheit.
- Leiten Sie die auf der Singularität  $\theta_2 = 0$  möglichen Richtungen von  $v_2^0$  her. Interpretieren Sie geometrisch.
- Wiederholen Sie voranstehende Teilaufgabe für die zweite Singularität.
- Der Endeffektor bewege sich nur in  $x_0$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v_{2x}^0 = 1$  (das heißt  $v_{2y}^0 = 0$ ). Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $\theta$  die dabei auftretenden betragsmäßig maximalen Gelenkwinkelgeschwindigkeiten.

Hinweis: Die Inverse einer allgemeinen  $(2 \times 2)$ -Matrix  $\tilde{A}$  ist gegeben durch

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\tilde{A})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer von extern am Endeffektor angreifenden Kraft und den Gelenkmomenten im statischen Fall?
- Erstellen Sie für  $s_2 \neq 0$  inverse Abbildung

Gelenkmomente  $\mapsto$  externe Kraft

- Berechnen Sie den Betrag des externen Kraftvektors in Abhängigkeit der Gelenkmomente. Was fällt bei diesem Betrag in einer nahen Umgebung der Singularität auf?

## Literatur

1. Börsch, A., Simon, P.: Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauss. P. Stankiewicz, Buchdruckerei, Berlin (1887). <http://www.archive.org/stream/abhandlungenmet00gausrich#page/n5/mode/2up>
2. F. A. Brockhaus GmbH: Brockhaus – Die Enzyklopädie, 20. Aufl. F. A. Brockhaus GmbH, Leipzig, Mannheim (1998)
3. Craig, J.J.: Introduction to Robotics – Mechanics and Control, 3. Aufl. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River (2005)
4. Goldstein, H.: Klassische Mechanik, 4. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1976)
5. Hauger, W., Schnell, W., Gross, D.: Technische Mechanik, 7. Aufl. Bd. 1. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2003)
6. James, M.: The Generalised Inverse. *Math. Gazette* **62**(420), 109–114 (1978). <https://www.jstor.org/stable/3617665>
7. Nakamura, Y.: Advanced Robotics: Redundancy and Optimization, 1. Aufl. Addison-Wesley Publishing Company, New York, Amsterdam, Bonn (1991)
8. Press, W.H., Flannery, B.P., Vetterling, W.T., Teukolsky, S.A.: Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing, 2. Aufl. Press Syndicate of the University of Cambridge, New York, Melbourne (1992)
9. Rottenwöhler, A.: Minimalrestriktive Bahn-Umplanung für Master-Slave Manipulatorsysteme zur Passage singulärer Regionen. Bachelor-Arbeit, Robotik-Labor der Fakultät Elektrotechnik und Wirtschaftsingenieurwesen, Hochschule für angewandte Wissenschaften Landshut (2018)
10. Siciliano, B.: Kinematic Control of Redundant Robot Manipulators: A Tutorial. *J Intell Robot Syst* **3**, 201–212 (1989)
11. Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasager, M.: Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken (2006)
12. Yoshikawa, T.: Analysis and Control of Robot Manipulators with Redundancy. In: Brady, M., Paul, R. (Hrsg.) *Robotics Research: The First International Symposium*, S. 735–747. MIT Press, Cambridge (1981)

**Zusammenfassung** Manipulatoren bestehen aus mehreren mechanischen Körpern in Form von Manipulatorsegmenten. Gelenke verbinden diese Körper; man spricht von einem Mehrkörpersystem. Unter dem Einfluss externer Kräfte und Momente ergeben sich in Abhängigkeit der mechanischen Trägheiten bzw. Massen Bewegungen der Manipulatorsegmente. Die Lehre dieser Bewegung bezeichnet man als Dynamik.

Die minimale Zahl an Koordinaten, die zur Beschreibung der Bewegung benötigt wird, bezeichnet man als Freiheitsgrade; die Koordinaten selbst als Minimalkoordinaten. Jedes Manipulatorsegment besitzt im Raum insgesamt sechs Freiheitsgrade. Dabei entfallen drei auf die Beschreibung der Lineargeschwindigkeit und drei auf die Rotationsgeschwindigkeit. Gelenkverbinder zwischen den Manipulatorsegmenten grenzen die Bewegungsfreiheit in Form von Zwangsbindungen ein: In deren Richtung sind keine Bewegungen möglich, so dass von diesen auch keine mechanische Arbeit verrichtet werden kann. Nach diesem Prinzip lässt sich der sogenannte Lagrange-Formalismus herleiten, der für die Manipulatorsegmente ein verkoppeltes Bewegungs-Differenzialgleichungssystem in Minimalkoordinaten liefert, den sogenannten Bewegungsgleichungen. Dabei werden nur starre Manipulatorsegmente sowie Zwangsbindungen bezüglich der Position betrachtet.

Die Bewegungsgleichungen lassen sich stets in eine vektorielle Standardform überführen. Sie beinhaltet eine Massenmatrix zur Beschreibung der inertialen Kräfte und Momente. Kreiselkräfte führen ebenfalls zu einer entsprechenden Matrix; Reibungs- und Gravitationseinflüsse sowie antreibende Kräfte und Momente in den Gelenken führen jeweils zu einem Vektor.

Der Lagrange-Formalismus benötigt lediglich die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie aller Manipulatorsegmente. Durch Ableiten erhält man daraus die Bewegungsgleichungen. Hierfür lässt sich eine rezeptartige Vorgehensanweisung formulieren, durch die die Zahl möglicher Fehlerquellen beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen stark reduziert wird. Umfang und Komplexität der Bewegungsgleichungen sind bereits bei einfachen Kinematiken mit wenigen Gelenken so groß, dass eine Berechnung durch rechnergestützte Formelmanipulationsprogramme sinnvoll ist.

Zur Beschreibung des rotativen Anteils der kinetischen Energie eines Körpers um eine Drehachse im Raum wird auf das Konzept von Trägheitstensoren zurückgegriffen. Sie lassen sich aus Matrizen von Massenträgheits- und Deviationsmomenten darstellen, die wiederum ein Maß für die Massenverteilung in Bezug zur Drehachse sind. Damit sind die Matrizendarstellungen der Trägheitstensoren vom jeweils gewählten Bezugskordinatensystem abhängig. Zur Umrechnung auf das Weltkoordinatensystem wird bei Geschwindigkeitsvektoren zusätzlich zum darstellenden Koordinatensystem noch ein Messkoordinatensystem eingeführt.

Bewegungsgleichungen werden quasi als Herzstück von Simulationsmodellen des Manipulators unter anderem bei der Entwicklung von Reglern und zur Antriebsstrang-Auslegung benötigt. Damit stellt die Dynamik eine wichtige Grundlage für die simulationsbasierte Entwicklung von Manipulatoren dar.

---

## 5.1 Grundlagen

Bei direkter Kinematik in Kap. 2 ging es um die Berechnung der Lage (kartesische Position und Orientierung) eines Manipulators in Abhängigkeit seiner Gelenkvariablen. Im anschließenden Kap. 3 wurde mit der inversen Kinematik die dazu inverse Aufgabenstellung betrachtet: Für eine gegebene Endeffektorlage werden die dazu notwendigen Gelenkvariablen berechnet. Die Einführung der Jacobi-Matrix in Kap. 4 ermöglichte schließlich eine Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Geschwindigkeiten von Endeffektor- und Gelenkvariablen sowie zwischen deren Beschleunigungen. So kann von einem durch  $(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})$  beschriebenen Bewegungszustand des Endeffektors auf den korrespondierenden Bewegungszustand  $(q, \dot{q}, \ddot{q})$  der Gelenke umgerechnet werden; natürlich ist dabei auch der umgekehrte Weg möglich.

Mit dem aus der Physik bekannten Prinzip der virtuellen Arbeit konnte eine enge Verwandtschaft zwischen der Berechnung von Geschwindigkeiten und dem Statik-Problem (ohne Gewichts- und Haftreibungskräfte) aufgezeigt werden. So liefert die Jacobi-Matrix den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten von Endeffektor und Gelenken, die transponierte Jacobi-Matrix den Zusammenhang zwischen deren Kräfte und Momente (ohne Gewichts- und Haftreibungskräfte) im Stillstand.

Die Betrachtungen werden in diesem Kapitel auf Kräfte und Momente ausgeweitet, die in den Gelenkachsen zur Realisierung eines durch  $(q, \dot{q}, \ddot{q})$  vorgegebenen Bewegungszustands notwendig sind. Diese Aufgabenstellung fällt in das physikalische Gebiet der *Dynamik*<sup>1</sup>, welches nach [3, S. 57], beschrieben wird als „(...) die Lehre von den Kräften und Wechselwirkungen und den von ihnen hervorgehobenen Bewegungs- oder Zustandsänderungen in physikalischen Systemen“. Betrachtet man dabei als physikali-

---

<sup>1</sup> Aus dem Griechischen *dýnamis* für Kraft.

ches System mechanische Körper, so spricht man von *Mechanik*, synonym von *Kinetik*<sup>2</sup>. Der Begriff *Mechanik* ist im allgemeinen Sprachgebrauch mit weiteren Bedeutungen, wie zum Beispiel *Konstruktion*, überlagert.

Mit verallgemeinertem Gelenkmomentenvektor  $\tau$  aus Abschn. 4.3.1 wird im vorliegenden Kapitel die durch Abbildung

$$(q, \dot{q}, \ddot{q}) \mapsto \tau$$

charakterisierte Aufgabenstellung der Dynamik betrachtet. Dies führt zu den sogenannten *Bewegungsgleichungen*, die hauptsächlich in folgenden Bereichen der Entwicklung zur Anwendung kommen:

- Auslegung von Gelenkantrieben
- Simulation von Bewegungen (hier wird in der Regel die inverse Abbildung  $\tau \mapsto (q, \dot{q}, \ddot{q})$  benötigt)
- Auslegung von Regelkreisen
- Bahnplanung

### 5.1.1 Freiheitsgrade, Zwangsbindungen und generalisierte Koordinaten

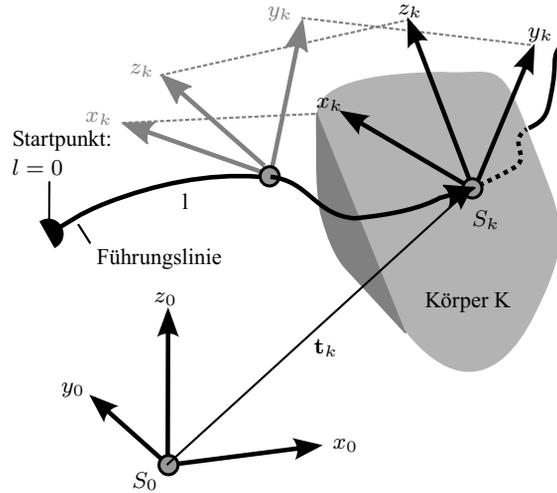
Zur Erläuterung wichtiger Begriffe der Dynamik wird zunächst ein einzelner Körper  $K$  mit körpereigenem Koordinatensystem  $S_k$ , wie in Abb. 5.1 dargestellt, betrachtet. Seine kartesische Position soll durch die kartesische Position von Ursprung  $S_k$ , seine Orientierung durch Euler-Winkel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  festgelegt sein. Sind alle Positions- und Orientierungs-Koordinaten *unabhängig* voneinander wählbar, so bezeichnet man sie als *Bewegungsfreiheitsgrade* oder kurz als *Freiheitsgrade*. Damit besitzt der betrachtete Körper jeweils maximal drei *translative* und drei *rotative* Freiheitsgrade. Als *Zahl der Freiheitsgrade*  $f$  wird die minimale Zahl voneinander unabhängiger Koordinaten bezeichnet, die zur vollständigen Festlegung von Position und Orientierung notwendig ist. Als Abkürzung für *Zahl der Freiheitsgrade* verwendet man den Begriff *Freiheitsgrade* oder auch *DoF* (siehe Fußnote 14 aus Abschn. 1.3). Die genaue Bedeutung geht dabei stets aus dem Kontext hervor. Somit besitzt der betrachtete Körper  $K$  insgesamt sechs Freiheitsgrade.

Ein System aus mehreren, eventuell durch Gelenke miteinander verbundenen Einzelkörpern bezeichnet man als *Mehrkörper-System*, kurz *MKS*.

Anders als oben betrachteter Körper  $K$ , sind die in der Robotik auftretenden Körper im Raum nicht vollständig frei beweglich. Vielmehr sind die Bewegungen der Körper durch Gelenke eingeschränkt. Für Körper  $K$  kann eine solche Einschränkung der Freiheitsgrade

<sup>2</sup> Aus dem Griechischen *kinein* für bewegen. Davon zu unterscheiden ist *Kinematik* als Lehre der Bewegung (ohne Trägheiten).

**Abb. 5.1** Zwangsbindung eines Körpers  $K$  im Raum durch eine Führungslinie



zum Beispiel durch eine Führungslinie erfolgen, auf der der Ursprung von  $S_k$  zu liegen kommen soll. Wie in Abb. 5.1 dargestellt, soll die Führungslinie einen Startpunkt besitzen; die zurückgelegte Länge entlang der Führungslinie werde mit  $l$  gemessen. In diesem Fall können die kartesischen Koordinaten  $\mathbf{t}_k$  nicht mehr unabhängig voneinander gewählt werden. Eine anschauliche Beschreibung der kartesischen Position des Ursprungs von  $S_k$  erfolgt nun durch Distanz  $l$  entlang der Führungslinie, gemessen vom Startpunkt aus. Da mit  $l$  die kartesische Position von  $K$  eindeutig festgelegt ist, reduziert sich die Zahl translativer Freiheitsgrade von drei auf eins. Man spricht von einer *Zwangsbindung* des Körpers durch die Führungslinie.

Die Orientierung von  $K$  wird durch die Führungslinie jedoch nicht beeinflusst. So besitzt  $K$  weiterhin drei Rotationsfreiheitsgrade und es folgt eine Gesamtzahl von  $f = 3 + 1 = 4$  Freiheitsgraden.

Position und Orientierung eines Manipulators mit einem einzigen Manipulatorsegment mit Drehgelenk wird durch homogene Transformationsmatrix

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{R}_{01}(\theta_1) & \mathbf{t}_1(\theta_1) \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right]$$

beschrieben. Die einzige unabhängige Koordinate ist in diesem Fall  $\theta_1$ , so dass Freiheitsgrad  $f = 1$  vorliegt.

Man erweitert den Begriff des Freiheitsgrads auf Gelenke: Hierfür denkt man sich ein Ende des Gelenks als feststehend. Das andere, in der Regel bewegliche Gelenkende sei starr mit einem Körper verbunden. Die aus der Beschaffenheit des Gelenks resultieren-

den Freiheitsgrade des angebundenen Körpers werden dann auch als Freiheitsgrade des Gelenks bezeichnet.

Mit dieser Definition besitzt das Drehgelenk des obigen einarmigen Manipulators Freiheitsgrad  $f = 1$ . Ohne Gelenk – also frei im Raum – besäße das Manipulatorsegment sechs Freiheitsgrade. Offensichtlich stellt das Drehgelenk für den Körper eine Zwangsbindung im Raum in  $b = 6 - 1 = 5$  Freiheitsgraden ( $b$  wie *B*indung) dar. Schränkt man von vornherein die Bewegung auf eine Ebene mit maximal drei Freiheitsgraden (2 translative, 1 rotativer) ein, so bindet das Drehgelenk nur  $b = 3 - 1 = 2$  Freiheitsgrade. Bindungszahl  $b$  bezeichnet man in der technischen Mechanik auch als *Wertigkeit eines Gelenks*.

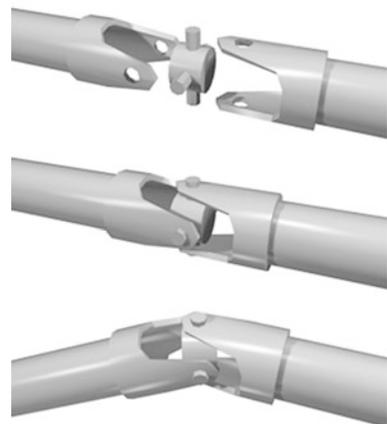
Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Gelenktypen, die sich nach Bewegungsart (translativ / rotativ) und Zahl der Freiheitsgrade bzw. Bindungen unterscheiden. Die bei Manipulatoren am häufigsten gebrauchten Gelenke sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Als *Starrkörper-System* bezeichnet man ein Mehrkörper-System, das aus einzelnen Starrkörpern besteht. Ein *Starrkörper* zeichnet sich dadurch aus, dass jeder Punkt des Körpers bezogen auf das körpereigene Koordinatensystem auf einer konstanten Position liegt.

**Tab. 5.1** Gelenktypen von Manipulatoren

Name	Bewegungs-freiheitsgrade	Bewegungsart
Drehgelenk	$f = 1$	Drehung
Linearführung mit Verdrehsicherung	$f = 1$	Verschiebung
Linearführung ohne Verdrehsicherung	$f = 2$	kombinierte Drehung und Verschiebung
Kardan- bzw. Kreuzgelenk, siehe Abb. 5.2	$f = 2$	Drehung in zwei Achsen
Kugelgelenk	$f = 3$	Drehung in drei Achsen

**Abb. 5.2** Prinzipskizze zum Aufbau und zur Wirkungsweise eines Kardan- bzw. Kreuzgelenks. Unverändert übernommen aus [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Universal\\_joint.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/2f/Universal_joint.png), erstellt von Wikipedia-User Wapcaplet, freigegeben unter Creative-Commons-Lizenz 3.0 nicht portiert – Weitergabe unter gleichen Bedingungen, Link zuletzt überprüft am 21.12.2018



Die enthaltenen Starrkörper können dabei Zwangsbindungen, wie zum Beispiel durch Gelenke oder Führungslinien bzw. Führungsflächen, unterliegen. Bei den hier betrachteten Manipulatoren stellen die Gelenkverbinder die Starrkörper dar; Zwangsbindungen werden ausschließlich von Gelenken eingeprägt.

Die Zahl der Freiheitsgrade eines Starrkörper-Systems bestimmt man, indem man zunächst das Starrkörper-System ohne jede Zwangsbindung betrachtet. Für  $n$  Starrkörper ohne Zwangsbindung folgt daraus im Raum  $f_u = 6n$  (Index  $u$  für ungebunden). Ist die Bewegung von vornherein auf eine Ebene eingeschränkt, so gilt  $f_u = 3n$ . Im zweiten Schritt ermittelt man die Zahl  $b$  der Bindungen der Gelenke.

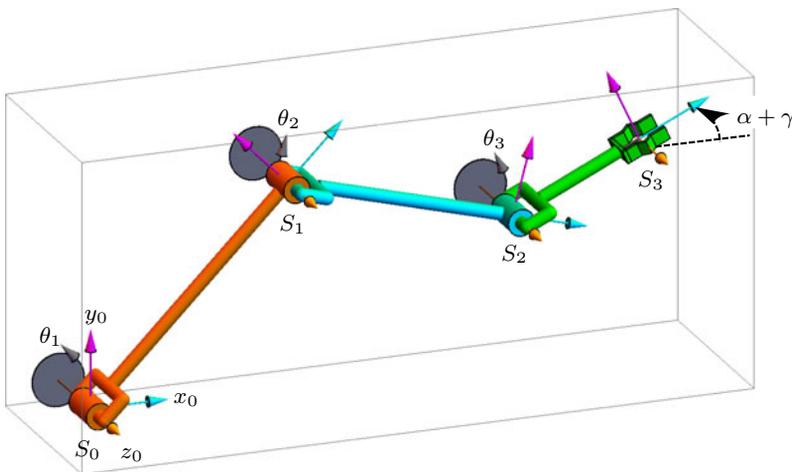
**Beispiel 5.1.** Freiheitsgrade beim planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulator: Der betrachtete Manipulator aus Abb. 5.3 besteht aus  $n = 3$  Starrkörpern. Da die Bewegung nur in der Ebene  $z_0 = 0$  stattfinden kann, folgt im ungebundenen Fall (also ohne Gelenke) die Zahl der Freiheitsgrade zu

$$f_u = 3 \cdot 3 = 9.$$

Index  $u$  steht dabei für *ungebunden*. Die drei Rotationsgelenke binden in der Ebene jeweils zwei Freiheitsgrade, so dass sich eine Gesamtzahl an Bindungen von

$$b = 3 \cdot 2 = 6$$

ergibt. Damit verbleiben für die Bewegung in der Ebene noch  $f = f_u - b = 9 - 6 = 3$  Freiheitsgrade.



**Abb. 5.3** Freiheitsgrade beim planaren 3-DoF Ellenbogen-Manipulator

Analog kann auch eine Bewegung im Raum betrachtet werden. Damit lägen

$$f_u = 3 \cdot 6 = 18$$

Freiheitsgrade für das ungebundene Starrkörper-System vor. Die Bindungszahl der Gelenke erhöht sich in diesem Fall auf

$$b = 3 \cdot 5 = 15,$$

so dass sich wieder  $f = f_u - b = 18 - 15 = 3$  Freiheitsgrade für den Manipulator ergeben. <

Zusammengefasst berechnet sich die Zahl  $f$  der Freiheitsgrade einer Manipulator-Kinematik mit  $n$ -Körpern und  $b$  Zwangsbindungen zu

$$f = \begin{cases} 6n - b & \text{für eine Bewegung im Raum,} \\ 3n - b & \text{für eine Bewegung in der Ebene.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Dabei müssen folgende Umstände beachtet werden:

- Die Zahl der Bindungen wird bei einer Bewegung im Raum aus dem Gelenk-Freiheitsgrad  $f_{\text{Gelenk}}$  durch  $b_{\text{Gelenk}} = 6 - f_{\text{Gelenk}}$  berechnet. Bei einer Bewegung in der Ebene gilt hingegen  $b_{\text{Gelenk}} = 3 - f_{\text{Gelenk}}$ .
- Bei *geschlossenen kinematischen Ketten* bzw. *geschlossenen Kinematiken* (Endeffektor beidseitig verbunden) ist eine Unterscheidung in die zwei Fälle aus (5.1) zwingend notwendig; bei *offenen kinematischen Ketten* bzw. *offenen Kinematiken* (Endeffektor einseitig verbunden und auf der anderen Seite frei im Raum) nicht.

Dies ermöglicht eine Klassifikation der betrachteten Kinematik in der technischen Mechanik bzw. Statik, [7, Abschn. 5.1.2] und [26]:

- Im Fall  $f > 0$  kann sich die Kinematik bewegen. Dies bezeichnet man als *kinematisch unbestimmt*. Für die Lagerreaktionskräfte und -momente ergeben sich Lösungsvielfalten, so dass man den Fall auch als *statisch unterbestimmt* klassifiziert.
- Kinematiken, die keine Bewegung ausführen können, werden als *kinematisch bestimmt* bezeichnet. Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür ist  $f = 0$ . In diesem Fall lassen sich die Lagerreaktionskräfte und -momente berechnen, so dass die Kinematik zusätzlich als *statisch bestimmt* bezeichnet wird.  
In einigen Sonderfällen lassen sich trotz  $f = 0$  Bewegungen ausführen, siehe zum Beispiel [7, Abb. 5.6d]. Daher sind für kinematische Bestimmtheit weitergehende Untersuchungen notwendig.
- Im Fall  $f < 0$  kann sich die Kinematik ebenfalls nicht bewegen, so dass sie wieder kinematisch bestimmt ist. Im Unterschied zu  $f = 0$  lassen sich aber die Lagerreaktionskräfte und -momente nicht ohne Berücksichtigung von Elastizität berechnen. Daher bezeichnet man den Fall  $f < 0$

als *statisch unbestimmt* bzw. *statisch überbestimmt*. Im Unterschied zum statisch bestimmten Fall ergeben sich hier mechanische Verspannungen, die zum Beispiel zu Verbiegungen oder Torsionen führen.

Jeder einzelne Körper eines Starrkörper-Systems kann im Raum durch die drei Koordinaten seiner kartesischen Position zusammen mit drei weiteren Koordinaten seiner Orientierung (zum Beispiel die drei Euler-Winkel) beschrieben werden. Bei einem Manipulator bestehen die Starrkörper aus den Manipulator-Segmenten. Ein sechsachsiger Manipulator würde demnach im Raum  $f_u = 6 \cdot 6 = 36$  Koordinaten benötigen. Die Bindungen der sechs Gelenke führen aber zu einer bestimmten Abhängigkeit dieser Koordinaten. Die Zahl dieser Nebenbedingungen ergibt sich aus der Bindungszahl, die bei einem sechsachsigen Manipulator mit sechs Gelenken  $b = 6 \cdot 5 = 30$  beträgt. Demnach ergeben sich  $f = f_u - b = 6$  Freiheitsgrade. Die Stellung des Manipulators kann also durch genau sechs voneinander unabhängigen Koordinaten bestimmt werden. Solche Koordinaten müssen inhärent alle Nebenbedingungen erfüllen. Sie stellen dann eine kleinste Menge an unabhängigen Koordinaten zur Beschreibung der Stellung des Manipulators dar. Diese Minimalzahl entspricht dem Freiheitsgrad des Starrkörper-Systems bzw. Manipulators. Man bezeichnet diese speziellen Koordinaten als *Minimalkoordinaten*, *verallgemeinerte* oder *generalisierte Koordinaten*, [4, 22].

Bei den hier betrachteten Manipulatoren berücksichtigen die Gelenkvariablen  $\mathbf{q}$  inhärent alle Zwangsbindungen. Damit handelt es sich bei  $\mathbf{q}$  um einen Satz generalisierter Koordinaten.

## 5.1.2 Lagrangesche Bewegungsgleichungen für Systeme aus Punktmassen

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen mittels Freischneiden der Körper und Aufstellen von Kräfte- und Momentengleichgewichten (unter Berücksichtigung der d'Alembertschen<sup>3</sup> Hilfskräfte) sind alle Zwangskräfte und -momente enthalten. Sie müssen, quasi als Zwischengrößen, mit ausgerechnet werden. In der mechanischen Konstruktion können diese Zwischengrößen von Interesse sein. So sind zum Beispiel bei der Dimensionierung der Gelenklagerungen die maximalen Lagerreaktionskräfte und -momente interessant. Zur Auslegung von Antriebssystemen oder Simulation der Reglergüte werden diese Zwischengrößen jedoch nicht benötigt.

---

<sup>3</sup> Jean-Baptiste le Rond d'Alembert: französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph der Aufklärung, 1717–1783.

Leitet man die Bewegungsgleichungen von dem sogenannten *Prinzip der virtuellen Arbeit* her, so entfällt die Notwendigkeit der Berechnung dieser Zwischengrößen – das Problem vereinfacht sich stark. Dies geht auf eine Idee von Bernoulli<sup>4</sup> und d’Alembert zurück.

In der Folge entwickelten Euler<sup>5</sup> und Lagrange<sup>6</sup> daraus ein *grundlegendes Prinzip der Mechanik* zur Berechnung der Bewegungsgleichungen, die man als *Lagrangesche Bewegungsgleichungen* bezeichnet, [4, S. 42]. Dabei werden nur Zwangsbindungen von Positionen und Orientierungen zugelassen. Die der DH-Konvention zugrunde liegenden Gelenke vom Typ Drehgelenk und Linearführung (jeweils 1-DoF, das heißt Bewegungsfreiheitsgrad  $f = 1$ ) realisieren solche Zwangsbindungen. Man bezeichnet sie als *holonome Zwangsbindungen*<sup>7</sup>. *Nicht-holonome Zwangsbindungen* schränken hingegen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ein und können nicht durch Integration auf holonome Zwangsbindungen zurückgeführt werden. Daher spricht man auch von *nicht-integrablen Nebenbedingungen*. Nicht-holonome Zwangsbindungen treten bei den hier betrachteten Manipulatoren nicht auf, so dass diese für den Rest des Kapitels ausgeschlossen werden. (Siehe zum Beispiel [4, Abschn. I-3] für Beispiele von Systemen mit nichtholonomen Zwangsbindungen.)

Im Folgenden werden die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Dabei wird weitgehend der Darstellung aus [4, Abschn. I-4] gefolgt und es wird ein System aus Punktmassen betrachtet. Die hergeleiteten Ergebnisse können dann mit Einführung von Massenschwerpunkt und Massenträgheitsmoment auf ein System ausgedehnter Körper erweitert werden, siehe Abschn. 5.5.

Die auf die Punktmassen wirkenden Kräfte lassen sich aufteilen in *Zwangskräfte*  $F_z$  (Index „z“ für Zwang) und *eingeprägte Kräfte*  $F_e$  (Index „e“ für eingepägt). Zwangskräfte entstehen zum Beispiel durch innere Bindungen, Lagerungen oder mechanische Führungen, die sich gegen die Welt abstützen. Typische Vertreter eingeprägter Kräfte sind Gravitationskräfte, Antriebskräfte oder auch Federkräfte zwischen Punktmassen.

Allgemein ist der Impuls  $p$  eines Körpers definiert als Produkt seiner Masse und Geschwindigkeit. Für eine Punktmasse Nr.  $i$  ergibt sich also Impuls  $p_i = m_i v_i$ . Nach d’Alembert folgt damit und mit obiger Aufteilung der auf die Masse wirkenden Kräfte Bewegungsgleichung

$$\dot{p}_i = F_{e,i} + F_{z,i} \iff F_{e,i} + F_{z,i} - \dot{p}_i = 0,$$

<sup>4</sup> Jacob Bernoulli: schweizer Mathematiker und Physiker, 1645–1705.

<sup>5</sup> Leonhard Euler: schweizer Mathematiker und Physiker, 1707–1783.

<sup>6</sup> Joseph Louis Lagrange. Entwickelt 1788 den Lagrange-Formalismus für die klassische Mechanik. Italienischer Mathematiker und Astronom, 1736–1813.

<sup>7</sup> aus dem Griechischen *ganz, vollständig*.

das heißt die zeitliche Ableitung des Impulses entspricht der Summe der an Punktmasse Nr.  $i$  angreifenden Kräfte. Daher verschwindet bei jeder virtuellen Verrückung<sup>8</sup>  $d\mathbf{x}_i$  der Punktmassen stets die als Skalarprodukt ausgedrückte virtuelle Arbeit

$$\underbrace{(\mathbf{F}_{e,i} + \mathbf{F}_{z,i} - \dot{\mathbf{p}}_i)}_{=0}^T d\mathbf{x}_i = 0. \quad (5.2)$$

Unabhängig von (5.2) kann in Richtung von Zwangskräften per Definition keine Bewegung und damit auch keine virtuelle Verrückung stattfinden. Daraus folgt das *d'Alembertsche Prinzip*: Zwangskräfte leisten keine Arbeit, das heißt

$$\mathbf{F}_{z,i}^T d\mathbf{x}_i = 0. \quad (5.3)$$

Daher bezeichnet man Zwangskräfte in der Mechanik auch als *verlorene Kräfte*. Setzt man (5.3) in (5.2) ein, so folgt

$$(\mathbf{F}_{e,i} - \dot{\mathbf{p}}_i)^T d\mathbf{x}_i = 0. \quad (5.4)$$

Während (5.2) wegen  $\mathbf{F}_{e,i} + \mathbf{F}_{z,i} - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$  für beliebige virtuelle Verrückungen  $d\mathbf{x}_i$  erfüllt ist, gilt dies nicht mehr für (5.4), da hier  $\mathbf{F}_{e,i} - \dot{\mathbf{p}}_i$  nur in Sonderfällen verschwindet. Des Weiteren könnte nach Hilfssatz 5.1 nur dann auf  $\mathbf{F}_{e,i} - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$  geschlossen werden, wenn  $d\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$  beliebig wählbar wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall, da Zwangsbindungen eingehalten werden müssen.

**Hilfssatz 5.1.** Sei  $d\mathbf{x}$  ein beliebiger Vektor aus  $\mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 1$ . Dann gilt:

$$\mathbf{a}^T d\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

**Beweis** Angenommen es gelte

$$\mathbf{a}^T d\mathbf{x} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_k dx_k \stackrel{!}{=} 0.$$

Nach Voraussetzung können die Komponenten  $x_i$  beliebig gewählt werden, solange sie nicht alle gleichzeitig verschwinden. Wählt man  $x_2 = x_3 = \dots = x_k = 0$  und  $x_1 \neq 0$ , so folgt  $a_1 = 0$ . Mit dem selben Argument kann man begründen, dass auch die anderen Komponenten von  $\mathbf{a}$  verschwinden müssen. Daraus folgt  $\mathbf{a}^T d\mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Der Rückschluss ist trivial: Aus  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  folgt  $\mathbf{a}^T d\mathbf{x} = \mathbf{0}^T \dot{\mathbf{x}} = 0$ . ■

Siehe auch Begründung zu (4.26).

Im Unterschied zu  $d\mathbf{x}_i$  berücksichtigt die virtuelle Verrückung der *generalisierten Koordinaten*  $d\mathbf{q}_i$  per Definition alle (holonomen) Zwangsbindungen. Damit sind die Komponenten  $dq_i$  unabhängig voneinander und beliebig wählbar.

<sup>8</sup> Wie bereits in Abschn. 4.3.1 erläutert, besteht bei den hier betrachteten Manipulatoren kein Unterschied zwischen einer virtuellen Verrückung und einer infinitesimal kleinen Bewegung.

Sei nun für die betrachtete Punktmasse Nr.  $i$  ein Satz generalisierter Koordinaten mit

$$\mathbf{q}_i = \left( q_{1,i} \quad q_{2,i} \quad \cdots \quad q_{f_i,i} \right)^T$$

gegeben. Unter der Annahme holonomer Nebenbedingungen lässt sich die Position von Punktmasse Nr.  $i$  damit als (vektorwertige) Funktion  $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i)$  der generalisierten Koordinaten darstellen. Daraus folgt

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (5.5)$$

Da  $\mathbf{x}_i$  eine kartesische Position ist, gilt allgemein  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^k$ . Dabei bewegt sich die Punktmasse für  $k = 3$  im Raum,  $k = 2$  in der Ebene und  $k = 1$  auf einer Linie. Die Dimension von  $\mathbf{q}_i$  stellt die Zahl  $f_i$  der Freiheitsgrade von Punktmasse Nr.  $i$  dar.

**Anmerkung 5.1.** Mit Komponentendarstellung  $\mathbf{x}_i = (x_{i,1} \quad \cdots \quad x_{i,k})^T$  liefert die partielle Ableitung nach  $\dot{\mathbf{q}}_i$  eine Jacobi-Matrix gemäß

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \tilde{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{i,1}}{\partial q_{i,1}} & \cdots & \frac{\partial x_{i,1}}{\partial q_{i,f_i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_{i,1}} & \cdots & \frac{\partial x_{i,k}}{\partial q_{i,f_i}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times f_i} \quad \text{mit } f_i \leq k \leq 3,$$

siehe auch die allgemeine Definition einer Jacobi-Matrix in (5.46a).

Im Folgenden ergibt sich jedoch eine etwas einfachere Darstellung, wenn  $\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i}$  anstelle der dazu äquivalenten Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_i$  verwendet wird.  $\square$

Des Weiteren erhält man über das totale Differenzial infinitesimalen Zusammenhang

$$d\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i. \quad (5.6a)$$

In (5.4) eingesetzt ergibt

$$(\mathbf{F}_{e,i} - \dot{\mathbf{p}}_i)^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i = \left( \mathbf{F}_{e,i}^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} - \dot{\mathbf{p}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right) d\mathbf{q}_i \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.7)$$

Da  $d\mathbf{q}_i$  inhärent (per Definition) alle (holonomen) Zwangsbindungen erfüllt, kann es beliebig variiert werden. Nach Hilfssatz 5.1 muss damit jede Komponente von  $\mathbf{F}_{e,i}^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} - \dot{\mathbf{p}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i}$  verschwinden, so dass

$$\mathbf{F}_{e,i}^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \dot{\mathbf{p}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i}. \quad (5.8)$$

Der in der linken Gleichungsseite enthaltene Kraftausdruck wird mit  $\mathbf{Q}_i$  zusammengefasst gemäß

$$\mathbf{F}_{e,i}^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i = \mathbf{Q}_i^T d\mathbf{q}_i = dW_{e,i}. \quad (5.9)$$

Da Kraft  $\mathbf{Q}_i$  im Kontext einer virtuellen Verrückung generalisierter Koordinaten definiert ist, bezeichnet man sie als *generalisierte Kraft*. Sie wird weiter unten zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen benötigt.

Im Folgenden wird die rechte Seite von (5.8) so umgeformt, dass sie durch diverse partielle Ableitungen der kinetischen Energie der betrachteten Punktmasse ausgedrückt werden kann: Hierzu führt der elementare Zusammenhang  $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i$  zunächst zu

$$\dot{\mathbf{p}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i}.$$

Nach (5.46b) liefert die Produktregel dafür

$$\begin{aligned} m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right) &= m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} + m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right), \\ \Leftrightarrow m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} &= m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right). \end{aligned}$$

Da Funktion  $\mathbf{x}_i(\mathbf{q}_i)$  stetig-differenzierbar ist, darf die Reihenfolge der Differenziation im letzten Term vertauscht werden:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} &= m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \\ &= m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_i}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mit

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i}.$$

aus (5.5) folgt aus (5.10) weiter

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \mathbf{q}_i}. \quad (5.11)$$

Die darin enthaltenen Ausdrücke lassen sich mit Hilfe der Kettenregel der Differenzialrechnung durch eine partielle Ableitung der kinetischen Energie

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i$$

der betrachteten Punktmasse ausdrücken. Um dies einzusehen, wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$  angenommen und damit der erste Term der linken Seite von (5.11) ohne die zeitliche Ableitung elementweise dargestellt:

$$\begin{aligned} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} &= m_i \begin{pmatrix} \dot{x}_{i,1} & \dot{x}_{i,2} & \dot{x}_{i,3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_{i,1}}{\partial \dot{q}_{i,1}} & \frac{\partial \dot{x}_{i,1}}{\partial \dot{q}_{i,2}} & \frac{\partial \dot{x}_{i,1}}{\partial \dot{q}_{i,3}} \\ \frac{\partial \dot{x}_{i,2}}{\partial \dot{q}_{i,1}} & \frac{\partial \dot{x}_{i,2}}{\partial \dot{q}_{i,2}} & \frac{\partial \dot{x}_{i,2}}{\partial \dot{q}_{i,3}} \\ \frac{\partial \dot{x}_{i,3}}{\partial \dot{q}_{i,1}} & \frac{\partial \dot{x}_{i,3}}{\partial \dot{q}_{i,2}} & \frac{\partial \dot{x}_{i,3}}{\partial \dot{q}_{i,3}} \end{bmatrix} \\ &= m_i \left( \dot{x}_{i,1} \frac{\partial \dot{x}_{i,1}}{\partial \dot{q}_{i,1}} + \dot{x}_{i,2} \frac{\partial \dot{x}_{i,2}}{\partial \dot{q}_{i,1}} + \dot{x}_{i,3} \frac{\partial \dot{x}_{i,3}}{\partial \dot{q}_{i,1}} \mid \dot{x}_{i,1} \frac{\partial \dot{x}_{i,1}}{\partial \dot{q}_{i,2}} + \dot{x}_{i,2} \frac{\partial \dot{x}_{i,2}}{\partial \dot{q}_{i,2}} + \dot{x}_{i,3} \frac{\partial \dot{x}_{i,3}}{\partial \dot{q}_{i,2}} \mid \right. \\ &\quad \left. \mid \dot{x}_{i,1} \frac{\partial \dot{x}_{i,1}}{\partial \dot{q}_{i,3}} + \dot{x}_{i,2} \frac{\partial \dot{x}_{i,2}}{\partial \dot{q}_{i,3}} + \dot{x}_{i,3} \frac{\partial \dot{x}_{i,3}}{\partial \dot{q}_{i,3}} \right) \\ &= \frac{m_i}{2} \left( \frac{\partial \dot{x}_{i,1}^2}{\partial \dot{q}_{i,1}} + \frac{\partial \dot{x}_{i,2}^2}{\partial \dot{q}_{i,1}} + \frac{\partial \dot{x}_{i,3}^2}{\partial \dot{q}_{i,1}} \mid \frac{\partial \dot{x}_{i,1}^2}{\partial \dot{q}_{i,2}} + \frac{\partial \dot{x}_{i,2}^2}{\partial \dot{q}_{i,2}} + \frac{\partial \dot{x}_{i,3}^2}{\partial \dot{q}_{i,2}} \mid \right. \\ &\quad \left. \mid \frac{\partial \dot{x}_{i,1}^2}{\partial \dot{q}_{i,3}} + \frac{\partial \dot{x}_{i,2}^2}{\partial \dot{q}_{i,3}} + \frac{\partial \dot{x}_{i,3}^2}{\partial \dot{q}_{i,3}} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i \right) \right)^T = \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)^T. \end{aligned}$$

Analog lässt sich auch der zweite Term auf der rechten Seite von (5.11) als partielle Ableitung der kinetischen Energie darstellen. Damit folgt zusammengefasst

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i^T \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)^T - \left( \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right)^T.$$

Setzt man dies zusammen mit (5.9) in (5.8) ein und transponiert beide Seiten der Gleichung, so erhält man schließlich

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_i. \quad (5.12)$$

Oben eingeführte generalisierte Kraft  $\mathbf{Q}_i$  lässt sich in *konservative*  $\mathbf{Q}_{i,k}$  und *nichtkonservative Kräfte*  $\mathbf{Q}_{i,nk}$  aufteilen. Das Besondere an konservativen Kräften ist, dass sie sich als Gradient einer potentiellen Energie bzw. einer Potentialfunktion  $V_i(\mathbf{q}_i)$  darstellen lassen:

$$\mathbf{Q}_{i,k} = - \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}_i}. \quad (5.13)$$

Dabei ist für potentielle Energie  $V_i$  folgende Vorzeichenkonvention vereinbart:  $V_i > 0$ , wenn sich die potentielle Energie des Massenelements gegenüber einem Nullniveau erhöht. Wo dieses Nullniveau liegt, ist egal, da es im Gradienten von  $V_i$  als konstanter Offset herausfällt.

Konservative Kräfte bewirken Arbeit, die im System „konserviert“ ist, das heißt erhalten bleibt. Im Kontext der Robotik sind dies typischerweise Gravitationskräfte und Federkräfte. Nichtkonservative Kräfte bewirken hingegen Arbeit, die dem System verlorenght oder die dem System von extern zugeführt wird. Beispiele hierfür sind Reibungskräfte (Energie wird über Thermik nach extern dissipiert) und Gelenkantriebskräfte (Energie wird dem System von extern hinzugefügt).

Setzt man (5.13) in (5.12) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_i} = -\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}_i} + \mathbf{Q}_{i,\text{nk}} \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial (T_i - V_i)}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_{i,\text{nk}}. \end{aligned}$$

Mit Definition der *Lagrange-Funktion*

$$L_i = T_i - V_i \quad (5.14)$$

folgt wegen  $\frac{\partial V_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{0}$  schließlich die *Lagrangesche Bewegungsgleichung*

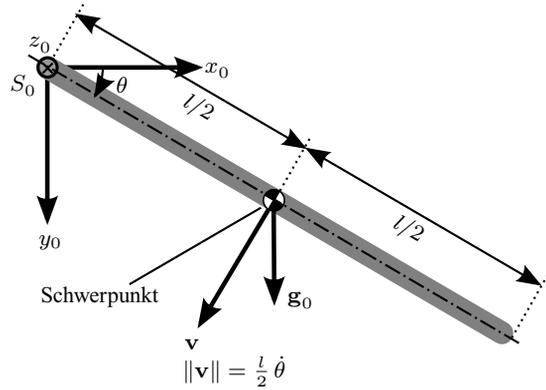
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_{i,\text{nk}}. \quad (5.15)$$

Die darin enthaltenen Energiegrößen lassen sich von Punktmassen auf ausgedehnte Körper erweitern, so dass (5.15) ebenfalls für ausgedehnte Körper  $i \in \{1, \dots, n\}$  anwendbar ist, siehe (5.39), [4, Kap. V], und [22, Abschn. 1.8.2]. Dabei erhöht sich die maximale Dimension der generalisierten Koordinate  $\mathbf{q}_i$  von drei auf sechs, da zu den drei kartesischen Positionskoordinaten jedes Körpers noch dessen drei Orientierungskoordinaten hinzukommen. Für jeden Körper liefert (5.14) so eine von insgesamt  $n$  Zeilen des *Bewegungs-Differenzialgleichungssystems*.

**Beispiel 5.2.** Manipulator mit einem Drehgelenk: Der Manipulator aus Abb. 5.4 besitze nur ein einzelnes Drehgelenk und Freiheitsgrad  $f = 1$ . Das Manipulatorsegment bestehe aus einem Stab der Länge  $l$  mit symmetrisch angeordnetem Schwerpunkt wie in Abb. 5.4 skizziert. Masse  $m$  sei homogen über den Körper verteilt. Gegeben sei weiterhin Massenträgheitsmoment  $I_z$  bezüglich einer Drehung um  $z_0$  durch den Schwerpunkt. Die Bedeutung und Herleitung dieses Massenträgheitsmoments sowie der Rotationsenergie eines Körpers werden im folgenden Abschn. 5.2 noch eingehend behandelt.

Als generalisierte Koordinate wird Gelenkwinkel  $\theta$  gewählt. Die Drehbewegung des Manipulatorsegments kann in eine Rotationsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt und eine Translationsbewegung des Schwerpunkts selbst aufgeteilt werden. Analog

**Abb. 5.4** Manipulator mit einem Drehgelenk aus Beispiel 5.2.  $\mathbf{g}_0$  bezeichnet den Vektor der Erdbeschleunigung,  $\mathbf{v}$  den Bahngeschwindigkeitsvektor



setzt sich die kinetische Energie des Manipulatorsegments aus einem Rotationsanteil und einem Translationsanteil zusammen:

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{l}{2} \dot{\theta} \right)^2$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T(\dot{\theta}) = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left( I_z + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right)}_I \dot{\theta}^2$$

Die potentielle Energie folgt aus der Höhe des Schwerpunkts. Als (für die Dynamik unerheblicher) Bezugspunkt  $V = 0$  wird die anschaulich interpretierbare Position bei  $\theta = 0$  (horizontale Position) gewählt. Damit erhält man

$$V(\theta) = -m g_0 \frac{l}{2} \sin \theta$$

und zusammen mit obiger kinetischer Energie Lagrange-Funktion

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - V(\theta) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + m g_0 \frac{l}{2} \sin \theta.$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = I \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} = m g_0 \frac{l}{2} \cos \theta$$

ergibt sich dann die Lagrangesche Bewegungsgleichung

$$I \ddot{\theta} - m g_0 \frac{l}{2} \cos \theta = 0.$$

Plausibilitäts-Check: Für  $\theta = 0$  ist der Arm horizontal ausgerichtet. Aus der Bewegungsgleichung folgt dafür

$$I \ddot{\theta} = m g_0 \frac{l}{2}.$$

Dies bedeutet, dass die Gewichtskraft mit maximalem Hebelarm als Beschleunigungskraft wirkt. ◀

## 5.2 Kinetische Energie

Ein wesentlicher Bestandteil der Lagrange-Funktion besteht in der kinetischen Energie der Segmente des Manipulators. Die Formulierung entsprechender Energiefunktionen mit den Methoden der linearen Algebra erfordert erweiterte Kenntnisse und Elemente der Mechanik wie zum Beispiel bezüglich Massenträgheitstensoren. Daher widmet sich vorliegender Abschnitt ausführlich diesem Thema.

### 5.2.1 Massenträgheitsmomente und kinetische Energie eines Starrkörpers

Energie, die ein Körper durch seine Bewegung, genauer gesagt durch seine Geschwindigkeit, relativ zu einem ruhenden Bezugssystem besitzt, wird *kinetische Energie* genannt. Diese kann in zwei Anteile aufgeteilt werden:

- A: Kinetische Energie durch Linearbewegung des Massenschwerpunkts
- B: Kinetische Energie durch Rotationsbewegung des Körpers um den Massenschwerpunkt (kurz *Schwerpunkt*)

Um dies zu zeigen, wird in einem Gedankenexperiment der Körper in unendlich viele infinitesimal kleine Punktmassen  $dm_i$  mit zugehöriger Position  $\mathbf{x}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$  zerlegt. Damit folgt die Gesamtmasse zur unendlichen Summe<sup>9</sup>

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n dm_i.$$

<sup>9</sup> Die unendliche Summe wird später durch ein Volumenintegral ausgedrückt. An vorliegender Stelle ist die Summen-Darstellung aber anschaulicher.

Im Folgenden wird Abkürzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rightarrow \sum_i$$

verwendet. Die Schwerpunktkoordinaten ergeben sich damit zu

$$\mathbf{x}_{\text{SP}} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \sum_i dm_i x_i \\ \sum_i dm_i y_i \\ \sum_i dm_i z_i \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \sum_i dm_i \mathbf{x}_i. \quad (5.16)$$

Seien A und B zwei beliebige Punkte des Körpers. Wie bereits in Abschn. 4.2.1 erläutert, ergibt sich die Geschwindigkeit von B als Summe der Geschwindigkeit von A und der Bahngeschwindigkeit von B bei Rotation um A gemäß (4.3).

Damit besitzt Punktmasse  $dm_B$  in Punkt B die infinitesimal kleine kinetische Energie

$$dT_B = \frac{dm_B}{2} (v_{B,x}^2 + v_{B,y}^2 + v_{B,z}^2) = \frac{1}{2} dm_B \mathbf{v}_B^T \mathbf{v}_B.$$

Aus (4.3) folgt weiter

$$\begin{aligned} dT_B &= \frac{dm_B}{2} (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})^T (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \\ &= \frac{dm_B}{2} \|\mathbf{v}_A\|^2 + \frac{dm_B}{2} \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}\|^2 + dm_B \mathbf{v}_A^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wählt man nun als Bezugspunkt A den Schwerpunkt SP des Körpers, so gilt für den Verbindungsvektor

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{\text{SP}}.$$

Damit ergibt sich der dritte Summand aus obigem Energieterm (5.17) zu

$$dm_B \mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{\text{SP}})) = dm_B \mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_{\text{SP}}). \quad (5.18)$$

Die gesamte kinetische Energie des Körpers berechnet sich durch Summation der kinetischen Energie aller Punktmassen des Körpers. Für Anteil (5.18) dieser kinetischen Gesamtenergie folgt so

$$\begin{aligned} &\sum_i dm_i \mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_{\text{SP}}) \\ &= -m \mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_{\text{SP}}) + \sum_i dm_i \mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) \\ &= -\mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times m \mathbf{x}_{\text{SP}}) + \mathbf{v}_{\text{SP}}^T (\boldsymbol{\omega} \times \sum_i dm_i \mathbf{x}_i) = 0, \end{aligned}$$

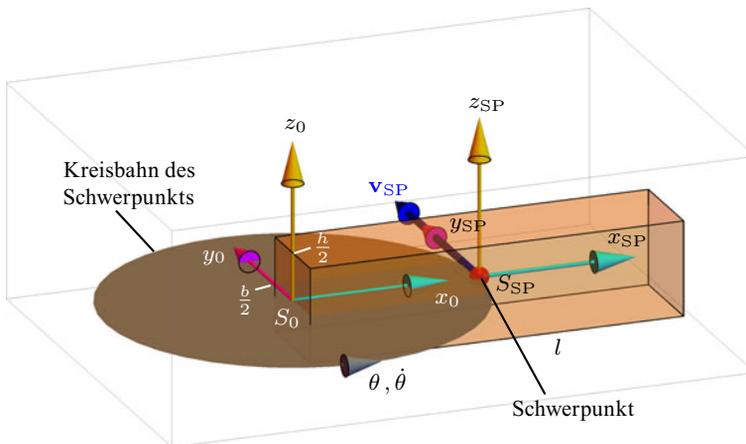
wobei nach Definition (5.16) des Schwerpunkts Beziehung  $m \mathbf{x}_{SP} = \sum_i dm_i \mathbf{x}_i$  heran gezogen wurde. Daher ergibt sich die gesamte kinetische Energie aus den beiden verbleibenden ersten beiden Termen von (5.17) zu

$$T = \sum_i \frac{dm_i}{2} \|\mathbf{v}_{SP}\|^2 + \frac{dm_i}{2} \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SPi}\|^2 = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_{SP}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_i dm_i \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SPi}\|^2. \quad (5.19)$$

Der erste Summand in (5.19) stellt die kinetische Energie des Massenschwerpunkts dar (oberer Aufzählungspunkt A), der zweite Summand die kinetische Energie der Rotation des Körpers um den Schwerpunkt mit Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  (oberer Aufzählungspunkt B).

**Beispiel 5.3.** Drehbewegung eines Quaders um eine Stirnseite: Der Quader aus Abb. 5.5 soll sich um die  $z_0$ -Achse um Winkel  $\theta$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta}$  drehen. Der Schwerpunkt bewege sich dabei auf der dargestellten Kreisbahn mit Bahngeschwindigkeit  $\|\mathbf{v}_{SP}\| = \left| \dot{\theta} \right| \frac{l}{2}$ . Die Rotationsbewegung des Körpers wird dabei durch eine Drehung um Achse  $z_{SP}$  durch den Schwerpunkt berücksichtigt.  $\triangleleft$

Im Folgenden soll der in (5.19) enthaltene Anteil der kinetischen Energie aus der Drehbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt genauer betrachtet werden. In den Schwerpunkt des Körpers werde ein körperfestes Koordinatensystem  $S_{SP}$  gelegt.



**Abb. 5.5** Aufteilung der Bewegung eines quaderförmigen Körpers in eine Bewegung des Schwerpunkts auf einer Kreisbahn und eine Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt. Zusätzlich dargestellt ist ein körperfestes Koordinatensystem  $S_{SP}$  im Ursprung des Körpers. Dabei ist die Orientierung von  $S_{SP}$  so gewählt, dass die Rotationsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt um die  $z_{SP}$ -Achse erfolgt

Ein Massenelement  $dm_i$  befindet sich damit in Schwerpunktkoordinaten bei  $\mathbf{x}_i^{\text{SP}} = (x_i^{\text{SP}} \ y_i^{\text{SP}} \ z_i^{\text{SP}})^T$ . Zunächst werde der einfachere Spezialfall betrachtet, dass sich der Körper nur um die  $z_{\text{SP}}$ -Achse drehe, dass also Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  in  $S_{\text{SP}}$ -Koordinaten nur eine  $z$ -Komponente aufweise, siehe Abb. 5.5 für einen solchen Fall. Massenelement  $dm_i$  dreht sich dann mit Abstand bzw. Radius

$$r_{\text{SP}i} = \sqrt{(x_i^{\text{SP}})^2 + (y_i^{\text{SP}})^2}$$

um die Drehachse ( $z_{\text{SP}}$ -Achse) mit Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\theta} = \|\boldsymbol{\omega}\|$ . Die Bahngeschwindigkeit des Massenelements ergibt sich damit zu  $v_i = r_{\text{SP}i} \dot{\theta}$ . Daraus folgt für die betrachtete infinitesimal kleine Punktmasse der rotatorischer Anteil der kinetischen Energie zu

$$dT_{i,\text{rot}} = \frac{1}{2} dm_i v_i^2 = \frac{1}{2} dm_i (r_{\text{SP}i} \dot{\theta})^2.$$

Die Summe über alle Massenelemente liefert dann die gesamte kinetische Energie aus Rotation zu

$$T_{\text{rot}} = \sum_i dT_{i,\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} dm_i (r_{\text{SP}i} \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_i dm_i r_{\text{SP}i}^2.$$

Für den Körper wird eine homogene Massenverteilung angenommen, das heißt Dichte  $\rho_i = \frac{dm_i}{dV_i}$  ( $dV_i$ : Volumen von Massenelement  $dm_i$ ) aller Massenelemente soll gleich  $\rho$  sein. Daraus folgt  $dm_i = \rho dV_i$  und damit weiter

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \rho \sum_i r_{\text{SP}i}^2 dV_i. \quad (5.20)$$

Dies lässt sich mit Hilfe eines Volumenintegrals darstellen gemäß

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \rho \underbrace{\iiint_{(V)} r^2 dV}_{I_{z_{\text{SP}}}}$$

mit  $r$  als Abstand des Volumenelements  $dV$  zur Drehachse ( $z_{\text{SP}}$ -Achse). Man bezeichnet dieses Integral inklusiv Dichte  $\rho$  als *Massenträgheitsmoment* (kurz: *Trägheitsmoment*)  $I_{z_{\text{SP}}}$  bezüglich Drehachse  $z_{\text{SP}}$ . Die Einheit des Massenträgheitsmoments ist damit  $\text{kg m}^2$ . So lässt sich die kinetische Energie der Drehbewegung um die  $z_{\text{SP}}$ -Achse in der kompakten Form

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{z_{\text{SP}}} \quad (5.21)$$

darstellen. Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise das hochgestellte SP zur Kennzeichnung des beschreibenden Koordinatensystems weggelassen, wenn eine Unterscheidung zur Darstellung im Weltkoordinatensystem aus dem Kontext hervor geht.

**Beispiel 5.4.** Fortsetzung von Beispiel 5.3: Das Abstandsquadrat des Volumenelements zur Drehachse ( $z_{\text{SP}}$ -Achse) berechnet sich zu  $r^2 = x^2 + y^2$ . Damit ergibt sich das Massenträgheitsmoment bezüglich der  $z_{\text{SP}}$ -Achse zu

$$I_{z_{\text{SP}}} = \rho \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \, dV.$$

Mit oberer und unterer Begrenzungsfläche  $z_o = \frac{h}{2}$ ,  $z_u = -\frac{h}{2}$  sowie den  $x$ - und  $y$ -Grenzen  $y_v = \frac{b}{2}$ ,  $y_h = -\frac{b}{2}$ ,  $x_l = \frac{l}{2}$ ,  $x_r = \frac{l}{2}$  folgt Volumen

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid |z| \leq \frac{h}{2} \wedge |y| \leq \frac{b}{2} \wedge |x| \leq \frac{l}{2} \right\}.$$

Da es sich um einen quaderförmigen Körper handelt, ist ein kartesisches Volumenelement  $dV = dx \, dy \, dz$  sinnvoll. Da die Volumengrenzen voneinander unabhängig sind, ist die Berechnung des Volumenintegrals vergleichsweise einfach:

$$\begin{aligned} I_{z_{\text{SP}}} &= \rho \int_{x=-l/2}^{l/2} \int_{y=-(b/2)}^{b/2} \int_{z=-(h/2)}^{h/2} (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx \\ &= \rho h \int_{x=-l/2}^{l/2} \int_{y=-(b/2)}^{b/2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \\ &= \rho h \int_{x=-l/2}^{l/2} \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-(b/2)}^{b/2} dx = \rho h \int_{x=-l/2}^{l/2} \left( x^2 b + \frac{b^3}{12} \right) dx \\ &= 2 \rho h \left[ \frac{x^3}{3} b + x \frac{b^3}{12} \right]_0^{x=l/2} = \rho h \left( \frac{l^3}{12} b + l \frac{b^3}{12} \right) = \frac{\rho V}{12} (l^2 + b^2) \end{aligned}$$

Oft wird das Massenträgheitsmoment in Abhängigkeit der Körpermasse  $m$  dargestellt, da man damit zu einer kompakteren Form gelangt:

$$I_{z_{\text{SP}}} = \frac{m}{\rho V} \frac{\rho V}{12} (l^2 + b^2) = \frac{m}{12} (l^2 + b^2)$$

Die kinetische Energie des Quaders bei Rotation um den eigenen Schwerpunkt beträgt damit

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{z_{\text{SP}}} = \frac{m \dot{\theta}^2}{24} (l^2 + b^2) .$$

Nun wird die Rotation des Quaders um die  $z_0$ -Achse betrachtet. Damit muss zusätzlich zur Rotation noch die translatorische Bewegung des Schwerpunkts berücksichtigt werden. Dieser bewegt sich auf der in Abb. 5.5 dargestellten Kreisbahn mit Radius  $l/2$  und besitzt so kinetische Energie

$$T_{\text{SP}} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 = \frac{m \dot{\theta}^2}{8} l^2 .$$

Zusammen ergibt sich also bei Rotation um die  $z_0$ -Achse kinetische Energie

$$T = T_{\text{rot}} + T_{\text{SP}} = \frac{m \dot{\theta}^2}{24} (l^2 + b^2) + \frac{m \dot{\theta}^2}{8} l^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \underbrace{\frac{m}{12} (4l^2 + b^2)}_{I_{z_0}} .$$

Daraus kann man für die Drehung um  $z_0$  Massenträgheitsmoment  $I_{z_0}$  ablesen.

Man erkennt, dass man den Anteil  $T_{\text{SP}}$  der kinetischen Energie  $T$  alternativ auch durch einen additiven Zusatz des Massenträgheitsmoments berücksichtigen kann. Diesen Zusatz bezeichnet man als *Steiner-Anteil*, siehe auch Aufgabe 5.2. Mit Abstand  $d$  der Drehachse vom Schwerpunkt berechnet sich der Steiner-Anteil zu  $m d^2$ . Dies liefert im vorliegenden Beispiel:

$$I_{z_0} = I_{z_{\text{SP}}} + \underbrace{m \left( \frac{l}{2} \right)^2}_{\text{Steiner-Anteil}} = \frac{m}{12} (l^2 + b^2) + m \frac{l^2}{4} = \frac{m}{12} (4l^2 + b^2) .$$

Im Kontext der Berechnung der Dynamik von Manipulatoren wird der Steiner-Anteil jedoch nicht verwendet, da dies bei komplizierteren Kinematiken zu aufwendig und damit zu fehleranfällig wäre. ◀

Dreht sich der Körper nur um eine der Koordinatenachsen, so ist das Abstandsquadrat  $r^2$  im Integral des Massenträgheitsmoments einfach aufzustellen:

- Drehung um die  $z$ -Achse (siehe auch Beispiel 5.4):

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies I_z = \rho \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \, dV$$

- Drehung um die  $y$ -Achse:

$$r^2 = x^2 + z^2 \implies I_y = \rho \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) \, dV$$

- Drehung um die  $x$ -Achse:

$$r^2 = y^2 + z^2 \implies I_x = \rho \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \, dV$$

Man spricht dabei von *axialen Massenträgheitsmomenten*. Bei einer Drehung um eine beliebig orientierte Drehachse sind die Abstandskquadrate im Integrand jedoch mathematisch aufwendig, so dass man auf eine andere Darstellungsform der kinetischen Energie übergeht: Mittels Kreuzprodukt und Drehimpuls zeigt man leicht, dass sich die kinetische Energie bei einer Drehbewegung als quadratische Form

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \tilde{I} \boldsymbol{\omega} \quad (5.22)$$

darstellen lässt, siehe zum Beispiel [4, Abschn. V-5-3]. Dabei stellt  $\boldsymbol{\omega}$  den *Drehgeschwindigkeitsvektor* dar. Matrix  $\tilde{I}$  ist symmetrisch und wird als *Tensor der Massenträgheitsmomente* oder kurz als *Trägheitstensor* bezeichnet.

**Anmerkung 5.2.** Allgemein stellt ein Tensor einen koordinatenunabhängigen Rechenoperator dar. Er wird zum Beispiel in der Differenzialgeometrie und theoretischen Physik (insbesondere in der allgemeinen Relativitätstheorie) verwendet, um komplizierte Zusammenhänge durch koordinatenunabhängige Darstellung vergleichsweise einfach und übersichtlich formulieren zu können. Der Nachteil darin besteht in einem hohen Abstraktionsgrad.

Der hier betrachtete Tensor der Massenträgheitsmomente lässt sich als Matrix darstellen, deren Elemente vom jeweils zugrunde liegenden Koordinatensystem abhängen. Genau genommen ist damit  $\tilde{I}$  aus (5.22) eine Matrixdarstellung des Massenträgheitstensors in Schwerpunkt-Koordinaten. Zur Kennzeichnung des zugrunde liegenden Koordinatensystems wird in Abschn. 5.2.2 ein entsprechender Index eingeführt. Damit ist – im vorliegenden Fall – eine Unterscheidung zwischen Matrix und Tensor der Massenträgheitsmomente aus rechentechnischer Sicht nicht notwendig und auch nicht praktikabel. Aus diesem Grund verwendet man anstelle von „koordinatensystemabhängige Matrix-Darstellung eines Massenträgheitstensors“ kurz den Begriff „Massenträgheitstensor“ bzw. noch kürzer „Trägheitstensor“. Besonders interessierte Leser finden weiterführende Literatur zum Beispiel in [4] und [21].  $\square$

Vergleicht man (5.21) mit (5.22), so folgt unmittelbar: Bei einer Drehung um die  $x$ -Achse geht nur das 11-Element von  $\tilde{I}$  in die Berechnung der kinetischen Energie ein:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{I} \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \omega_x^2 I_{11} \implies I_{11} = I_x.$$

Die Diagonalelemente von  $J$  sind daher durch die axialen Trägheitsmomente  $I_x$ ,  $I_y$  und  $I_z$  gegeben. Man nennt die Nichtdiagonalelemente *Deviationsmomente* oder auch *Zentrifugalmomente*. Hier kennzeichnen die Indizes den zugehörigen Integranden:

$$\tilde{I} = \rho \begin{bmatrix} \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \, dV & -\iiint_{(V)} x y \, dV & -\iiint_{(V)} x z \, dV \\ -\iiint_{(V)} x y \, dV & \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) \, dV & -\iiint_{(V)} y z \, dV \\ -\iiint_{(V)} x z \, dV & -\iiint_{(V)} y z \, dV & \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \, dV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}.$$

**Beispiel 5.5.** Fortsetzung von Beispiel 5.3: Da die Drehung um die  $z_{\text{SP}}$ -Achse erfolgt, ist der Drehgeschwindigkeitsvektor durch  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$  gegeben. Damit folgt nach (5.22) die kinetische Energie zu

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \tilde{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_z.$$

Für die restlichen axialen Massenträgheitsmomente ergibt sich  $I_x = \frac{m}{12} (b^2 + h^2)$  und  $I_y = \frac{m}{12} (h^2 + l^2)$ . Deviationsmomente verschwinden hingegen:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} \int_{z=-(h/2)}^{h/2} x y \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} h x y \, dy \, dx = h \int_0^l x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-(b/2)}^{b/2} dx = h \int_{-(l/2)}^{l/2} 0 \, dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xz} &= \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} \int_{z=-(h/2)}^{h/2} x z \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} x \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=-(h/2)}^{h/2} dy \, dx = \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} 0 \, dy \, dx = 0 \\
 I_{yz} &= \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} \int_{z=-(h/2)}^{h/2} y z \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} y \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=-(h/2)}^{h/2} dy \, dx = \int_{-(l/2)}^{l/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} 0 \, dy \, dx = 0
 \end{aligned}$$

Damit folgt Massenträgheitstensor

$$\tilde{I} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 + l^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + l^2 \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

◁

Es lässt sich für jeden Ursprungspunkt eines körperfesten Koordinatensystems immer eine Ausrichtung finden, in der alle Zentrifugalmomente des Trägheitstensors verschwinden, siehe zum Beispiel [4, Abschn. 5-4]. Man bezeichnet ein solches Koordinatensystem als *Hauptachsenkoordinatensystem*, kurz als *Hauptachsensystem*. In diesem Fall nimmt der Trägheitstensor also Diagonalform an. Die Diagonalelemente (axiale Massenträgheitsmomente) werden als *Hauptträgheitsmomente* bezeichnet. Die Methode der *Hauptachsentransformation* liefert mit Hilfe von Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren von  $\tilde{I}$  die Koordinatentransformation auf Hauptachsen, siehe zum Beispiel [20, Abschn. 6.7.2]. für eine übersichtliche mathematische Beschreibung der Hauptachsentransformation.

Da Manipulatorsegmente typischerweise in einem CAD-System konstruiert werden, können Trägheitstensoren in einem körperfesten Koordinatensystem numerisch per FEM-Berechnung ermittelt werden. In frühen Entwicklungsphasen von Manipulatoren stehen solche Daten jedoch nicht zur Verfügung. In diesen Fällen setzt man die Manipulatorsegmente näherungsweise durch Standardkörper zusammen. Für diese Standardkörper existieren Tabellen der Trägheitstensoren in Hauptachsen, siehe zum Beispiel [1, 5. Abschnitt Mechanik, Tafel 3a] für eine umfangreiche Tabelle.

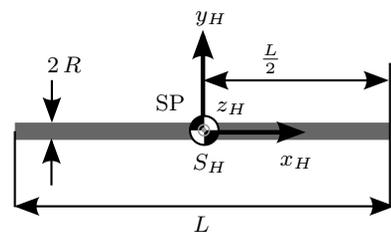
**Anmerkung 5.3.** zur Auswuchtung bzw. Unwucht eines Körpers. Liegt der Ursprung des Hauptachsensystems des Trägheitstensors im Schwerpunkt, so bedeutet dies praktisch: Dreht man um eine Koordinatenachse mit konstanter Drehgeschwindigkeit, so treten in der Lagerung der zugehörigen Drehachse keine Lagerkräfte und -momente auf. Damit liegt keine *Unwucht* vor, bzw. der Körper ist bezogen auf die Drehachse *ausgewuchtet*<sup>10</sup>, siehe zum Beispiel [8, Abschn. 2.9.5]. □

**Anmerkung 5.4.** zur Lage der Hauptachsen, wobei immer eine homogene Massenverteilung angenommen wird:

- Bei symmetrischen Körpern ergeben sich Hauptachsen aus den Schnittgeraden der Symmetrieebenen.
- Bei rotationssymmetrischen Körpern ergeben sich Hauptachsen aus der Rotationsachse sowie zwei dazu senkrechte Achsen, [6, Abschn. 3.4.2]. □

**Beispiel 5.6.** Hauptträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunkts eines Stabs sowie eines sogenannten langen dünnen Stabs: Es wird ein Stab mit Radius  $R$ , Länge  $L$ , Dichte  $\rho$  und homogener Massenverteilung betrachtet, siehe Abb. 5.6. Gesucht ist der Trägheitstensor im Schwerpunkt in Hauptachsen. Da es sich um einen rotationssymmetrischen Körper handelt, ergeben sich die Hauptachsen aus der Rotationsachse des Stabs und beiden dazu senkrecht stehenden Achsen durch den Schwerpunkt. Dieser Körpertyp wird später in Beispiel 5.8 als Manipulatorsegment verwendet. Die nach Abb. 5.6 gewählte Orientierung des Hauptachsensystems  $S_H$  reduziert den Berechnungsaufwand der Dynamik für den 2-DoF Ellenbogen-Manipulator, da damit  $S_H$  und das jeweilige körpereigene Koordinatensystem gleich orientiert sind.

**Abb. 5.6** Hauptachsensystem eines Stabs bezüglich seines Schwerpunkts



<sup>10</sup> Man unterscheidet *dynamische* und *statische Auswuchtung*. Im ersten Fall muss das Hauptachsensystem nicht im Schwerpunkt liegen. Im Lager treten keine Reaktionsmomente auf, jedoch entstehen durch die Schwerpunktbewegung im Lager Reaktionskräfte. Diese verschwinden, wenn das Hauptachsensystem im Schwerpunkt liegt. In diesem Fall ist der Körper auch statisch ausgewuchtet.

Das Hauptträgheitsmoment bei Rotation um die  $x_H$ -Achse berechnet man am einfachsten in Zylinder-Koordinaten mit Volumenelement  $dV = dA dz = r dr d\varphi dz$  und Integrand  $r^2$ , siehe Abb. 5.7. Damit folgt

$$\begin{aligned} I_{x_H} &= \rho \int_{z=-(L/2)}^{L/2} \left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^R r^2 r dr \right) d\varphi \right) dz \\ &= \rho \int_{z=-(L/2)}^{L/2} \left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi \right) dz = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi L \end{aligned}$$

Mit homogener Dichte  $\rho = m/V = m/(\pi R^2 L)$  ergibt sich schließlich

$$I_{x_H} = \frac{m}{\pi R^2 L} \frac{R^4}{4} 2\pi L = \frac{m R^2}{2}.$$

Zur Berechnung des Hauptträgheitsmoments bei Rotation um die  $y_H$ -Achse eignen sich kartesische Koordinaten mit Integrationsbereich

$$\mathcal{B} = \left\{ (x, y, z) \mid |y| \leq \sqrt{R^2 - z^2} \wedge |z| \leq R \wedge |x| \leq \frac{L}{2} \right\}.$$

Damit folgt unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned} I_{y_H} &= 8\rho \int_{z=0}^R \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{x=0}^{L/2} (x^2 + z^2) dx dy dz \\ &= 8\rho \int_{z=0}^R \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{L}{24} (L^2 + 12z^2) dy dz \\ &= \frac{\rho L}{3} \int_{z=0}^R (L^2 + 12z^2) \sqrt{R^2 - z^2} dz. \end{aligned}$$

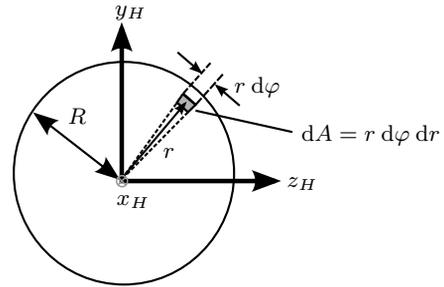
Dieses letzte Integral ist kein Standardintegral. Mittels Integraltabellen (zum Beispiel [5, S. 163, Integral-Nr. 147 und Nr. 149]) oder einem Formelmanipulationsprogramm erhält man

$$I_{y_H} = \rho \frac{\pi L R^2 (L^2 + 3R^2)}{12}.$$

Mit dem Ausdruck der Dichte  $\rho$  von oben folgt schließlich

$$I_{y_H} = \frac{m}{\pi R^2 L} \frac{\pi L R^2 (L^2 + 3R^2)}{12} = \frac{m}{12} (L^2 + 3R^2).$$

**Abb. 5.7** Skizze zur Berechnung von  $I_x$  mit Zylinderkoordinaten. Das Flächenelement ist durch  $dA = r \, d\varphi \, dr$  gegeben



Für einen langen dünnen Stab nimmt man Näherung  $L \gg R$  an, so dass

$$I_{y_H} \approx \frac{m L^2}{12}.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich weiter  $I_{y_H} = I_{z_H}$  und damit im Hauptachsensystem näherungsweise

$$\tilde{I} = \frac{m}{12} \text{Diag} (6 R^2, L^2 + 3 R^2, L^2 + 3 R^2) \approx \frac{m}{12} \text{Diag} (6 R^2, L^2, L^2). \quad \triangleleft$$

In frühen Entwicklungsphasen von Manipulatoren existieren noch keine Konstruktionen der mechanischen Komponenten. Um trotzdem dynamische Simulationen durchführen zu können, werden einfache geometrische Formen angenommen, wie beispielsweise dünnwandige Hohlzylinder, lange dünne Stäbe oder Hohlquader für Gelenkverbinder und Kugeln für Gelenke. Zugehörige Trägheitstensoren solcher Standardkörper können aus Tabellen entnommen werden. Existieren hingegen CAD-Konstruktionen der Manipulatorsegmente, so können die zugehörigen Trägheitstensoren vom CAD-System mittels FEM automatisiert berechnet werden.

## 5.2.2 Kinetische Energie des Manipulators

Zur Berechnung der Bewegungsgleichungen eines Manipulators mit dem Lagrange-Formalismus wird unter anderem die gesamte kinetische Energie benötigt. Diese ergibt sich aus der kinetischen Energie der  $n$  einzelnen Manipulatorsegmente zu

$$T = \sum_{i=1}^n T_i.$$

Die in (5.19) dargestellte Trennung der kinetischen Energie eines Körpers in seine kinetische Energie der Rotationsbewegung um den Schwerpunkt sowie der Schwerpunktbewegung selbst liefert

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^{0T} \mathbf{v}_i^0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^{0T} \tilde{I}_i^0 \boldsymbol{\omega}_i^0 \quad (5.24)$$

mit

- $\mathbf{v}_i^0$  als Vektor der Schwerpunktschwindigkeit von Körper  $i$ , dargestellt in Weltkoordinaten,
- $\boldsymbol{\omega}_i^0$  als Drehgeschwindigkeitsvektor der Rotationsbewegung von Körper  $i$ , dargestellt und gemessen in Weltkoordinaten und
- $\tilde{I}_i^0$  als Trägheitstensor von Körper  $i$  im körpereigenen Schwerpunkt mit Bezugskoordinatensystem  $S_0$ , siehe hierzu auch die folgenden Definitionen und Notationen.

**Definitionen und Notation** Bislang wurde nur die kinetische Energie einzelner Körper betrachtet. Dabei wurde Trägheitstensor  $\tilde{I}$  stets in einem Koordinatensystem berechnet, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Körpers lag und dessen Orientierung mit dem Weltkoordinatensystem übereinstimmte. Um diese Zuordnung von Ursprung und Orientierung flexibel zu halten, werden Definitionen eingeführt:

*Trägheitstensor* Der Trägheitstensor eines Körpers hängt vom Koordinatensystem ab, in dem die Volumenintegrale durchgeführt sind. Dieses Koordinatensystem wird für den Trägheitstensor als *Bezugskoordinatensystem* bezeichnet.

Zur Spezifikation des Bezugskoordinatensystems gibt man seinen Ursprung getrennt von seiner Orientierung an. Dies liegt daran, dass die Orientierung oft mit einem Koordinatensystem übereinstimmen soll, das außerhalb des Körpers liegt, während der Ursprung im Schwerpunkt liegen soll.

Im gesamten Rest des vorliegenden Kapitels soll der Ursprung des Bezugskoordinatensystems stets im Schwerpunkt des zugehörigen Körpers liegen. Damit kennzeichnet bei  $\tilde{I}_i^v$  der tiefgestellte Index  $i$ , dass es sich um einen Trägheitstensor für Körper  $i$  handelt, mit Ursprung des Bezugskoordinatensystems im zugehörigen Schwerpunkt.

Der hochgestellte Index  $v$  kennzeichnet, dass die Orientierung des Bezugskoordinatensystems mit  $S_v$  übereinstimmen soll. Spricht man vom *Bezugskoordinatensystem des Trägheitstensors*, ist also nur die Orientierung des Bezugskoordinatensystems gemeint, nicht dessen Ursprung. Darin besteht eine gewisse Verwechslungsgefahr.

Als Kurzform für *Trägheitstensor mit  $S_v$  als Bezugskoordinatensystem* verwendet man synonym auch *Trägheitstensor in  $S_v$ -Koordinaten*.

Im vorliegenden Fall von  $\tilde{I}_i^0$  soll damit die Orientierung des Bezugskoordinatensystems mit der Orientierung des Weltkoordinatensystems übereinstimmen. Die

Kurzform dafür wäre:  $\tilde{I}_i^0$  liegt in  $S_0$ -Koordinaten vor. Der Ursprung des Bezugskoordinatensystems soll – wie immer – im Schwerpunkt des zugehörigen Körpers  $i$  liegen.

*Messkoordinatensystem einer Geschwindigkeit* Das Bezugskoordinatensystem der Geschwindigkeit wird hier als *Messkoordinatensystem* definiert. So sind beispielsweise  $v_i^0$  und  $\omega_i^0$  in Weltkoordinaten gemessen und dargestellt.

Zur Umrechnung des Bezugskoordinatensystems von Trägheitstensen wird bei Drehgeschwindigkeitsvektoren eine Unterscheidung zwischen Messkoordinatensystem und darstellendem Koordinatensystem durchgeführt. Dies ist etwas gewöhnungsbedürftig, da bislang Geschwindigkeiten im selben Koordinatensystem gemessen und dargestellt wurden.

Ein zusätzlicher tiefgestellter Index vor der Körperbezeichnung soll im Folgenden das zugrunde liegende Messkoordinatensystem ausweisen. Dieses Konzept wurde bereits in Abschn. 4.2.1 in (4.1) zur Kennzeichnung der Relativgeschwindigkeit  $v_{AB}$  von Punkt B bezogen auf Punkt A verwendet. So bezeichnet beispielsweise  $\omega_{ui}^v$  Drehgeschwindigkeitsvektor von Körper  $i$ , gemessen in  $S_u$ -Koordinaten (Relativedrehgeschwindigkeit von Körper  $i$  bezogen auf  $S_u$ ), dargestellt in  $S_v$ -Koordinaten.

Da die Geschwindigkeit eines Körpers vom Messkoordinatensystem abhängt, gilt dies auch für die damit berechnete kinetische Energie. Daher wird, analog zur Drehgeschwindigkeit, auch für die kinetische Energie das zugrunde liegende Messkoordinatensystem im tiefgestellten Index gekennzeichnet. Beispielsweise bezeichnet  $T_{ui}$  die kinetische Energie von Körper  $i$ , gemessen in  $S_u$ -Koordinaten. Bei fehlender Angabe des Messkoordinatensystems beim Drehgeschwindigkeitsvektor oder kinetischer Energie soll stets das Weltkoordinatensystem als Messkoordinatensystem gelten.

*Index-Übereinstimmungsregeln* Allgemein kennzeichnet der hochgestellte Index bei einem Trägheitstensor das Bezugskoordinatensystem, also das Koordinatensystem, in dem die einzelnen Elemente des Trägheitstensors berechnet wurden. Folglich muss in quadratischer Form (5.22) der Drehgeschwindigkeitsvektor immer im selben Koordinatensystem wie der Trägheitstensor dargestellt werden, das heißt hochgestellte Indizes von Trägheitstensor und Drehgeschwindigkeitsvektoren müssen immer gleich sein.

Das Bezugskoordinatensystem von kinetischer Energie und darin auftauchenden Drehgeschwindigkeitsvektoren muss ebenfalls übereinstimmen.

**Umrechnung des Bezugskoordinatensystems eines Trägheitstensors** Der Massenträgheitstensor eines Manipulatorsegments wird nie wie in (5.24) dargestellt, in Weltko-

ordinaten, sondern stets in einem körperfesten Koordinatensystem  $S_i$  angegeben. Damit wird der Vorteil genutzt, dass in körperfesten Koordinaten der Massenträgheitstensor konstant ist. In Weltkoordinaten ist der Massenträgheitstensor hingegen in der Regel in einer komplexen Weise von Gelenkvariablen abhängig, wie folgendes Beispiel 5.7 demonstriert.

**Beispiel 5.7.** Abhängigkeit des Massenträgheitsmoments von Gelenkvariablen:

Abb. 5.8 (links) zeigt einen zweiachsigen planaren Manipulator in ausgestreckter Position, das heißt  $\theta_2 = 0$ . Das rechte Teilbild zeigt die nahezu vollständig eingefaltete Position, das heißt  $\theta_2 \approx \pi$ .

Nun stelle man sich vor, dass das zweite Gelenk unbeweglich wäre, das heißt  $\theta_2$  soll konstant sein. Nun soll sich das erste Gelenk mit einer bestimmten Geschwindigkeit drehen. Die Massenverteilung und damit das Massenträgheitsmoment hinsichtlich der ersten Achse bleibt damit für alle Gelenkwinkel  $\theta_1$  immer konstant.

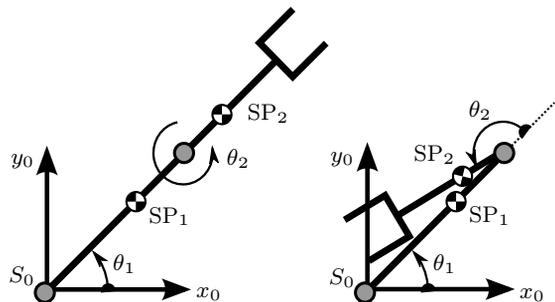
In der links dargestellten ausgestreckten Position ist die Masse deutlich weiter entfernt von der Drehachse als in der rechts dargestellten eingefalteten Position. Das Massenträgheitsmoment variiert also mit Gelenkwinkel  $\theta_2$ : Für  $\theta_2 = 0$  ist es maximal, für  $\theta_2 = \pi$  minimal.  $\triangleleft$

Verwendet man als körperfestes Bezugskordinatensystem ein Hauptachsensystem, so liegt der Trägheitstensor in der besonders einfachen Diagonalform vor. In (5.24) werden jedoch Trägheitstensoren in Weltkoordinaten benötigt, so dass eine entsprechende Umrechnung vom jeweiligen Hauptachsensystem in das Weltkoordinatensystem erforderlich ist. Hierfür wird zunächst die Umrechnung eines Trägheitstensors zwischen zwei allgemein gehaltenen Bezugskordinatensystemen  $S_u$  und  $S_v$  hergeleitet:

Mit oben eingeführter erweiterter Notation für das Messkoordinatensystem folgt die in  $S_u$  gemessene kinetische Energie eines Körpers  $i$  bei Rotation um den eigenen Schwerpunkt zu

$$T_{ui} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{ui}^u T \tilde{I}_i^u \boldsymbol{\omega}_{ui}^u \cdot T_{ui} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{ui}^u T \tilde{I}_i^u \boldsymbol{\omega}_{ui}^u \cdot \quad (5.25)$$

**Abb. 5.8** Abhängigkeit des Massenträgheitsmoments von der Gelenkposition in Beispiel 5.7



Die Kinematik liefert Transformationsvorschrift

$$\omega_{ui}^v = \tilde{R}_{vu} \omega_{ui}^u \implies \omega_{ui}^u = \tilde{R}_{vu}^T \omega_{ui}^v.$$

Damit kann der sowohl in  $S_u$  gemessene, als auch dort dargestellte Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_{ui}^u$  von Körper  $i$  in  $S_v$ -Koordinaten dargestellt werden. Dies ermöglicht die Darstellung der in  $S_u$  gemessenen kinetische Energie von Körper  $i$  mit in  $S_v$ -Koordinaten dargestelltem Drehgeschwindigkeitsvektor gemäß

$$T_{ui} = \frac{1}{2} (\tilde{R}_{vu}^T \omega_{ui}^v)^T \tilde{I}_i^u \tilde{R}_{vu}^T \omega_{ui}^v = \frac{1}{2} \omega_{ui}^v{}^T \tilde{R}_{vu} \tilde{I}_i^u \tilde{R}_{vu}^T \omega_{ui}^v.$$

Da der Trägheitstensor im Energieterm stets als quadratische Form (5.22) auftritt, folgt daraus die Transformationsvorschrift von Trägheitstensor  $\tilde{I}_i$  vom  $S_u$ - zum  $S_v$ -Bezugssystem gemäß

$$\tilde{I}_i^v = \tilde{R}_{vu} \tilde{I}_i^u \tilde{R}_{vu}^T. \quad (5.26)$$

Als Anwendung wird nun der Fall betrachtet, dass von Körper  $i$  mit  $\tilde{I}_i^{H_i}$  der Trägheitstensor mit Hauptachsensystem  $S_{H_i}$  gegeben ist. Die Orientierung von  $S_{H_i}$  bezogen auf das körpereigene Koordinatensystem  $S_i$  soll mit  $\tilde{R}_{i H_i}$  gegeben sein. In (5.26) eingesetzt, folgt Trägheitstensor von Körpers  $i$  in körpereigenen Koordinaten zu

$$\tilde{I}_i^i = \tilde{R}_{i H_i} \tilde{I}_i^{H_i} \tilde{R}_{i H_i}^T.$$

Wiederholt man diese Transformation mit  $\tilde{R}_{0i}$ , so ergibt sich schließlich der in (5.24) benötigte Trägheitstensor von Körper  $i$  in Weltkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i^0 &= \tilde{R}_{0i} \tilde{I}_i^i \tilde{R}_{0i}^T = \tilde{R}_{0i} \tilde{R}_{i H_i} \tilde{I}_i^{H_i} \tilde{R}_{i H_i}^T \tilde{R}_{0i}^T \\ &= \tilde{R}_{0i} \tilde{R}_{i H_i} \tilde{I}_i^{H_i} (\tilde{R}_{0i} \tilde{R}_{i H_i})^T. \end{aligned} \quad (5.27)$$

**Geschwindigkeiten in Weltkoordinaten** Neben  $\tilde{I}_i^0$  wird in (5.24) auch Schwerpunktschwindigkeit  $v_i^0$  von Manipulatorsegment  $i$  sowie dessen Drehgeschwindigkeit  $\omega_i^0$  benötigt. Beide Geschwindigkeitsanteile sind dabei im Weltkoordinatensystem gemessen und dargestellt. Position und Geschwindigkeit der Gelenke sind bekannt. Daher können die gesuchten Geschwindigkeiten, analog zu (4.8), durch Jacobi-Matrizen gemäß

$$\begin{aligned} v_i^0 &= \tilde{J}_{v_{SP},i} \dot{q}_i \\ \omega_i^0 &= \tilde{J}_{\omega_{SP},i} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (5.28)$$

dargestellt werden, wobei  $q_i = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_i)^T$  nur die ersten  $i$  Gelenkvariablen enthält, und

$$\tilde{J}_{v_{SP},i} = \begin{bmatrix} J_{v_{SP},1} & J_{v_{SP},2} & \dots & J_{v_{SP},i} \end{bmatrix} \quad (5.29a)$$

$$\tilde{J}_{\omega_{SP},i} = \begin{bmatrix} J_{\omega_{SP},1} & J_{\omega_{SP},2} & \dots & J_{\omega_{SP},i} \end{bmatrix}. \quad (5.29b)$$

Die enthaltenen Spaltenvektoren ergeben sich mit Schwerpunktposition  $\mathbf{c}_i^0$  nach (5.34) zu

$$\mathbf{J}_{v_{\text{SP}},k} = \begin{cases} \left( \tilde{\mathbf{R}}_{0(k-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{c}_i^0 - \mathbf{t}_{k-1}^0) & \text{für } \xi_k = 1 \text{ (Drehgelenk)} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{0(k-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \xi_k = 0 \text{ (Translationsgelenk)} \end{cases} \quad (5.29c)$$

$$\mathbf{J}_{\omega_{\text{SP}},k} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_{0(k-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \xi_k = 1 \text{ (Drehgelenk)} \\ \mathbf{0} & \text{für } \xi_k = 0 \text{ (Translationsgelenk)} \end{cases} \quad (5.29d)$$

Indexbereich  $k \in \{1, 2, \dots, i\}$ .

Da die Drehgeschwindigkeit eines starren Körpers in jedem Punkt gleich ist, kann zur Berechnung von  $\mathbf{J}_{\omega_{\text{SP}},k}$  Vorschrift (4.9b) aus Abschn. 4.2.3 angewendet werden. Auch die Berechnung von  $\mathbf{J}_{v_{\text{SP}},k}$  erfolgt analog zu (4.9a), jedoch muss hier im Falle eines Drehgelenks Radiusvektor  $\mathbf{c}_i^0$  zum Schwerpunkt eingesetzt werden.

Hinweise:

- Alle in (5.29c) und (5.29d) enthaltenen Größen können nur von den ersten  $i$  Gelenkvariablen  $\mathbf{q}_i$  abhängen. Da nach (5.28) auch die Schwerpunktgeschwindigkeiten nur von den ersten  $i$  Gelenkvariablen-geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}_i$  abhängen, folgt

$$(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mapsto \mathbf{v}_i^0. \quad (5.30)$$

- Man kann Translationsgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}_{v_{\text{SP}},k}$  auch alternativ zu (5.29c) durch Berechnung der Jacobi-Matrix mit Ableitung nach der Schwerpunktposition  $\mathbf{c}_i^0$  bilden:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{v_{\text{SP}},i} = \frac{d\mathbf{c}_i^0}{d\mathbf{q}_i}, \quad (5.31)$$

siehe auch die allgemeine Definition der Jacobi-Matrix in (5.46a). Verglichen mit (5.29c) ist der analytische Berechnungsaufwand jedoch höher. Dafür reduziert sich die Zahl potentieller Fehlerquellen. In den meisten Fällen wird die analytische Berechnung mit einem Formelmanipulationsprogramm durchgeführt. Der analytische Berechnungsaufwand spielt dann nur noch eine untergeordnete Rolle, so dass (5.31) oft (5.29c) vorgezogen wird.

**Kinetische Energie als Funktion der Gelenkvariablen und Massenmatrix** Mit (5.28) ergibt sich aus (5.24) die kinetische Energie von Manipulatorsegment  $i$  zu

$$\begin{aligned} T_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) &= \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}_i^T \tilde{\mathbf{J}}_{v_{\text{SP}},i}^T \tilde{\mathbf{J}}_{v_{\text{SP}},i} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \tilde{\mathbf{J}}_{\omega_{\text{SP}},i}^T \tilde{\mathbf{I}}_i^0 \tilde{\mathbf{J}}_{\omega_{\text{SP}},i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \underbrace{(m_i \tilde{\mathbf{J}}_{v_{\text{SP}},i}^T \tilde{\mathbf{J}}_{v_{\text{SP}},i} + \tilde{\mathbf{J}}_{\omega_{\text{SP}},i}^T \tilde{\mathbf{I}}_i^0 \tilde{\mathbf{J}}_{\omega_{\text{SP}},i})}_{\tilde{\mathbf{M}}_i(\mathbf{q}_i)} \dot{\mathbf{q}}_i. \end{aligned}$$

Die in  $\tilde{M}_i$  enthaltenen Matrixprodukte  $\tilde{J}_{v_{sp},i}^T \tilde{J}_{v_{sp},i}$  und  $\tilde{J}_{\omega_{sp},i}^T \tilde{I}_i^0 \tilde{J}_{\omega_{sp},i}$  sind quadratisch und symmetrisch. Die dadurch definierte, in  $\dot{\mathbf{q}}_i$  quadratische Funktion  $T_i$  bezeichnet man als quadratische Form, die zugehörige Matrix  $\tilde{M}_i$  als erzeugende Matrix bzw. kurz als Erzeugende.

Da die Summe quadratischer Formen mit symmetrischen Erzeugenden selbst wieder eine quadratische Form mit einer symmetrischen Erzeugenden ist, lässt sich die gesamte kinetische Energie gemäß

$$\begin{aligned} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_1^T \tilde{M}_1(q_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2^T \tilde{M}_2(q_2) \dot{\mathbf{q}}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{q}}_n^T \tilde{M}_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_n) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

mit einer symmetrischen Erzeugenden  $\tilde{M}(\mathbf{q})$  darstellen. Sie wird *Massenmatrix* genannt und ist von zentraler Bedeutung für Dynamik, Simulation und Regelung von Manipulatoren.

Bei einer Modellbildung der Kinematik nach der DH-Konvention ist die Massenmatrix stets *positiv definit*<sup>11</sup> ( $\tilde{M} > 0$ ). Daraus folgt, dass  $\text{Det}(\tilde{M}) > 0$ , so dass Matrixinverse  $\tilde{M}^{-1}$  stets existiert. (Siehe folgende Anmerkung für eine Begründung.)

**Anmerkung 5.5.** zur Definitheit der Massenmatrix  $\tilde{M}$ :

Da  $T_i$  eine kinetische Energie darstellt, liegt aus physikalischen Gründen die folgende (nicht haltbare) Annahme nahe:

$$T_i \begin{cases} = 0 & \text{für } \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine solche Funktion bezeichnet man als *positiv definit*. Die zugrundeliegende quadratische Form wird durch Matrix  $\tilde{M}_i$  erzeugt, so dass man die Eigenschaft der Definitheit von der Funktion auf die Erzeugende  $\tilde{M}_i$  überträgt. Für positive Definitheit schreibt man kurz  $\tilde{M}_i > 0$ ; nach dem Hurwitzkriterium ist dafür  $\text{Det}(\tilde{M}_i) > 0$  notwendig<sup>12</sup>.

Bedingt durch die beschreibende Kinematik können die beiden Sonderfälle  $\text{Det}(\tilde{J}_{v_{sp},i}^T \tilde{J}_{v_{sp},i}) = 0$  und  $\text{Det}(\tilde{J}_{\omega_{sp},i}^T \tilde{I}_i^0 \tilde{J}_{\omega_{sp},i}) = 0$  eintreten. Man bezeichnet diese Fälle als *Singularität* bezogen auf den Schwerpunkt von Segment  $i$ , vergleiche auch Singularitätsbedingung (4.18) sowie Abschn. 4.2.6 zu Singularitäten. Auf einer solchen Singularität kann Segment  $i$  im Stillstand verweilen, obwohl sich die Gelenke bewegen, das heißt  $T_i = 0$  für  $\dot{\mathbf{q}}_i \neq \mathbf{0}$  ist möglich. Dies widerspricht obiger

<sup>11</sup> Siehe auch Abschn. 8.4.4.1 für Definitheit.

<sup>12</sup> Siehe Abschn. 8.4.4.1 für eine etwas ausführlichere Behandlung der quadratischen Form und des Hurwitzkriteriums.

Annahme positiver Definitheit von  $T_i$  bzw.  $\tilde{M}_i$ ; tatsächlich ist  $\tilde{M}_i$  positiv semidefinit ( $\tilde{M}_i \geq 0$ ).

Ein anschauliches Beispiel für eine solche Singularität ist der Fall, bei dem zwei Drehachsen im Raum aufeinander fallen. Drehen sich die Achsen mit entgegengesetzter Drehrichtung und gleichem Geschwindigkeitsbetrag, so führt das hintere Segment keine Bewegung aus.

Falls ein Segment durch zum Beispiel drei Drehachsen (wie bei der Euler-Drehung) angebunden ist, kann auch die gesamte kinetische Energiefunktion  $T$  positiv semidefinit ausfallen. Bei einer Modellbildung der Kinematik nach der DH-Konvention ist jedoch jedes Segment durch genau eine Bewegungsachse angebunden. Daher muss sich für  $\dot{q}_i \neq \mathbf{0}$  auch auf einer Singularität mindestens ein Segment bewegen, so dass in diesem Fall die Massenmatrix positiv definit ist.  $\square$

### 5.3 Potentielle Energie

Die potentielle Energie bzw. Lageenergie der Manipulatorsegmente hängt prinzipiell vom Bezugspunkt bzw. vom Nullniveau ab, bei dem die potentielle Energie Null sein soll. Dieser Bezugspunkt kann bei den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen willkürlich gewählt werden, da die potentielle Energie nur als Gradient (5.13) eingeht. Hier wird als zweckmäßiger Bezugspunkt Ursprung  $S_0$  des Weltkoordinatensystems gewählt.

Analog zur kinetischen Energie wird die potentielle Energie des Manipulators aus der Summe der potentiellen Energien aller  $n$  Manipulatorsegmente gebildet:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i .$$

Mit gerichteter Höhe  $h_i$  des Schwerpunkts von Manipulatorsegment  $i$  sowie dessen Masse  $m_i$  und Erdbeschleunigung  $g_0 > 0$  ergibt sich potentielle Energie

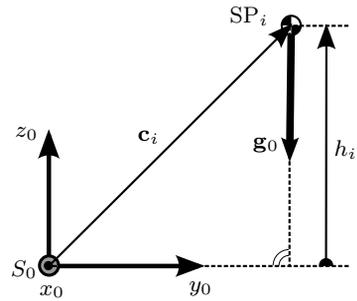
$$V_i = h_i g_0 m_i .$$

Das positive Vorzeichen berücksichtigt dabei die in Abschn. 5.1.2 getroffene Vereinbarung, dass  $V_i > 0$  gelten soll, wenn sich die potentielle Energie gegenüber dem Bezugspunkt erhöht.

Die gesuchte gerichtete Höhe  $h_i$  stellt den entgegen der Richtung des Erdbeschleunigungsvektors  $\mathbf{g}_0$  weisenden Anteil der senkrechten Zerlegung von  $\mathbf{c}_i$  dar, siehe Abb. 5.9. Dies liefert Skalarprodukt

$$V_i = -\mathbf{g}_0^T \mathbf{c}_i^0 m_i . \quad (5.33)$$

**Abb. 5.9** Definition der Schwerpunkthöhe in Weltkoordinaten



Dabei muss auf eine korrekte Darstellung von  $\mathbf{g}_0$  in  $S_0$  geachtet werden. Im Beispiel von Abb. 5.9 ist dies  $\mathbf{g}_0 = (0 \ 0 \ -g_0)^T$ , im Beispiel 5.8 hingegen  $\mathbf{g}_0 = (0 \ -g_0 \ 0)^T$ .

Mit allgemeiner Schwerpunktposition  $\mathbf{c}_i^0$  ergibt sich für das Beispiel aus Abb. 5.9 die bekannte Formel für potentielle Energie im Gravitationsfeld zu

$$V_i = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{ix} \\ c_{iy} \\ c_{iz} \end{pmatrix} m = m g_0 c_{iz}.$$

Dabei ist Schwerpunkthöhe  $h_i$  durch  $c_{iz}$  gegeben.

Die Schwerpunktposition von Körper  $i$  wird in körpereigenen Koordinaten mit  $\mathbf{c}_i^i$  angegeben. Die Umrechnung auf die benötigten Weltkoordinaten erfolgt mittels Kinematik gemäß

$$\mathbf{c}_i^0 = \tilde{T}_{0i} \mathbf{c}_i^i. \quad (5.34)$$

Da Schwerpunktposition  $\mathbf{c}_i^0$  nur von den ersten  $i$  Gelenkvariablen  $\mathbf{q}_i$  abhängen kann, gilt analog zu (5.30) für die potentielle Energie von Manipulatorsegment  $i$

$$\mathbf{q}_i \mapsto V_i. \quad (5.35)$$

Die gesamte potentielle Energie aller Manipulatorsegmente folgt mit (5.33) schließlich zu

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}) &= V_1(q_1) + V_2(q_2) + \dots + V_n(\mathbf{q}) \\ &= -\mathbf{g}_0^T (\mathbf{c}_1^0(q_1) m_1 + \mathbf{c}_2^0(q_2) m_2 + \dots + \mathbf{c}_n^0(\mathbf{q}) m_n). \end{aligned} \quad (5.36)$$

## 5.4 Nichtkonservative Kräfte und Momente

Nichtkonservative Kräfte  $\mathbf{Q}_{i,\text{nk}}$  wurden bereits im Abschn. 5.1.2 als spezielle generalisierte Kräfte (5.9) auf eine Punktmasse  $i$  eingeführt. Dieses Konzept lässt sich von punktförmigen Massen auf ausgedehnte Körper übertragen. Die generalisierte Kraft wird dann um generalisierte Momente erweitert. Man spricht abkürzend aber weiterhin von *generalisierter Kraft*.

Nach (5.9) verursachen nichtkonservative Kräfte und Momente bei einer virtuellen Verrückung  $d\mathbf{q}$  der generalisierten Koordinaten eine virtuelle Arbeit  $dW_e$  gemäß

$$dW_{e,\text{nk}} = \mathbf{Q}_{\text{nk}}^T d\mathbf{q} \quad (5.37)$$

mit Vorzeichenkonvention

$dW_{e,\text{nk}} > 0$ : Energie wird dem Manipulator von extern **z**ugeführt;

$dW_{e,\text{nk}} < 0$ : Energie wird vom Manipulator nach extern **a**bgeführt.

Hier steht Index  $e$  für *extern* und nk für *nicht-konservativ*. Typisch dafür sind Kräfte und Momente aus Reibung oder Dämpfung. Diese leisten Arbeit, die an das Inertialsystem in Form von Wärme dissipiert wird, dem System *Manipulator* also verlorengelht. Nicht-konservative Kräfte und Momente können aber auch von extern – also dem Weltsystem – zugeführt werden. Beispiele dafür sind Gelenkantriebe oder am Endeffektor von extern antreibende Kräfte und Momente.

Um nichtkonservative Kräfte und Momente zu identifizieren, stellt man die virtuelle Arbeit auf, die sie bei einer virtuellen Verrückung leisten. Im Vergleich mit (5.37) erhält man dann  $\mathbf{Q}_{\text{nk}}$ <sup>13</sup>.

### 5.4.1 Gelenkantriebe

In Analogie zum verallgemeinerten Kraftvektor (externe Kräfte und Momente, die auf den Endeffektor wirken) wurde in Abschn. 4.3.1 der *verallgemeinerte Gelenkmomentenvektor*  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  eingeführt. Dieser beinhaltet die Antriebskräfte und -momente der  $n$  Gelenke. Handelt es sich bei Gelenk  $i$  um ein Drehgelenk, so ist die entsprechende Komponente von  $\boldsymbol{\tau}$  ein Drehmoment. Bei Linearachsen handelt es sich hingegen um eine Vorschubkraft. Als vereinfachte Schreibweise wird für beide Antriebsarten dasselbe Symbol  $\tau_i$  verwendet.

Damit ergibt sich die von den Gelenkantrieben bei virtueller Verrückung  $d\mathbf{q}$  geleistete virtuelle Arbeit zu

$$dW_{\text{antrieb}} = \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q} .$$

<sup>13</sup> Dieses Vorgehen wurde aus [23, Abschn. 6-3] entnommen.

Ein Vergleich mit (5.37) liefert  $Q_{nk,a} = \tau$ , so dass Antriebskräfte und -momente durch nichtkonservative Antriebskräfte und -momente berücksichtigt werden können.

### 5.4.2 Gelenkreibung

Bei einem Gelenk (inklusive Antriebsachse) modelliert man in der Regel folgende drei Reibungsarten:

- Haftreibung
- Gleitreibung
- viskose Reibung

Reibungskräfte wirken stets der Bewegungsrichtung entgegen. Für eine Bewegung mit Geschwindigkeit  $\dot{q}$  müssen sie also vom Antrieb „überwunden“ werden. Daher werden sie im Folgenden für positive Geschwindigkeiten positiv gezählt, für negative Geschwindigkeiten negativ (Zählrichtung: in Geschwindigkeitsrichtung positiv).

*Haftreibung* entsteht durch molekulare Oberflächenverschmelzungen, wenn glatte Flächen längere Zeit aufeinander zu liegen kommen. Dabei hängt Haftreibung stark davon ab, welches Medium an der Kontaktfläche die Oberflächen der reibenden Körper umgeben. Beispielsweise ist im Vakuum kein solches Medium gegeben, so dass glatte Flächen relativ schnell miteinander verschmelzen. Die auftretende Haftreibung ist dann so stark, dass man sogar vom *Verschweißen* der Flächen spricht. Ein weiterer einflussreicher Faktor für die Größe der Haftreibung ist die Verweildauer der Flächen aufeinander, das heißt Haftreibung hat eine „Historie“. Aus diesem Grund ist eine zuverlässige Modellbildung von Haftreibung aufwendig. Man behilft sich in der Robotik mit dem einfachen Modell

$$F_h = \begin{cases} \mu_h F_\perp & \text{für rechtsseitige Annäherung an Null: } \dot{q} = 0 + 0 \\ -\mu_h F_\perp & \text{für linksseitige Annäherung an Null: } \dot{q} = 0 - 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

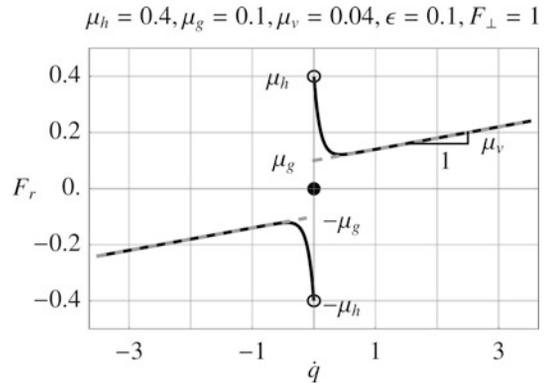
mit  $\mu_h$  als *Haftreibungszahl* und  $F_\perp$  als Anpress- bzw. Normalkraft.

*Gleitreibung* hängt von der Rauigkeit der Oberflächen und deren Anpresskraft ab gemäß

$$F_g = \mu_g F_\perp \operatorname{sign}(\dot{q}).$$

Dabei bezeichnet man  $\mu_g$  als *Gleitreibungszahl*. Außerdem gilt für die Vorzeichenfunktion:  $\operatorname{sign}(0) = 0$ .

**Abb. 5.10** Qualitativer Verlauf einer Reibungskennlinie nach (5.38). Dabei ist  $F_r$  auf 1 N normiert, falls eine Linearachse vorliegt; im Falle eines Drehgelenks gilt Normierung auf 1 Nm. Die Gelenkgeschwindigkeit ist ebenfalls normiert



*Viskose Reibung* entsteht in Lagerungen und Getrieben. Beispielsweise müssen in Wälzlagern die umlaufenden Wälzkörper (zum Beispiel Kugeln) zähflüssiges Lagerfett verdrängen. Dabei hängt die Viskosität als Maß der Zähigkeit des Fetts stark von der Temperatur und dem Alterungszustand des Fetts ab. Ein präzises Modell ist daher aufwendig. Im Unterschied zur Gleitreibung ist viskose Reibung proportional zur Geschwindigkeit. Mit *Zähigkeitskoeffizient*  $\mu_v$  wird folgendes, einfaches Modell verwendet:

$$F_v = \mu_v \dot{q}.$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\mu_v$ , anders als  $\mu_h$  und  $\mu_g$ , keine Reibungszahl darstellt und daher auch nicht einheitenlos ist.

Nach [23, Abschn. 6-3-2] ist ein *Reibungskraftmodell* (kurz: *Reibmodell*), welches alle drei Reibungsarten kombiniert, durch

$$F_r(\dot{q}) = \mu_v \dot{q} + \text{sign}(\dot{q}) F_{\perp} \left( \mu_g + (\mu_h - \mu_g) e^{-|\dot{q}|/\epsilon} \right) \quad (5.38)$$

gegeben. Mit einem kleinen positiven Faktor  $0 < \epsilon < 1$  wird die Rate des Übergangs von Haft- zu Gleitreibung eingestellt. Normalkraft  $F_{\perp}$  wird oft zu  $\mu_g$  bzw.  $\mu_h$  hinzugezählt, so dass sich die Zahl der Reibungsparameter auf vier reduziert. Abb. 5.10 zeigt für die im Titel aufgeführten Reibungskoeffizienten und  $\epsilon = 0.1$  beispielhaft den Verlauf einer solchen Reibungskennlinie, die als *Stribeck-Kurve* bekannt ist, [2, Abschn. E 82 5.2].

Das hier aufgeführte einfache Modell berücksichtigt nicht, dass Reibungszahlen und Zähigkeitskoeffizient stets in geringem Maße auch *positionsabhängig* sind und damit eine Abhängigkeit der Reibung von der Gelenkposition  $q$  besteht. In den meisten Fällen genügt dieses einfache Modell jedoch, da in jedem Gelenk stets auch ein Regelkreis enthalten ist, der Modellfehler kompensiert.

Reibungsarbeit wird an das Inertialsystem in Form von Wärme abgegeben bzw. dissipiert und muss daher für die gewählte Zählrichtung (in Geschwindigkeitsrichtung positiv) mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Fasst man die Reibungskräfte aller Gelenke in einem Vektor  $\mathbf{F}_r$  zusammen, so folgt virtuelle Arbeit

$$dW_r = -\mathbf{F}_r(\dot{q})^T dq .$$

Aus einem Vergleich mit (5.37) ergibt sich damit die nichtkonservative Reibungskraft  $\mathbf{Q}_{nk,r} = -\mathbf{F}_r$ .

### 5.4.3 Externe Kräfte und Momente am Endeffektor

Es werden ein externer Kraftvektor und ein externer Momentenvektor betrachtet, die beide am Endeffektor einwirken und im verallgemeinerten Kraftvektor  $\mathbf{F}_e$  zusammengefasst sind. Dabei stellen die oberen drei Komponenten den Kraftvektor dar, die unteren drei den Momentenvektor. Beide Vektoren sind in Weltkoordinaten gegeben, analog zur Definition von  $\mathbf{F}$  aus Abschn. 4.3.1. Wie Kräfte und Momente der Gelenkantriebe, führen auch externe Kräfte und Momente (bei positivem Vorzeichen) dem Manipulator Energie zu, so dass deren virtuelle Arbeit

$$dW_e = \mathbf{F}_e^T d\boldsymbol{\eta}$$

positiv gezählt wird. Dabei spezifizieren die ersten drei Komponenten von  $d\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^6$  die infinitesimale kartesische Positionsänderung des Endeffektors.

Die infinitesimale Orientierungsänderung könnte an dieser Stelle prinzipiell durch infinitesimale Euler-Winkel erfolgen. Damit müsste jedoch der Momentenvektor aus  $\mathbf{F}_e$  auf die Achsen der zugehörigen Euler-Winkel bezogen sein. Dieser soll sich – nach obiger Definition – jedoch auf das Weltkoordinatensystem beziehen. Zur Darstellung der infinitesimalen Orientierungsänderung ist daher das Integral des Drehgeschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\omega}$  notwendig: Hierfür führt man das Konzept des *infinitesimalen Drehvektors*  $d\boldsymbol{\varphi}$  ein, für den der gesuchte Zusammenhang  $d\boldsymbol{\varphi}/dt = \boldsymbol{\omega}$  zutrifft. Auf eine detaillierte Erläuterung des infinitesimalen Drehvektors kann an dieser Stelle verzichtet werden, da dieser nur für Zwecke der Herleitung benötigt wird. Besonders interessierte Leser seien verwiesen auf Ausführungen der Fachliteratur der Mechanik, wie zum Beispiel [6, Abschn. 3.1.2] oder [4, Abschn. 4-7].

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix bilden sich damit die infinitesimalen Gelenkwinkeländerungen ab auf infinitesimale kartesische Positionsänderungen und infinitesimale Orientierungsänderungen des Endeffektors gemäß

$$d\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbf{J}}(q) dq .$$

Damit ergibt sich

$$dW_e = \mathbf{F}_e^T \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Analog zu den vorangegangenen beiden Unterabschnitten liefert ein Vergleich mit (5.37) die generalisierte Kraft

$$\mathbf{Q}_{\text{nk},e} = (\mathbf{F}_e^T \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{q}))^T = \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{F}_e.$$

Wird der Endeffektor also mit externen Kräften und Momenten  $\mathbf{F}_e$  beaufschlagt, so lassen sich dadurch in den Gelenkachsen Kräfte und Momente  $\mathbf{Q}_{\text{nk},e}$  – quasi als zu  $\mathbf{F}_e$  äquivalente Antriebsgrößen – messen. Dies zeigt, dass der für den Stillstand hergeleitete Zusammenhang (4.26) aus Abschn. 4.3.1 auch im bewegten Fall gültig ist.

## 5.5 Bewegungsgleichung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die kinetische und potentielle Energie berechnet. Damit kann Lagrange-Funktion  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$  bestimmt werden. Nach (5.15) folgen daraus  $n$  Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = Q_{i,\text{nk}}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.39)$$

Potentielle Energie  $V$  hängt nach (5.36) nicht von  $\dot{q}_i$  ab, so dass

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

Mit der kinetischen Energie in quadratischer Form nach (5.32) und unter Zuhilfenahme der Differenzierungsregeln aus Abschn. 5.6 ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \right) \stackrel{(5.46e)}{=} \frac{d}{dt} (\mathbf{m}_i(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}) \\ &\stackrel{(5.46c)}{=} \mathbf{m}_i(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \left( \frac{d}{dt} \mathbf{m}_i(\mathbf{q}) \right)^T \dot{\mathbf{q}} \\ &\stackrel{(5.46f)}{=} \mathbf{m}_i(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \left( \frac{d}{d\mathbf{q}} \mathbf{m}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{m}_i(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{d}{d\mathbf{q}} \mathbf{m}_i(\mathbf{q}) \right)^T \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{m}_i$  den  $i$ -ten Spaltenvektor<sup>14</sup> der in (5.32) eingeführten Massenmatrix  $\tilde{M}$ . Da allgemein für eine quadratische Form  $\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{A}^T \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{A}^T \dot{\mathbf{q}})^T = \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{A} \dot{\mathbf{q}}$  gilt, folgt weiter

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) = \mathbf{m}_i(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{d}{d\mathbf{q}} \mathbf{m}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Für den Subtrahenden der linken Seite von (5.39) ergibt sich

$$-\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = -\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} + \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_i}$$

mit

$$-\frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) = -\dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{M}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right) \dot{\mathbf{q}}.$$

Zusammengefasst ergibt sich die Bewegungsgleichung von Manipulatorsegment Nr.  $i$  zu

$$\mathbf{m}_i(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{d}{d\mathbf{q}} \mathbf{m}_i(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{M}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right) \dot{\mathbf{q}}}_{\tilde{C}_i(\mathbf{q})} + \underbrace{\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_i}}_{g_i(\mathbf{q})} = Q_{i,nk}. \quad (5.40)$$

Darin werden gravitationsbedingte Kräfte und Momente mit  $g_i$  bezeichnet. Außerdem lassen sich durch Einführung einer *Geschwindigkeits-Kopplungsmatrix*  $\tilde{C}_i$  Kreiselkräfte und -momente kompakt als quadratische Form  $\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  darstellen.

Für jedes Manipulatorsegment  $i \in \{1, \dots, n\}$  liefert (5.40) die zugehörige Bewegungsgleichung als gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung. Dies führt auf ein System verkoppelter Differenzialgleichungen zweiter Ordnung gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + g_1(\mathbf{q}) &= Q_{1,nk} \\ \mathbf{m}_2(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + g_2(\mathbf{q}) &= Q_{2,nk} \\ &\vdots \\ \mathbf{m}_n(\mathbf{q})^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + g_n(\mathbf{q}) &= Q_{n,nk}. \end{aligned}$$

Für eine vektorielle Form dieser  $n$  Bewegungsgleichungen fasst man die Gravitationskomponenten  $g_i$  in einen sogenannten *Gravitationsvektor*<sup>15</sup>  $\mathbf{g} = (g_1 \ \dots \ g_n)^T$  zusammen.

<sup>14</sup> Da  $\tilde{M}$  symmetrisch ist, sind Spalten und Zeilen gleich.

<sup>15</sup> Gravitationsvektor  $\mathbf{g}$  ist nicht zu verwechseln mit Erdbeschleunigungsvektor  $\mathbf{g}_0$ .

Analog werden die quadratischen Formen  $\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  in einem sogenannten *Kreiselkräftevektor*

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_n(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

zusammengefasst. Man spricht man dabei auch vom *Vektor der Geschwindigkeitsverkopplung*, da  $\mathbf{n}$  zu einer Verkopplung der einzelnen Differentialgleichungen durch die Geschwindigkeiten führt.

In symbolischen Darstellungen, wie zum Beispiel in Signalflussplänen, drückt man Kreiselkräftevektor  $\mathbf{n}$  oft durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$$

aus. Matrix  $\tilde{C}$  bezeichnet man als *Kreiselkräftematrix*. Zeile  $i$  von  $\tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$  entspricht dabei der quadratischen Form  $n_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  aus (5.40). Für die ausmultiplizierte, skalare Funktion  $n_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ergeben sich damit unendlich viele Realisierungsmöglichkeiten hinsichtlich  $\tilde{C}_i(\mathbf{q})$ . Aus dieser Vielfalt wählt man durch die spezielle Vorschrift

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} + \frac{\partial}{\partial q_k} M_{ji} - \frac{\partial}{\partial q_i} M_{kj} \right) \dot{q}_k \quad (5.41)$$

eine Variante aus, für die Schiefsymmetriebedingung

$$\frac{d}{dt} \tilde{M}(\mathbf{q}(t)) - 2 \tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = - \left( \frac{d}{dt} \tilde{M}(\mathbf{q}(t)) - 2 \tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right)^T \quad (5.42)$$

erfüllt ist. Diese spezielle Eigenschaft wird für erweiterte Stabilitätsbetrachtungen mittels der Ljapunov-Methode sowie für passivitätsbasierte Regelung benötigt. Daher bezeichnet man (5.42) auch als *Passivitätseigenschaft*, siehe zum Beispiel [25, Abschn. 7.5.1].

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist die Darstellung der Kreiselkräfte durch Vektor  $\mathbf{n}$  vorzuziehen, da die Bestimmung von  $\tilde{C}$  Zusatzaufwand darstellt.

**Herleitung der Elemente von  $\tilde{C}$  so, dass Schiefsymmetriebedingung (5.42) zutrifft:** Führt man die in der quadratischen Form  $\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i \dot{\mathbf{q}}$  enthaltenen vektoriiellen Ableitungen explizit aus, so ergibt sich

$$\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i \dot{\mathbf{q}} \stackrel{(5.46a)}{=} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial q_1} M_{1i} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_j} M_{1i} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} M_{1i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_1} M_{ni} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ni} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_n} M_{ni} \end{array} \right] \\ - \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial q_i} M_{11} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_i} M_{1j} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_i} M_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_i} M_{n1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_i} M_{nj} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_i} M_{nn} \end{array} \right] \end{array} \right) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}}$$

mit Hilfsvektor  $\mathbf{p} = [p_k]$  gemäß

$$p_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} M_{kj} \right) \dot{q}_k. \quad (5.43)$$

Man ändert am Ergebnis dieser quadratischen Form  $\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i \dot{\mathbf{q}}$  nichts, wenn man die darin enthaltene, vordere Matrix (Jacobi-Matrix  $\frac{d}{dq} \mathbf{m}_i(\mathbf{q})$ ) transponiert eingehen lässt. Element  $(k, j)$  (das ist Zeile  $k$ , Spalte  $j$ ) geht so über in Element  $(j, k)$ . Innerhalb der quadratischen Form kann damit  $\frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki}$  ersetzt werden durch:

$$\frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} = \frac{\partial}{\partial q_k} M_{ji} \implies \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} + \frac{\partial}{\partial q_k} M_{ji} \right)$$

Setzt man dies in (5.43) ein, so erhält man (5.41) für die Elemente der Kreiselkräftematrix.

Nun wird gezeigt, dass mit dieser speziellen Wahl von  $\tilde{C}$  Schiefsymmetriebedingung (5.42) erfüllt ist: Für das  $ij$ -Element der zeitlichen Ableitung der Massenmatrix folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} M_{ij}(\mathbf{q}(t)) = \left( \frac{d}{d\mathbf{q}} M_{ij}(\mathbf{q}) \right)^T \dot{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} M_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_k.$$

Zusammen mit (5.41) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \left( \dot{M} - 2\tilde{C} \right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial q_k} M_{ij} - \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} - \frac{\partial}{\partial q_k} M_{ji} + \frac{\partial}{\partial q_i} M_{kj} \right) \dot{q}_k \\ &\stackrel{(M_{ij}=M_{ji})}{=} \sum_{k=1}^n \left( -\frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki} + \frac{\partial}{\partial q_i} M_{kj} \right) \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Tauscht man  $i$  mit  $j$ , so erhält man schließlich den gesuchten Nachweis der Schiefsymmetrie:

$$\left(\dot{\tilde{M}} - 2\tilde{C}\right)_{ji} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial q_i} M_{kj} + \frac{\partial}{\partial q_j} M_{ki}\right) \dot{q}_k \stackrel{!}{=} -\left(\dot{\tilde{M}} - 2\tilde{C}\right)_{ij}$$

Berücksichtigt man als nichtkonservative Kräfte und Momente Reibung und Gelenk-  
antriebe gemäß Abschn. 5.4, so folgt die Bewegungsgleichung des Manipulators in vek-  
torieller Standardform (kurz: Bewegungsgleichung)

$$\tilde{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_r(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (5.44)$$

siehe auch [23, Abschn. 6-4] und [25, Abschn. 7.3]).

Im Folgenden werden mathematische Eigenschaften und physikalische Bedeutungen  
der einzelnen Komponenten von (5.44) näher beleuchtet.

### 5.5.1 Massenmatrix

Eigenschaften und Bedeutung der Massenmatrix  $\tilde{M}$ :

- $\tilde{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$  stellt die auf die Manipulatorsegmente einwirkenden Beschleunigungskräfte  
bzw. -momente dar.
- Wie bereits in Abschn. 5.2.2 festgestellt, ist  $\tilde{M}(\mathbf{q})$  (bei einer Modellbildung nach der  
DH-Konvention) symmetrisch und positiv definit. Daher existiert immer Matrixinverse  
 $\tilde{M}^{-1}(\mathbf{q})$ , so dass

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left( \boldsymbol{\tau} - \tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_r(\dot{\mathbf{q}}) \right). \quad (5.45)$$

- $\tilde{M}(\mathbf{q})$  hängt von der Massenverteilung (den Massenträgheitstensoren der Segmente) ab  
und ist daher positionsabhängig.
- $\tilde{M}(\mathbf{q})$  verkoppelt die Dynamik der einzelnen Manipulatorsegmente hinsichtlich der  
Beschleunigungen. Man bezeichnet diese Art der Verkopplung als *inertiale Verkopplung*.  
Der Begriff *inertial* kommt daher, dass die Massenmatrix aus der Massenträgheit  
der einzelnen Manipulatorsegmente entsteht und *Inertialmoment* bzw. *Inertia* ein Syn-  
onym für Massenträgheit ist.

Inertiale Verkopplung wird in verschiedenen nichtlinearen Regelungsstrategien für Ma-  
nipulatoren genutzt, um den Impuls eines Gelenks in einem anderen Gelenk als Antrieb  
zu nutzen, [9–19, 24].

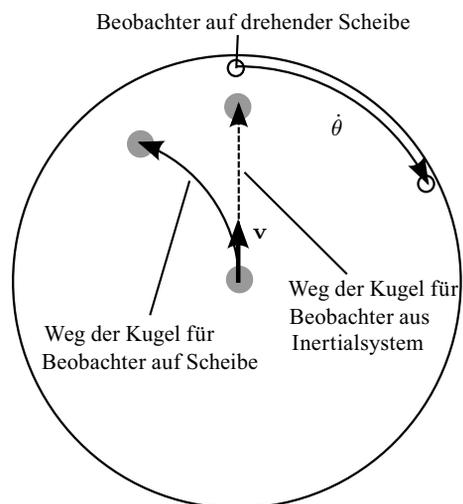
### 5.5.2 Kreiselkräftematrix bzw. Kreiselkräftevektor

Eigenschaften und Bedeutung der Kreiselkräftematrix  $\tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  bzw. des Kreiselkräftevektors  $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ :

- $\tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$  bzw.  $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  enthält Corioliskräfte (Komponenten mit  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  für  $i \neq j$ ) und Zentrifugalkräfte (Komponenten mit  $\dot{q}_i^2$ ). Corioliskräfte treten nur in bewegten Bezugssystemen auf, siehe auch das weiter unten folgende Gedankenexperiment.
- Da die Kreiselkräfte und -momente des  $i$ -ten Manipulatorsegments durch quadratische Form  $\dot{\mathbf{q}}^T \tilde{C}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  beschrieben werden, verschwinden sie für  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ . Des Weiteren folgt aus der quadratischen Form, dass bei betragsmäßig ausreichend geringen Gelenkgeschwindigkeiten, Kreiselkräfte und -momente in guter Näherung vernachlässigt werden können.
- Für die spezielle Wahl von  $\tilde{C}$  gemäß (5.41) ergibt sich Passivitätseigenschaft (5.42), siehe Abschn. 5.5.

Folgendes Gedankenexperiment soll die Corioliskraft veranschaulichen: Auf einer rotierenden Scheibe werde in die Mitte / auf den Drehpunkt eine mit Tinte benetzte Kugel gesetzt, siehe Abb. 5.11. Dort erhalte die Kugel einen Stoß, so dass sie mit gleichförmiger Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  rollt. Die Bewegung der Kugel sei reibungsfrei. Nun sollen zwei Beobachter existieren, von denen einer außerhalb der Scheibe im inertialen Bezugssystem feststeht. Der andere Beobachter soll sich auf einer festen Position der Scheibe befinden. Für den Beobachter im inertialen Bezugssystem bewegt sich aufgrund der Drehbewegung der Scheibe der auf der Scheibe sitzende Beobachter auf einer Kreisbahn nach rechts. Die Bahn der Kugel verläuft für den Beobachter im inertialen Bezugssystem geradenförmig nach oben (gestrichelt dargestellt): Dies muss so sein, da auf die Kugel nach dem

**Abb. 5.11** Gedankenexperiment zur Veranschaulichung der Bedeutung der Corioliskraft als Scheinkraft



anfänglichen Stoß keine weiteren Kräfte mehr einwirken (Annahme einer reibungsfreien Bewegung).

Der auf der Scheibe sitzende Beobachter nimmt hingegen eine gekrümmte Bahn der Kugel wahr. Offensichtlich wirkt im bewegten Bezugssystem ständig eine Kraft auf die Kugel ein, ansonsten würde die Kugel keine ständige Richtungsänderung durchführen. Diese Kraft nennt man Corioliskraft. Sie tritt nur im bewegten und nicht im inertialen Bezugssystem auf. Daher spricht man von einer *Scheinkraft*.

### 5.5.3 Gelenkreibung und -antriebe

Reibungsvektor  $F_r(\dot{q})$  und verallgemeinerter Gelenkantriebsvektor  $\tau$  berücksichtigen nichtkonservative Kräfte und Momente aus Abschn. 5.4. Detailliertere Reibmodelle beinhalten auch Positionsabhängigkeiten der Reibungszahlen, so dass dann auch eine Abhängigkeit von Gelenkpositionen  $q$  auftritt. In diesem Fall stellt der Reibungsvektor also eine Abbildung  $(q, \dot{q}) \mapsto F_r$  dar.

### 5.5.4 Algorithmus zum Aufstellen der Bewegungsgleichung

Algorithmus 5.1<sup>16</sup> fasst die notwendigen Schritte zum Aufstellen der Bewegungsgleichung (5.44) zusammen. Dabei bezeichnet Index  $i$  die Nummer des jeweiligen Manipulatorsegments, wobei insgesamt  $n$  Manipulatorsegmente vorliegen sollen. Der bereits früher eingeführten Konvention folgend, bezeichnet Matrix  $\tilde{E}_3$  in Schritt 2 eine  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix. Die Bewegungsgleichung ist bereits für einfache Kinematiken mit wenigen Gelenken äußerst aufwendig. Eine Berechnung von Hand ist daher fehleranfällig. Aus diesem Grund wendet man heute in der Praxis Formelmanipulationsprogramme an, die die analytischen Berechnungen zuverlässig durchführen. Der dargestellte Algorithmus 5.1 ist für eine solche Berechnungsweise gedacht. Für eine eventuelle Berechnung von Hand lässt sich der Berechnungsaufwand durch leicht modifizierte Vorgehensweisen etwas reduzieren.

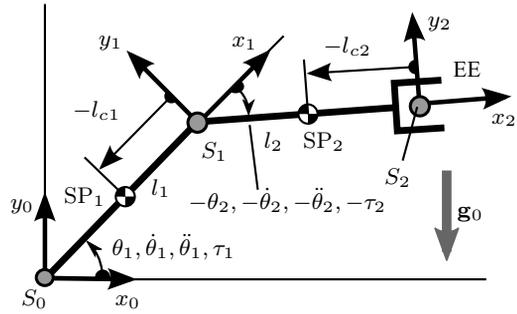
**Beispiel 5.8.** Bewegungsgleichung für den planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator: Für den in Abb. 5.12 dargestellten Manipulator soll die Bewegungsgleichung aufgestellt werden. Beide Manipulatorsegmente bestehen aus einem langen dünnen Stab mit Länge  $l_i$  und Radius  $r_i$ . Für die Trägheitsmomente soll  $l_i \gg r_i$  angenommen werden. Aus Gründen der Darstellbarkeit wurde außerdem für die Schwerpunktpositionen die vereinfachende Annahme  $l_{ci} = l_i/2$  getroffen. Erdbeschleunigungsvektor  $g_0$  wirke entgegen der  $y_0$ -Achse. Jedes Manipulatorsegment soll durch ein Moment  $\tau_i$  mit Zählrichtung nach Abb. 5.12 angetrieben sein.

<sup>16</sup> Angelehnt an [23, Algorithm 6-4-1]: Lagrange-Euler Equations.

<b>Schritt 1</b> Direkte Kinematik mit $\tilde{T}_{0i}$ , $1 \leq i \leq n$ aufstellen.
<b>Schritt 2</b> Extraktion Rotationsmatrizen und Translationsvektoren: $\tilde{R}_{0i} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{T} \end{bmatrix} \tilde{T}_{0i} \begin{bmatrix} \tilde{E}_3 \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq n$ $\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \tilde{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{T} \end{bmatrix} \tilde{T}_{0i} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ - \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \leq i < n$
<b>Schritt 3</b> Berechnung des Trägheitstensors $\tilde{I}_i^0$ in Weltkoordinaten für $1 \leq i \leq n$ . Ein im Hauptachsensystem $H_i$ mit $\tilde{I}_i^{H_i}$ gegebener Trägheitstensor kann mit (5.27) nach $\tilde{I}_i^0$ transformiert werden.
<b>Schritt 4</b> Berechnung der Schwerpunktkoordinaten $\mathbf{c}_i$ in $S_0$ für $1 \leq i \leq n$ . Umrechnung körpereigener Schwerpunktkoordinaten $\mathbf{c}_i^i$ gemäß $\mathbf{c}_i^0 = \begin{bmatrix} \tilde{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{T} \end{bmatrix} \tilde{T}_{0i} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_i^i \\ - \\ 1 \end{pmatrix}.$
Initialisierung Gelenkindex $i = 1$ und Lagrange-Funktion $L = 0$ .
<b>Schritt 5.i</b> Berechnung von Linear- und Drehgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix $\tilde{J}_{v_{SP},i}$ und $\tilde{J}_{\omega_{SP},i}$ nach (5.29).
<b>Schritt 6.i</b> Berechnung von Translations- und Rotationsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_i^0$ und $\boldsymbol{\omega}_i^0$ des Schwerpunkts nach (5.28).
<b>Schritt 7.i</b> Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie $T_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ und $V_i(\mathbf{q}_i)$ nach (5.24) und (5.33). Hinzufügen des Lagrange-Anteils $L_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = T_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - V_i(\mathbf{q}_i)$ von Manipulatorsegment Nr. $i$ zur Gesamt-Lagrange-Funktion: $L(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = L(\mathbf{q}_{i-1}, \dot{\mathbf{q}}_{i-1}) + L_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$
$i = i + 1$
wiederhole solange $i < n$
<b>Schritt 8</b> Für $1 \leq i \leq n$ : Durch partielles Ableiten gemäß $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = Q_{i,nk}$ entsteht die Bewegungsgleichung für Manipulatorsegment Nr. $i$ in Form einer verkoppelten gewöhnlichen, nichtlinearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung.
<b>Schritt 9</b> Ergänzung nichtkonservativer Kräfte und Momente $Q_{i,nk}$ gemäß Abschnitt 5.4. Gelenkantriebe und -reibung führen so beispielsweise zu $Q_{i,nk} = \tau_i - F_{i,r}(\dot{q}_i)$ .

**Algorithmus 5.1** Bewegungsgleichung

**Abb. 5.12** Skizze mit relevanten Daten für die Bewegungsgleichung des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators aus Beispiel 5.8



Zum Aufstellen der Bewegungsgleichung wird Algorithmus 5.1 im Folgenden schrittweise durchgeführt:

**Schritt 1** Aus Beispiel 2.20 ist bereits die direkte Kinematik bekannt:

$$\tilde{T}_{01}(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_{12}(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{T}_{02}(\theta_1, \theta_2) = \tilde{T}_{01}(\theta_1) \tilde{T}_{12}(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Schritt 2** Benötigte Rotationsmatrizen und Translationsvektoren werden aus den homogenen Transformationsmatrizen direkt abgelesen zu

$$\tilde{R}_{01} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_{02} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 3** Bestimmung von Trägheitstensoren  $\tilde{I}_1^0$  und  $\tilde{I}_2^0$ : Die Trägheitstensoren der Manipulatorsegmente in Hauptachsen können aus Beispiel 5.6 entnommen werden. Aus Näherung  $l_i \gg r_i$  folgt

$$\tilde{I}_i^{H_i} \approx \frac{m_i}{12} \text{Diag}(6r_i^2, l_i^2, l_i^2).$$

Hauptachsensystem  $S_H = S_{H_i}$  ist nach Abb. 5.6 und Abb. 5.12 mit dem jeweiligen körpereigenen Koordinatensystems  $S_i$  gleich orientiert, das heißt es gilt

$$\tilde{R}_{i H_i} = \tilde{E}.$$

Aus (5.27) folgt damit

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1^0 &= \tilde{R}_{01} \tilde{R}_{1 H_1} \tilde{I}_1^{H_1} (\tilde{R}_{01} \tilde{R}_{1 H_1})^T = \tilde{R}_{01} \tilde{I}_1^{H_1} \tilde{R}_{01}^T \\ &= \frac{m_1}{12} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{m_1}{12} \begin{bmatrix} 6r_1^2 c_1^2 + l_1^2 s_1^2 & -\frac{1}{2} \sin(2\theta_1) (l_1^2 - 6r_1^2) & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin(2\theta_1) (l_1^2 - 6r_1^2) & 6r_1^2 s_1^2 + l_1^2 c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_1^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2^0 &= \tilde{R}_{02} \tilde{R}_{2 H_2} \tilde{I}_2^{H_2} (\tilde{R}_{02} \tilde{R}_{2 H_2})^T = \tilde{R}_{02} \tilde{I}_2^{H_2} \tilde{R}_{02}^T \\ &= \frac{m_2}{12} \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6r_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{m_2}{12} \begin{bmatrix} 6r_2^2 c_{12}^2 + l_2^2 s_{12}^2 & -\frac{\sin(2\theta_{12})(l_2^2 - 6r_2^2)}{2} & 0 \\ -\frac{\sin(2\theta_{12})(l_2^2 - 6r_2^2)}{2} & 6r_2^2 s_{12}^2 + l_2^2 c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

mit Abkürzung  $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ .

**Schritt 4** Im körpereigenen System sind die Schwerpunktkoordinaten mit

$$\mathbf{c}_i^i = \begin{pmatrix} -l_{ci} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{l_i}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Mit den in Schritt 2 ermittelten homogenen Transformationsmatrizen folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1^0 &= \left[ \tilde{E}_3 \mid \mathbf{0} \right] \tilde{T}_{01} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{l_1}{2} \begin{pmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_2^0 &= \left[ \tilde{E}_3 \mid \mathbf{0} \right] \tilde{T}_{02} \begin{pmatrix} c_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_2}{2} c_{12} + l_1 c_1 \\ \frac{l_2}{2} s_{12} + l_1 s_1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Setze  $i = 1$  und  $L = 0$ .

**Schritt 5.1** Bestimmung der Jacobi-Matrizen  $\tilde{J}_{v_{SP,1}}$  und  $\tilde{J}_{\omega_{SP,1}}$ : Da nur Drehgelenke vorhanden sind, ergibt sich nach (5.29c) für das erste Manipulatorsegment

$$\mathbf{J}_{v_{SP,1}} = \left( \tilde{\mathbf{R}}_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{c}_1^0 - \mathbf{t}_0^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \mathbf{c}_1^0 = \frac{l_1}{2} \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die gesuchte Lineargeschwindigkeits-Jacobi-Matrix

$$\tilde{J}_{v_{SP,1}} = \left[ \mathbf{J}_{v_{SP,1}} \right] = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Drehgeschwindigkeits-Jacobi-Matrix besteht nur aus der ersten Drehachse und ergibt sich damit zu

$$\tilde{J}_{\omega_{SP,1}} = \tilde{\mathbf{R}}_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Schritt 6.1** Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des ersten Manipulatorsegments berechnen sich mit den entsprechenden Jacobi-Matrizen zu

$$\mathbf{v}_1^0 = \tilde{J}_{v_{SP,1}} \dot{\mathbf{q}}_1 = \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1^0 = \tilde{J}_{\omega_{SP,1}} \dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 7.1** Die kinetische und potentielle Energie folgt mit obigen Geschwindigkeiten und dem Trägheitstensor zu

$$T_1(\dot{\theta}_1) = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^{0T} \mathbf{v}_1^0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^{0T} \tilde{I}_1^0 \boldsymbol{\omega}_1^0 = \frac{1}{6} \dot{\theta}_1^2 m_1 l_1^2$$

und

$$V_1(\theta_1) = -\mathbf{g}_0^T \mathbf{c}_1^0 m_1 = m_1 \frac{l_1}{2} \begin{pmatrix} 0 & g_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_0 m_1 \frac{l_1}{2} s_1.$$

Damit ergibt sich der Anteil der Lagrange-Funktion für das erste Manipulatorsegment zu

$$L_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) = T_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) - V_1(\theta_1) = \frac{l_1 m_1}{6} (\dot{\theta}_1^2 l_1 - 3 g_0 s_1).$$

Weiter mit Schritt 5 und  $i = 2$ :

**Schritt 5.2** Bestimmung der Jacobi-Matrizen  $\tilde{J}_{v_{SP},2}$  und  $\tilde{J}_{\omega_{SP},2}$ : Im vorliegenden zweiten Durchlauf besitzen die Jacobi-Matrizen Dimension  $3 \times 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{v_{SP},2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{SP},1} & \mathbf{J}_{v_{SP},2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \tilde{\mathbf{R}}_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{c}_2^0 - \mathbf{t}_0^0) & \left( \tilde{\mathbf{R}}_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times (\mathbf{c}_2^0 - \mathbf{t}_1^0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \mathbf{c}_2^0 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times (\mathbf{c}_2^0 - \mathbf{t}_1^0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{12} \frac{l_2}{2} + l_1 c_1 \\ s_{12} \frac{l_2}{2} + l_1 s_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{12} \frac{l_2}{2} \\ s_{12} \frac{l_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s_{12} \frac{l_2}{2} - l_1 s_1 & -s_{12} \frac{l_2}{2} \\ c_{12} \frac{l_2}{2} + l_1 c_1 & c_{12} \frac{l_2}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{J}}_{\omega_{SP},2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Schritt 6.2** Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des zweiten Manipulatorsegments ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2^0 &= \tilde{\mathbf{J}}_{v_{SP},2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-s_{12} \frac{l_2}{2} - l_1 s_1) \dot{\theta}_1 - s_{12} \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \\ (c_{12} \frac{l_2}{2} + l_1 c_1) \dot{\theta}_1 + c_{12} \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}_2^0 &= \tilde{\mathbf{J}}_{\omega_{SP},2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Schritt 7.2** Kinetische und potentielle Energie des zweiten Manipulatorsegments: Obige Geschwindigkeiten und Trägheitstensor führen zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^{0T} \mathbf{v}_2^0 &= \dot{\theta}_1^2 \frac{m_2}{8} (4 c_2 l_2 l_1 + 4 l_1^2 + l_2^2) \\ &\quad + \dot{\theta}_2^2 \frac{l_2^2 m_2}{8} \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{l_2 m_2}{4} (2 c_2 l_1 + l_2) \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2^{0T} \tilde{I}_2^0 \boldsymbol{\omega}_2^0 &= \frac{m_2 l_2^2}{24} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2. \end{aligned}$$

Damit berechnet sich die kinetische Energie zu

$$\begin{aligned} T_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= \dot{\theta}_1^2 \frac{m_2}{6} (3 c_2 l_2 l_1 + 3 l_1^2 + l_2^2) \\ &\quad + \dot{\theta}_2^2 \frac{l_2^2 m_2}{6} \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{l_2 m_2}{6} (3 c_2 l_1 + 2 l_2) \end{aligned}$$

und die potentielle Energie zu

$$V_2(\theta_1, \theta_2) = -\mathbf{g}_0^T \mathbf{c}_2^0 m_2 = g_0 m_2 \left( l_1 s_1 + \frac{l_2}{2} s_{12} \right).$$

Der Anteil der Lagrange-Funktion für das zweite Manipulatorsegment ist damit von beiden Gelenkwinkeln und deren Geschwindigkeiten abhängig und ergibt sich aus

$$L_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = T_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) - V_2(\theta_1, \theta_2).$$

Zusammen mit dem Anteil der Lagrange-Funktion des ersten Manipulatorsegments folgt daraus die gesamte Lagrange-Funktion zu

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= L_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) + L_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{6} \dot{\theta}_1^2 (m_2 (3 c_2 l_2 l_1 + 3 l_1^2 + l_2^2) + l_1^2 m_1) \\ &\quad + \dot{\theta}_2^2 \frac{l_2^2 m_2}{6} \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{l_2 m_2}{6} (3 c_2 l_1 + 2 l_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} g_0 (l_1 (m_1 + 2 m_2) s_1 + l_2 m_2 s_{12}). \end{aligned}$$

**Schritt 8** Die Bewegungsgleichungen der Manipulatorsegmente erhält man durch partielles Ableiten gemäß

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \frac{\partial}{\partial \theta_1} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= Q_{1,\text{nk}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \frac{\partial}{\partial \theta_2} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= Q_{2,\text{nk}}\end{aligned}$$

Erstes Manipulatorsegment:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial \theta_1} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} \underbrace{g_0 (c_{12} l_2 m_2 + c_1 l_1 (m_1 + 2m_2))}_{g_1} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{3} \dot{\theta}_1 (m_2 (3 c_2 l_2 l_1 + 3 l_1^2 + l_2^2) + l_1^2 m_1) \\ &\quad + \frac{1}{6} \dot{\theta}_2 l_2 m_2 (3 c_2 l_1 + 2 l_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \ddot{\theta}_1 \frac{1}{3} \underbrace{(m_2 (3 c_2 l_2 l_1 + 3 l_1^2 + l_2^2) + l_1^2 m_1)}_{m_{11}} \\ &\quad + \ddot{\theta}_2 \underbrace{\frac{l_2 m_2}{6} (3 c_2 l_1 + 2 l_2)}_{m_{12}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \underbrace{\dot{\theta}_2^2 l_1 l_2 m_2 s_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 m_2 s_2}_{\text{Kreiselkräfte}}\end{aligned}$$

Zweites Manipulatorsegment:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial \theta_2} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} \underbrace{\dot{\theta}_1^2 l_1 l_2 m_2 s_2}_{\text{Kreiselkräfte}} + \underbrace{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{l_1 l_2 m_2 s_2}{2}}_{\text{kürzt sich heraus}} + \frac{1}{2} c_{12} g_0 l_2 m_2 \underbrace{\phantom{\frac{1}{2} c_{12} g_0 l_2 m_2}}_{g_2} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{6} \dot{\theta}_1 l_2 m_2 (3 c_2 l_1 + 2 l_2) + \frac{1}{3} \dot{\theta}_2 l_2^2 m_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \ddot{\theta}_1 \underbrace{\frac{l_2 m_2}{6} (3 c_2 l_1 + 2 l_2)}_{m_{21}} + \ddot{\theta}_2 \underbrace{\frac{l_2^2 m_2}{3}}_{m_{22}} - \underbrace{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{l_1 l_2 m_2 s_2}{2}}_{\text{kürzt sich heraus}}\end{aligned}$$

Zusammengefasst folgt Massenmatrix  $\tilde{M}$ , Kreiselkräftevektor  $\mathbf{n}$  sowie Gravitationsvektor  $\mathbf{g}$  der Gewichtskräfte von Bewegungsgleichung (5.44) zu

$$\begin{aligned}\tilde{M}(\theta_2) &= \begin{bmatrix} \frac{l_1^2 m_1}{3} + m_2 \left( l_1^2 + l_1 l_2 c_2 + \frac{l_2^2}{3} \right) & l_2 m_2 \left( \frac{l_1 c_2}{2} + \frac{l_2}{3} \right) \\ l_2 m_2 \left( \frac{l_1 c_2}{2} + \frac{l_2}{3} \right) & \frac{l_2^2 m_2}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{n}(\theta_2, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} l_1 l_2 m_2 s_2 \begin{pmatrix} -2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_1^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2} g_0 \begin{pmatrix} c_{12} l_2 m_2 + c_1 l_1 (m_1 + 2 m_2) \\ c_{12} l_2 m_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da keine Reibungseffekte berücksichtigt sind, entfällt Reibungsvektor  $\mathbf{F}_r$ .

**Schritt 9** Ergänzung um nichtkonservative Momente: Mit Gelenk-Antriebsmomenten  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \quad \tau_2)^T$ , als einzig vorhandene nichtkonservative Momente, ergibt sich schließlich die gesuchte Bewegungsgleichung zu

$$\tilde{M}(\theta_2) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{C}(\theta_2, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\theta_1, \theta_2) = \boldsymbol{\tau}.$$

(Ende des Algorithmus.)

Für eine alternative Darstellung der Kreiselkräfte gemäß  $\mathbf{n} = \tilde{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}$  berechnet sich Kreiselkräftematrix  $\tilde{C}$  nach (5.41) zu

$$\tilde{C} = \frac{1}{2} l_1 l_2 m_2 s_2 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zusammen mit

$$\frac{d}{dt} \tilde{M}(\theta_2(t)) = \frac{1}{2} l_1 l_2 m_2 s_2 \begin{bmatrix} -2 \dot{\theta}_2 & -2 \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

folgt wegen

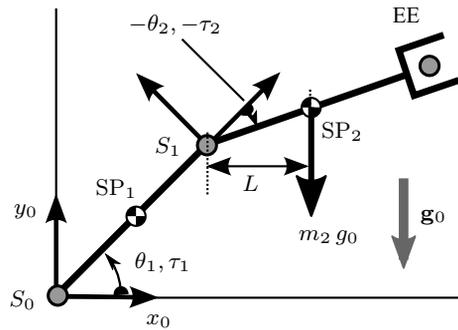
$$\frac{d}{dt} \tilde{M} - 2 \tilde{C} = \frac{1}{2} l_1 l_2 m_2 s_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ -(2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \end{bmatrix}$$

schließlich Passivitätseigenschaft (5.42).

Die Determinante der Massenmatrix berechnet sich zu

$$\text{Det}(\tilde{M}) = \frac{l_1^2 l_2^2 m_2}{36} (3(4 - 3c_2^2)m_2 + 4m_1).$$

**Abb. 5.13** Im Ursprung von  $S_1$  wirkendes Gewichtsmoment von  $SP_2$  aus Beispiel 5.8



Wegen  $4 - 3c_2^2 \geq 1$  ist sie stets positiv und es existiert Matrix-Inverse

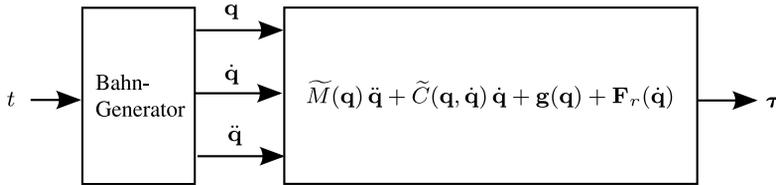
$$\tilde{M}^{-1} = \frac{1}{6 \text{Det}(\tilde{M})} \cdot \begin{bmatrix} 2l_2^2 m_2 & -l_2 m_2 (3c_2 l_1 + 2l_2) \\ -l_2 m_2 (3c_2 l_1 + 2l_2) & 2l_1^2 m_1 + 2m_2 (3l_1^2 + 3c_2 l_1 l_2 + l_2^2) \end{bmatrix} \quad \triangleleft$$

**Anmerkung 5.6.** zu physikalischen Hintergründen aus Beispiel 5.8:

- Die Massenverteilung ist bezüglich Drehachse 2 immer konstant. Bezüglich Drehachse 1 verändert sie sich jedoch, siehe auch Beispiel 5.7. Daher hängt die Massenmatrix aus Beispiel 5.8 nur von  $\theta_2$  ab.
- Es ist unmittelbar klar, dass  $g_1$  in Beispiel 5.8 von beiden Gelenkwinkeln abhängt. Aus folgendem Grund gilt dies auch für  $g_2$ : Die im Schwerpunkt  $SP_2$  angreifende Gravitationskraft erzeugt per Hebelarm  $L$  im Ursprung  $S_2$  ein Gewichtsmoment, siehe Abb. 5.13. Dieser Hebelarm besteht aus der horizontalen Komponente (parallel zur  $x_0$ -Achse) der Strecke von  $S_1$  zu  $SP_2$  und hängt damit von beiden Gelenkwinkeln ab.  $\square$

### 5.5.5 Realisierung der Bewegungsgleichung in einer Simulationsumgebung

Mittels Bewegungsgleichung (5.44) können für gegebene Werte  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  die dafür notwendigen Gelenkantriebsgrößen  $\boldsymbol{\tau}$  berechnet werden. Die Werte  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  werden in der Regel von einem *Bahn-Generator* in Abhängigkeit von einer Simulationszeit  $t$  geliefert, siehe Abschn. 6.3. Die Umsetzung in einer Simulationsumgebung zur Berechnung der Drehmomentverläufe zeigt Signalfussplan 5.1, 7.1 und 7.2.



**Signalflussplan 5.1** Berechnung der Gelenkantriebsgrößen entlang einer Bahn

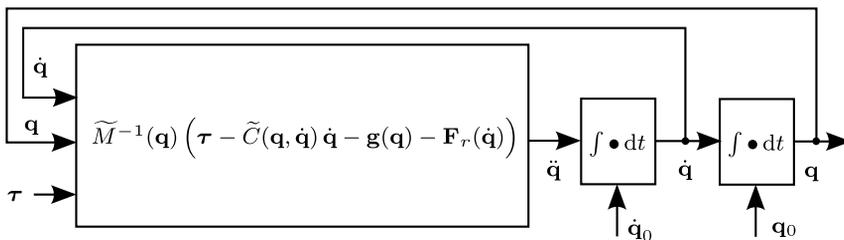
Umgekehrt kann auch der zeitliche Verlauf (das heißt eine Bahn) der Gelenkantriebsgrößen gegeben sein. Gesucht ist dann die resultierende Bahn  $t \mapsto (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  der Gelenkvariablen. Hierzu verwendet man die nach  $\ddot{\mathbf{q}}$  aufgelösten Bewegungsgleichungen (5.45). Für gegebene Werte von  $\boldsymbol{\tau}$  kann damit die resultierende Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}$  ermittelt werden. Mit Anfangswerten  $\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q}_0$  ergeben sich daraus durch Integrationen nach der Zeit Geschwindigkeit und Position:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_0 + \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{q}}(\kappa) \, d\kappa$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{q}}(\kappa) \, d\kappa$$

Dies führt zu Signalflussplan 5.2.

Ausgangsgrößen von Integratorblöcken nennt man in der Regelungstechnik *Systemzustände*, siehe Anmerkung 8.1. In vorliegendem Fall sind dies Position  $\mathbf{q}$  und Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}$ . Systemzustände bestimmen neben Steuergrößen (hier Gelenkantriebe  $\boldsymbol{\tau}$ ) alle anderen Systemgrößen vollständig. Sie sind daher von besonderer Bedeutung und werden in Abschn. 8.2.4 ausführlich behandelt.



**Signalflussplan 5.2** Rückführung der Systemzustände zur Simulation der Bewegung eines Manipulators für eine gegebene Gelenkantriebsbahn

## 5.6 Anhang: Differenzierungsregeln für Matrizen und Vektoren

Betrachtet werde eine quadratische, konstante, symmetrische Matrix  $\tilde{M}$  mit Zeilenvektoren  $\mathbf{m}^i$  bzw. Spaltenvektoren  $\mathbf{m}_i$ :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \cdots & \mathbf{m}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad n > 1$$

Im Kontext der Differenzierungsregeln steht ein hochgestellter Index  $\bullet^i$  für einen Zeilenvektor (liegender Vektor), ein tiefgestellter Index  $\bullet_i$  für einen Spaltenvektor (stehender Vektor). Wegen der Symmetrieeigenschaft von  $\tilde{M}$  gilt  $\mathbf{m}^{i^T} = \mathbf{m}_i$ .

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} h(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

liefert also einen stehenden Vektor.

Der Gradient einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \left( h_1(\mathbf{x}) \quad h_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad h_m(\mathbf{x}) \right)^T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  ist für  $m \geq 2$  definiert als

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{d}{d\mathbf{x}} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{d}{d\mathbf{x}} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \tilde{J}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned} \quad (5.46a)$$

Die dabei entstehende Matrix  $\tilde{J}(\mathbf{x})$  bezeichnet man *Jacobi-Matrix* von  $\mathbf{h}$ . Fall  $m = 1$  muss hier ausgeschlossen werden, da dann die Jacobi-Matrix einen liegenden Vektor liefern würde, während der Gradient einen stehenden Vektor liefert. Daraus ergäbe sich ein Widerspruch.

Für die Ableitung der linearen, vektorwertigen Funktion  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \tilde{M} \mathbf{x}$  folgt damit:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \tilde{M} \mathbf{x} = \frac{d}{d\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{m}^1 \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{m}^n \mathbf{x} \end{pmatrix} \stackrel{(5.46a)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}^n \end{bmatrix} = \tilde{M}$$

Für die transponierte vektorwertige Funktion  $\mathbf{h}^T = \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{M}}^T = \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{M}}$  folgt wegen  $\mathbf{x}^T \mathbf{m}_i = \mathbf{m}^i \mathbf{x}$  die Ableitung nach  $\mathbf{x}$  analog zu

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{M}} = \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( \mathbf{x}^T \mathbf{m}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{m}_n \right) = \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( \mathbf{m}^1 \mathbf{x} \quad \dots \quad \mathbf{m}^n \mathbf{x} \right) = \tilde{\mathbf{M}}.$$

Für die Ableitung nach einzelnen Komponenten  $x_i$  folgt

$$\frac{d}{dx_i} \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_i} \mathbf{m}^1 \mathbf{x} \\ \vdots \\ \frac{d}{dx_i} \mathbf{m}^n \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{pmatrix} = \mathbf{m}_i$$

sowie

$$\frac{d}{dx_i} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{M}} = \left( \frac{d}{dx_i} \mathbf{x}^T \mathbf{m}_1 \quad \dots \quad \frac{d}{dx_i} \mathbf{x}^T \mathbf{m}_n \right) = \left( m_{1i} \quad \dots \quad m_{ni} \right) = \mathbf{m}^i.$$

Produktregel der Differenziation bei vektorwertigen Funktionen  $\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( g_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}) + \dots + g_n(\mathbf{x}) f_n(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{d}{d\mathbf{x}} g_1(\mathbf{x}) f_1(\mathbf{x}) + \dots + \frac{d}{d\mathbf{x}} g_n(\mathbf{x}) f_n(\mathbf{x}) \\ &= f_1(\mathbf{x}) \frac{dg_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + g_1(\mathbf{x}) \frac{df_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + \dots \\ &\quad \dots + f_n(\mathbf{x}) \frac{dg_n(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + g_n(\mathbf{x}) \frac{df_n(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \\ &= \left[ \frac{dg_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \quad \dots \quad \frac{dg_n(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right] \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \left[ \frac{df_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \quad \dots \quad \frac{df_n(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right] \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &\stackrel{(5.46a)}{=} \left( \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \left( \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.46b)$$

Die zeitliche Ableitung des Produkts der vektorwertigen Funktionen  $\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ergibt damit:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{g}(t)^T \mathbf{f}(t)) = \left( \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t) \right)^T \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)^T \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) \quad (5.46c)$$

Die Ableitung einer quadratischen Form nach  $\mathbf{x}$  kann auf die Ableitung des Produkts zweier vektorwertiger Funktionen zurückgeführt werden:

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \underbrace{\mathbf{x}^T}_{g^T(\mathbf{x})} \underbrace{\tilde{M}\mathbf{x}}_{f(\mathbf{x})} \stackrel{(5.46b)}{=} \tilde{E} \tilde{M} \mathbf{x} + \tilde{M}^T \mathbf{x} = (\tilde{M} + \tilde{M}^T) \mathbf{x} = 2 \tilde{M} \mathbf{x} \quad (5.46d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_i} \underbrace{\mathbf{x}^T}_{g^T(\mathbf{x})} \underbrace{\tilde{M}\mathbf{x}}_{f(\mathbf{x})} &= \left( 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1_i \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \tilde{M} \mathbf{x} + \mathbf{m}_i^T \mathbf{x} \\ &= \mathbf{m}^i \mathbf{x} + \mathbf{m}_i^T \mathbf{x} = (\mathbf{m}^i + \mathbf{m}_i^T) \mathbf{x} = 2 \mathbf{m}_i^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.46e)$$

Dabei kennzeichnet Index  $i$  in  $1_i$ , dass das  $i$ -te Element des liegenden Vektors den Wert 1 enthält, während alle anderen Elemente verschwinden.

Die zeitliche Ableitung einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$  berechnet sich mit Hilfe der Kettenregel zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} f_1(\mathbf{x}(t)) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} f_n(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \frac{d}{dx} f_1(\mathbf{x}) \right)^T \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \left( \frac{d}{dx} f_n(\mathbf{x}) \right)^T \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(5.46a)}{=} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.46f)$$

## Aufgaben

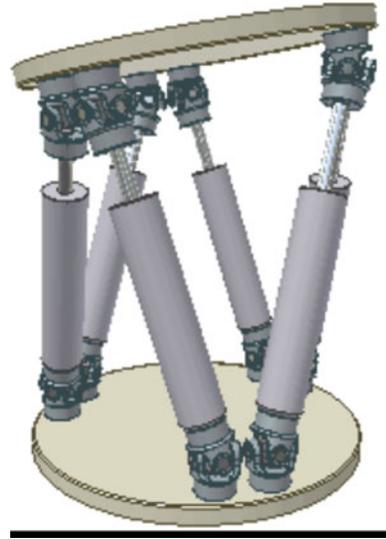
*Musterlösungen* finden sich unter [www.springer.com](http://www.springer.com) auf der Seite des vorliegenden Werks.

### 5.1 Freiheitsgrade und Zwangsbindungen

- Wie viele Freiheitsgrade besitzt eine radgebundene Roboter-Bewegungsplattform?
- Wie viele Freiheitsgrade besitzt ein Zug?
- Wie viele Freiheitsgrade besitzt der 2-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Beispiel 5.8? Ein baugleicher zweiter Manipulator soll kooperativ mit dem ersten Manipulator arbeiten: Beide Manipulatoren greifen hierzu dasselbe starre Werkstück. Wie viele Freiheitsgrade liegen damit insgesamt vor? Interpretieren Sie dieses Ergebnis hinsichtlich der Beweglichkeit.

Was müssten Sie ändern, um das Werkstück in allen Freiheitsgraden der Ebene bewegen zu können?

**Abb. 5.14** Prinzipieller Aufbau eines Hexapoden. Unveränderter Screenshot der Animation aus [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a7/Hexapod\\_general\\_Anim.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a7/Hexapod_general_Anim.gif), erstellt von Wikipedia-User UtzOnBike, freigegeben unter Creative-Commons-Lizenz 3.0 nicht portiert – Weitergabe unter gleichen Bedingungen, Link zuletzt überprüft am 22.12.2018



d) Ein typischer Hexapode besitzt sechs Linearachsen bzw. prismatische Gelenke wie in Abb. 5.14 dargestellt.

Berechnen Sie den Freiheitsgrad des Hexapoden für die beiden Fälle, dass die prismatischen Gelenke genau zwei oder genau einen Freiheitsgrad besitzen. Interpretieren Sie in beiden Fällen das Ergebnis hinsichtlich der Beweglichkeit.

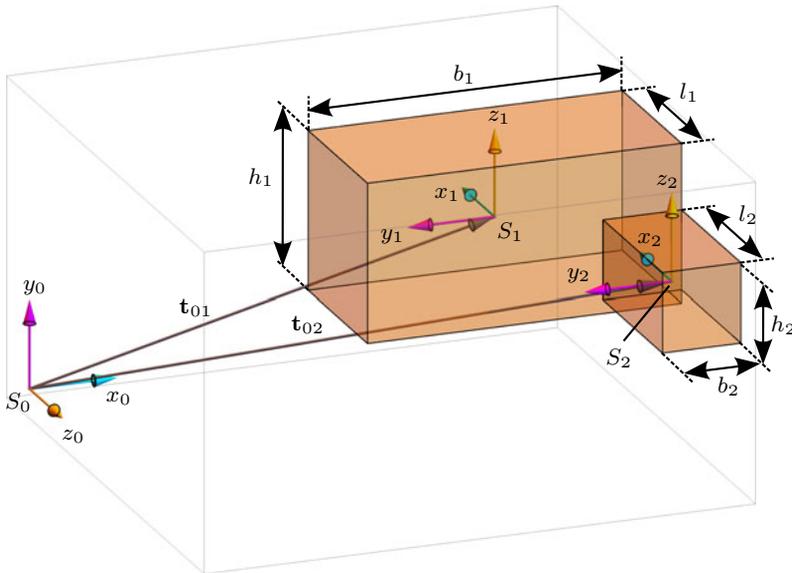
## 5.2 Massenträgheitstensor eines zusammengesetzten Körpers

Ein Körper setze sich aus zwei Quadern, wie in Abb. 5.15 dargestellt, zusammen. Das körpereigene Koordinatensystem des größeren bzw. kleineren Quaders sei  $S_1$  bzw.  $S_2$ . Die Koordinatensysteme befinden sich im Schwerpunkt des eigenen Körpers; die Achsen verlaufen kollinear zu den Quaderkanten und Achsen von  $S_0$ . Die Abmessungen beider Quader betragen  $l_1 = 0.15$ ,  $b_1 = 0.3$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $l_2 = 0.15$ ,  $b_2 = 0.075$ ,  $h_2 = 0.075$  mit einer Dichte von  $\rho = 2710$  (Aluminium). Alle Zahlenangaben dieser Aufgabe sind auf Standardeinheiten normiert, das heißt Längen auf m, Dichte auf  $\text{kg}/\text{m}^3$ , Trägheitsmoment auf  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ , Energie auf J.

Die Schwerpunktpositionen der Quader liegen bei

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 0.4625 & 0.175 & 0.4 \end{pmatrix}^T.$$

Hinweis: Matrizenmultiplikationen und Eigensystem-Berechnungen der vorliegenden Aufgabe sollten mit einem PC-gestützten Berechnungsprogramm wie zum Beispiel Matlab, Mathematica oder Maple durchgeführt werden.



**Abb. 5.15** Aus zwei Quadern zusammengesetzter Körper aus Aufgabe 5.2

Zunächst wird nur der größere Quader betrachtet, das heißt der kleinere Quader sei nicht vorhanden.

- a) Berechnen Sie  $\tilde{I}_1^1$ .
- b) Der betrachtete größere Quader drehe sich zunächst nur um seinen eigenen Schwerpunkt mit Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_{01}^0$ . Erläutern Sie die Bedeutung der in  $\omega_{01}^0$  enthaltenen tiefgestellten Indizes sowie des hochgestellten Index.

Geben Sie jeweils die in  $S_1$  und  $S_0$  zu beobachtende kinetische Energie des Quaders in Abhängigkeit von Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_{01}^0$  an. Wie lautet die Darstellung der kinetischen Energie in Abhängigkeit von  $\omega_{01}^1$ ?

Leiten Sie damit die Umrechnungsformel von  $\tilde{I}_1^1$  nach  $\tilde{I}_1^0$  her. Geben Sie  $\tilde{I}_1^0$  auch zahlenmäßig an. Lesen Sie hierfür  $\tilde{R}_{01}$  aus Abb. 5.15 ab.

- c) Nun drehe sich der betrachtete Körper um Ursprung  $S_0$  mit Drehgeschwindigkeitsvektor  $\omega_1$ .  
Leiten Sie die Berechnungsformel für die Elemente des Gesamtträgheitstensors  $\tilde{I}_{1,ges}^0$  her, mit dem die gesamte kinetische Energie durch

$$T_{1,trans} + T_{1,rot} = \frac{1}{2} \omega_1^T \tilde{I}_{1,ges} \omega_1$$

beschrieben wird.

Lösungshinweis: Ein Kreuzprodukt lässt sich immer als Matrizenprodukt mit einer schiefssymmetrischen Matrix<sup>17</sup>  $\tilde{S}_{01}$  darstellen gemäß

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{t}_{01} = \tilde{S}_{01} \boldsymbol{\omega}_1.$$

Geben Sie  $\tilde{I}_{1,\text{ges}}^0$  numerisch an und bestimmen Sie PC-gestützt Rotationsmatrix  $\tilde{R}_{0H_1}$  (in numerischer Form) von  $S_0$  zu Hauptachsensystem  $S_{H_1}$  von Körper 1.

In den folgenden Teilaufgaben soll zusätzlich zum großen Quader auch der zweite, kleinere Quader berücksichtigt werden.

d) Berechnen Sie den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Quader in  $S_0$ .

In diesem Gesamtschwerpunkt befinde sich Koordinatensystem  $S_3$  mit gleicher Orientierung wie die körperfesten Koordinatensysteme der Quader.

e) Berechnen Sie die im Weltkoordinatensystem beobachtbare kinetische Energie bei Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt  $S_3$  mit Drehgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}_3^3$ .

Geben Sie den Trägheitstensor des zusammengesetzten Körpers in Hauptachsen an und bestimmen Sie die Rotationsmatrix von  $S_0$  zum Hauptachsensystem.

### 5.3 Berechnung von Drehmomenten des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators

Gegeben seien zwei Betriebspunkte des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators aus Beispiel 5.8.

Betriebspunkt 1:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, & \dot{\theta}_1 &= 10, & \ddot{\theta}_1 &= 10 \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{4}, & \dot{\theta}_2 &= -10, & \ddot{\theta}_2 &= 10 \end{aligned}$$

Bei Betriebspunkt 2 sollen die Geschwindigkeiten auf  $1/10$  reduziert sein. Nehmen Sie weiter die Parameter aus Tabelle 5.2 an.

- Berechnen Sie numerisch für beide Betriebspunkte die jeweils notwendigen Gelenkantriebsmomente  $\tau_1$  und  $\tau_2$  mit Hilfe der in Beispiel 5.8 hergeleiteten Bewegungsgleichung.
- Wie groß sind die Gewichtsmomente?
- Wie groß sind die Momente aufgrund der Kreiselkräfte?
- Wie groß sind die Beschleunigungsmomente?
- Berechnen Sie die jeweiligen Anteile auf das Gesamtmoment und interpretieren Sie diese.

<sup>17</sup> Bedingung für Schiefssymmetrie:  $\tilde{S}_{01}^T = -\tilde{S}_{01}$ .

**Tab. 5.2** Parameter zu Aufgabe 5.3

Bedeutung	Parameter	Wert
Längen	$l_1 = l_2$	1
Masse Manipulatorsegment 1	$m_1$	1
Masse Manipulatorsegment 2	$m_2$	0.5
Erdbeschleunigung	$g_0$	10

### 5.4 Manipulator mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Drehachsen und Punktmassen

Für den Manipulator aus Abb. 5.16 soll die Bewegungsgleichung aufgestellt werden. Die Massen der Manipulatorsegmente sollen dabei vereinfachend zu Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  angenommen werden, die sich jeweils am Ende des Manipulatorsegments (also im Ursprung des jeweiligen körpereigenen Koordinatensystems) befinden sollen. Der Erdbeschleunigungsvektor zeige in negative  $z_0$ -Richtung. Der Betrag der Erdbeschleunigung soll mit  $g_0$  allgemein gehalten werden.

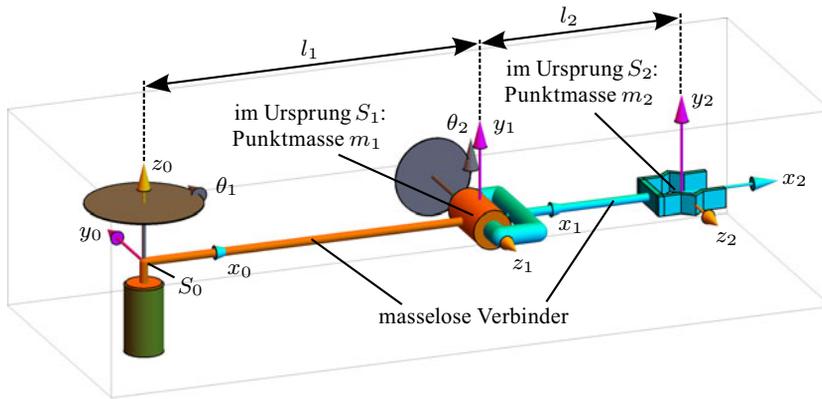
- Warum werden für die Bewegungsgleichung keine Massenträgheitstensoren benötigt?
- Bestimmen Sie die DH-Parameter.  
Hinweis: Diese Teilaufgabe dient der Wiederholung der direkten Kinematik.
- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung, indem Sie Algorithmus 5.1 Schritt für Schritt anwenden. Stellen Sie das Differenzialgleichungssystem in Standardform (5.44) dar und kennzeichnen Sie  $\tilde{M}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{Q}_{\text{nk}}$ .

*Hinweis* zu Schritt 1: Verwenden Sie die Formel aus der Musterlösung zu Aufgabe 2.17.

*Hinweis* zu Schritt 7.2: Den etwas umfangreicheren mathematischen Ausdruck für kinetische Energie  $T_2$  von Segment 2 können Sie mit der 1. und 2. binomischen Formel sowie dem trigonometrischen Pythagoras ( $\sin^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i = 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ) stark vereinfachen zu

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \left( \dot{\theta}_1^2 (l_1 + l_2 \cos(\theta_2))^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \right).$$

- Berechnen Sie die Kreiselkräftematrix  $\tilde{C}$  und weisen Sie damit die Schiefsymmetrie von  $\frac{d}{dt} \tilde{M} - 2 \tilde{C}$  (siehe (5.42)) nach.
- Geben Sie die inverse Massenmatrix  $\tilde{M}^{-1}$  an. Begründen Sie, warum diese stets existiert. Lösen Sie in Abhängigkeit von  $\tilde{M}^{-1}$  die Bewegungsgleichungen nach dem Beschleunigungsvektor auf (Ausmultiplikation mit der inversen Massenmatrix nicht notwendig).



**Abb. 5.16** Kinematik eines Manipulators mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Drehachsen für Aufgabe 5.4. Es wird vereinfachend angenommen, dass die Masse jedes Manipulatorsegments im Endpunkt als Punktmasse konzentriert ist

### 5.5 Manipulator mit Gelenkreihenfolge Translation-Rotation

Für den Manipulator aus Aufgabe 2.17 soll die Bewegungsgleichung aufgestellt werden. Die Linearachse soll in Richtung von  $\sigma_1$  mit Kraft  $F_1$  angetrieben sein, die Rotationsachse in Richtung von  $\theta_2$  mit  $\tau_2$ . Die DH-Koordinatensysteme sollen gemäß Musterlösung-Abb. 2.7 (siehe Musterlösung auf der Buchseite unter der Springer-Homepage) gewählt werden.

Parameter:

- Die Massen der Manipulatorsegmente seien  $m_1$  und  $m_2$ .
- Der Erdbeschleunigungsvektor zeige in  $z_0$ -Richtung. Der Betrag der Erdbeschleunigung soll mit  $g_0$  allgemein gehalten bleiben.
- Die Schwerpunktposition von Manipulatorsegment 1 in körpereigenen Koordinaten sei  $c_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l/2 \end{pmatrix}^T$ .
- Die Schwerpunktposition von Manipulatorsegment 2 in körpereigenen Koordinaten sei  $c_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -l/2 & l/2 \end{pmatrix}^T$ .
- Das Massenträgheitsmoment von Manipulatorsegment 2 bei Drehung um den eigenen Schwerpunkt um die  $y_2$ -Achse betrage  $I_{y_2}^2$ .

- a) Warum werden von Manipulatorsegment 1 keine Massenträgheitsmomente benötigt? Warum genügt für Manipulatorsegment 2 das Hauptträgheitsmoment bezüglich der körpereigenen  $y$ -Achse?

- b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung, indem Sie Algorithmus 5.1 Schritt für Schritt anwenden. Stellen Sie das Differenzialgleichungssystem in Standardform (5.44) dar und kennzeichnen Sie  $\tilde{M}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{Q}_{nk}$ .
- c) Berechnen Sie die Kreiselkräfte­matrix  $\tilde{C}$  und weisen Sie damit die Schiefsymmetrie von  $\frac{d}{dt}\tilde{M} - 2\tilde{C}$  (siehe (5.42)) nach.
- d) Geben Sie die inverse Massenmatrix  $\tilde{M}^{-1}$  an. Begründen Sie, warum diese stets existiert. Lösen Sie in Abhängigkeit von  $\tilde{M}^{-1}$  die Bewegungsgleichungen nach dem Beschleunigungsvektor auf (Ausmultiplikation mit der inversen Massenmatrix nicht notwendig).

### 5.6 Simulation der Bewegungsgleichung eines Manipulators in Kooperation mit dem Menschen

Skizzieren Sie den Signalflussplan zur Simulation der Bewegungsgleichung eines Manipulators. Die Gelenkantriebsgrößen werden dabei von einem als Black Box anzusehenden Regler geliefert, der als Eingangsgrößen die Systemzustände besitzt.

Zusätzlich soll der Endeffektor die Hand des (als kooperativ angenommenen) Menschen führen. Die mechanische Trägheit des menschlichen Arms am Endeffektor verursacht, trotz kooperativen Verhaltens, eine konstante Kraft  $\mathbf{F}_{EE}$  und ein konstantes Moment  $\boldsymbol{\tau}_{EE}$  auf den Endeffektor, die der Manipulator zusätzlich aufbringen muss. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass  $\mathbf{F}_{EE}$  und  $\boldsymbol{\tau}_{EE}$  konstant sind.

---

## Literatur

1. Akademischer Verein Hütte, e. V. in Berlin: Hütte – des Ingenieurs Taschenbuch, 28. Aufl. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin (1955)
2. Beitz, W., Grote, K.H. (Hrsg.): Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau, 20. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg (2001)
3. F. A. Brockhaus GmbH: Brockhaus – Die Enzyklopädie, 20. Aufl. Bd. 6. F. A. Brockhaus GmbH, Leipzig, Mannheim (1998)
4. Goldstein, H.: Klassische Mechanik, 4. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1976)
5. Hackbusch, W., Schwarz, H., Zeidler, E.: Teubner – Taschenbuch der Mathematik Bd. I. Teubner, Stuttgart, Leipzig (1996)
6. Hauger, W., Schnell, W., Gross, D.: Kinetik, 7. Aufl. Technische Mechanik, Bd. 3. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2002)
7. Hauger, W., Schnell, W., Gross, D.: Statik, 7. Aufl. Technische Mechanik, Bd. 1. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2003)
8. Hering, E., Martin, R., Stohrer, M.: Physik für Ingenieure, 8. Aufl. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hongkong, London, Mailand, Paris, Tokio (2002)
9. Mareczek, J.: Invarianzregelung einer Klasse unteraktuierter Systeme. Ph.D. thesis, Technische Universität München, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, München (2002). <https://opac.ub.tum.de/search?bvnr=BV015738338>

10. Mareczek, J., Buss, M.: Preliminary Studies on Geometric Invariance Control Synthesis. In: Proceedings of European Control Conference. In, Karlsruhe, Germany (1999). Paper No. 861
11. Mareczek, J., Buss, M.: Robust Stabilization of SISO Non–Minimum Phase Nonlinear Systems. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, S. 2494–2595. IEEE, Phoenix, AZ (1999)
12. Mareczek, J., Buss, M., Schmidt, G.: Comparison of Control Algorithms for a Nonholonomic Underactuated 2-DOF Robot. In: Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics AIM'97. In, Tokyo, Japan (1997). Paper No. 96
13. Mareczek, J., Buss, M., Schmidt, G.: Robust Global Stabilization of the Underactuated 2–DOF Manipulator R2D1. In: Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation, S. 2640–2645. In, Leuven, Belgium (1998). Paper No.423
14. Mareczek, J., Buss, M., Schmidt, G.: Robuste Regelung eines nicht-holonomen, unterbestimmt angetriebenen SCARA Roboters. In: Reinschke, K. (Hrsg.) GMA-Fachausschuss 1.4: Theoretische Verfahren der Regelungstechnik, S. 189–198. w.e.b. Universitätsverlag Dresden, Dresden (1998)
15. Mareczek, J., Buss, M., Schmidt, G.: Robust Control of a Non–Holonomic Underactuated SCARA Robot. In: Tzafestas, S.G., Schmidt, G. (Hrsg.) Progress in System and Robot Analysis and Control Design, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Bd. 243, S. 381–396. Springer, London (1999)
16. Mareczek, J., Buss, M., Schmidt, G.: Robuste Regelung eines nicht–holonomen, unteraktuierten SCARA Roboters. *Automatisierungstechnik* **47**(5), 199–208 (1999)
17. Mareczek, J., Buss, M., Schmidt, G.: Sufficient Conditions for Invariance Control of a Class of Nonlinear Systems. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, S. 1900–1905. IEEE, Sydney, Australia (2000)
18. Mareczek, J., Buss, M., Spong, M.W.: Invariance Control of Normal Forms with Input Driven Internal Dynamics. In: Proceedings of the American Control Conference, S. 3648–3653. IEEE, Arlington, VA, USA (2001)
19. Mareczek, J., Hecker, S., Buss, M.: Intelligent Switching Control of Nonlinear Non-minimum Phase Relative Degree Two Systems. In: Proceedings of European Control Conference, S. 985–990. IEEE, Porto, Portugal (2001)
20. Meyberg, K., Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 1, 6. Aufl. Springer, Berlin (2003)
21. Noack, C.C.: Tensoranalysis – eine Einführung (2001). <http://www.itp.uni-bremen.de/~noack/tensors.pdf>, zugegriffen: 20. Sept. 2018. Institut für Theoretische Physik, Universität Bremen
22. Pfeiffer, F.: Einführung in die Dynamik. In: Teubner Studienbücher: Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM, 2. Aufl. Bd. 65, Teubner-Verlag, Stuttgart (1992)
23. Schilling, R.J.: Fundamentals of Robotics – Analysis & Control. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1990)
24. Spong, M.W., Corke, P., Lozano, R.: Nonlinear Control of the Gyroscopic Pendulum (2000). <https://pdfs.semanticscholar.org/0fcb/ce558d93b9bc3ba8d225b90beebb0ffa9314.pdf>
25. Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasager, M.: Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, Inc, Hoboken (2006)
26. Wikipedia, die freie Enzyklopädie: Statische Bestimmtheit (2018). [https://de.wikipedia.org/wiki/Statische\\_Bestimmtheit](https://de.wikipedia.org/wiki/Statische_Bestimmtheit) (Erstellt: 28. Nov. 2018)

# Stichwortverzeichnis

3D-Jobs, 6

## A

Achse

- , Dreh-, 15
- , Fahrzeug-, 79
- , Farbkodierung, 67
- , Haupt-, 15
- , Linear-, 15
- , Neben-, 15
- , Redundanz-, 15
- , Teleskop-, 88

Additionstheoreme, 76, 98

Ähnlichkeitstransformationen, 169

Androide, 1

Annäherungsvektor, 46

Anpresskraft, 149, 150

anthropomorph, 7, 137

- , Gelenkanordnung, 15

anthropozentrisch, *siehe* anthropomorph

Antriebe

- , Arten, 31
- , elektrische, 31
- , hydraulische, 31, 32
- , pneumatische, 31

Antriebs

- leistung
  - , abrufbare, 32
  - , installierte, 32
- system, *siehe* Antriebsstrang

approach-vector, *siehe* Annäherungsvektor

Arbeit

- , mechanische, 194
- , Prinzip der virtuellen, 194
- , Spann-, 194

, virtuelle, 244

- , externe Kraft, 247
- , Gelenantriebsmomente, 244
- , Vorzeichenkonvention, 244

Arbeitsraum, 20, 28

- , Orientierungs-, 120
- , Positions-, 120
- beschränkung, 133

Arkustangens, 64

- , 4-Quadrant, 65

Arm, *siehe* Manipulator

- , Master-, 9
- , menschlicher, 171
- , Slave-, 9
- länge, *siehe* DH-Parameter

Aufgabenstellung

- , Basiskinematik 1, 128
- , Basiskinematik 2, 132
- , Basiskinematik 3, 136
- , Basiskinematik 4, 138
- , Dynamik, 211
- , inverse Geschwindigkeitskinematik, 165
- , inverse Kinematik, 118
- , inverses statisches Problem, 200

Ausrichtung, *siehe* Orientierung

Auswuchtung, 233

Avionik, 79

## B

Bahn, 28

- planung, 30

Basiskinematik

- 1, 128
- 2, 131
- 3, 135

4, 137  
 Basisvektoren, 44, 49  
 Begrenzungsfläche, *siehe* Volumenintegral  
 Bernoulli, 217  
 Bewegungs-Differenzialgleichungssystem, 222  
 Bewegungsfreiheitsgrade, 156, 211, *siehe*  
   Freiheitsgrade  
 Bewegungsgleichung, 27, 211, 248, 252  
   , Algorithmus, 255  
   , Manipulatorsegment, 249  
   , Realisierung in Simulationsumgebung,  
     263  
   , Simulation MRK, 273  
   des Manipulators, 252  
   für planaren 2-DoF  
     Ellenbogen-Manipulator, 254  
 Bezugskoordinatensystem, 44  
 Bezugspunkt, 242  
 Bildverarbeitung, 56  
 Bindung, 213  
   , innere, 217  
   -szahl, 213  
 bin-picking, 15  
 Business-case Robotik, 37

## C

CNC-Maschine, 4  
 CoBots, *siehe* Collaborative Robots  
 Collaborative Robots, 11  
 Corioliskräfte, 253

## D

d'Alembert, 217  
 d'Albertysche Hilfskräfte, 216  
 Degrees of Freedom, *siehe* Freiheitsgrade  
 Denavit-Hartenberg, *siehe* DH  
 Deviationsmomente, 231  
 DH, 89  
   -Algorithmus  
     , Anbindung  
       Endeffektorkoordinatensystem, 95  
     , Bestimmung DH-Parameter, 95  
     , Festlegung Koordinatensysteme, 94  
   -Armlänge, 94  
 Denavit und Hartenberg, 44, 91  
   -Gelenkversatz, 94  
   -Gelenkwinkel, 93, 94

-Hilfspunkt, 92, 94  
 -Konvention, 12, 89, 91  
 -Parameter, 93  
 -Parameter-Tabelle, 94  
 -Uneindeutigkeit, 95  
 -Verwindungswinkel, 94  
 Dichte, 227  
 Direct-Drive, 31  
 DoF, 12, *siehe* Degrees of Freedom  
 Drehgeschwindigkeitsvektor, 230  
 Drehmatrix, *siehe* Rotationsmatrix  
 Drehmoment  
   -konstante, 34  
 Drehmomentvektor, 196  
 Drehratensensor, 164  
 Drehung, *siehe* Rotation  
   , infinitesimal kleine, 160  
 Drehwinkel, 88  
 Dynamik, 27, 43, 210  
   , wichtige Begriffe, 211

## E

EE, *siehe* Endeffektor  
 Eigenkollisionen, 28  
 Einheiten  
   , Normierung, 44  
 Einsetzverfahren, 119  
 Elementar-Rotation, 67  
 Endeffektor, 8  
   , einseitig verbunden, 215  
   -freiheitsgrade, 165  
   -kräfte und Momente, 200  
 Energie  
   , kinetische, 224, 235  
     , Armsegment, 240  
     , Aufteilung, 224  
     , gesamt, 241  
     , infinitesimale kleine, 225  
   , potentielle, 221  
     , Armsegment, 242  
     , gesamt, 243  
     , Vorzeichenkonvention, 242  
 Erdbeschleunigung, 242  
   -svektor, 242  
 Euler, 217  
   , inverser, 137  
   , inverser 323, 110  
   -Drehung, 43

- , Darstellungsformen, 79
  - , feste Achsen, 80
- Jacobi-Matrix, 162
- Rotationsmatrix
  - , ZYZ, 75
- Singularität, 76
- Winkel, 26, 43, 75
  - , 321, 79
  - , 323, 75, 137
  - , numerische Stabilität, 77
  - , Rotationsebene, 73
  - , ZYX, 79
  - , ZYZ, 73
- Winkelgeschwindigkeit, 160
- exponentielle Koordinaten, 82
  
- F**
- Fähigkeitslücken des Menschen, 9, 11
- Fahrzeug, 79
- Farbkennzeichnung, 84
- Feder
  - , Dreh-, 193
  - , lineare, 193
- Feldlinien, 30
- Fix 123, 80
- Flächenelement in Zylinder-Koordinaten, 235
- Flugkörper, 79
- Freiheitsgrade, 12, 211
  - , Berechnungsvorschrift, 215
  - , Gelenk-, 213
  - , Zahl, 211
- Freischneiden, 198
- Führungslinie, 212
  
- G**
- Gauß, 201
  - Eliminationsverfahren, 183
- gebundener Vektor, 45
- Gegengewicht, 31
- Gelenk
  - , Bindung, 213
  - , Dreh-Neige-, 128
  - , Kugel-, 136
  - , prismatisches, 88
  - , Pseudo-Kugel-, 135
  - , Rotations-, 88
  - , Translations-, 88
- , Wertigkeit, 213
- , wirksames, 24
- anordnung, anthropomorphe, 15
- antriebe, 244
  - , zentrale und dezentrale, 31
- Anzahl, 88
- anzahl, 166
- auswahlvariable, 88, 156
- Nummerierung, 88
- raum, 28
- reibung, 245
- typen, 213
- variable, 88
  - , verallgemeinerte, 88
- verbinder, 83
- versatz, *siehe* DH-Parameter
- vorschub, 89
- winkel, 88
- generalisierte Kraft, 220, 244
- geschlossene kinematische Kette, 215
- Geschwindigkeit
  - , Dreh-, 150
  - , EE-Dreh-, 155, 160
  - , EE-Translations-, 154
  - , Euler-Winkel-, 160
  - , Führungs-, 151
  - , Gelenkvariablen-, 150
  - , Relativ-, 151
  - , Relativedreh-, 237
  - , Translations-, 151
  - , Vorschub-, 150
  - des Endeffektors, 150
  - in Weltkoordinaten, 239
  - sverkopplung, Vektor der, 250
- Geschwindigkeits-Kopplungsmatrix, 249
- Geschwindigkeitsvektor
  - , Dreh-, 150, 155
  - , zeitliche Ableitung, 160
  - , Translations-, 154
- Getriebe, 34
  - übersetzungsverhältnis, 34
- gieren, 79
- Gleichgewichtsbedingungen, 198
- Gleitreibungszahl, 245
- Gleitvektor, 46
- Golem, 2
- Grad der Überbestimmtheit, 170
- Graphentheorie, 30
- Gravitations

-komponenten, 249  
 -vektor, 249  
 gravitationsbedingte Kräfte und Momente, 249  
 Grenztemperatur, 34

## H

Haftreibungszahl, 245  
 Hand-Drehen, 7  
 Handhabung, *siehe* Manipulation  
 Handhabungstechnik, 5  
 Hand-Neigen, 7  
 Handwurzel, 7, 138  
 Hantieren, *siehe* Manipulation  
 Hardware-in-the-Loop, 28  
 Hauptachsen, 15  
   , Lage bei Symmetrie, 233  
   -koordinatensystem, *siehe*  
     Hauptachsensystem  
   -system, 232  
   -transformation, 232  
 Hauptträgheitsmoment, 232  
   , Stab, 233  
 Herzstück der Robotersteuerung, 7  
 Hexapode, 17, 88, 268  
 homogene Koordinaten, 56  
   -systemtransformation, *siehe* homogene  
     Transformation  
 homogene Massenverteilung, 227  
 homogene Transformation, 43, 56  
   , elementare, 90  
   , Matrix, 56  
 Homunculum, 2  
 Homunculus, *siehe* Homunculum  
 hybride Fertigungszelle, 11  
 Hydraulikzylinder, 32  
 Hydromotor, 32  
 Hydromotoren, 32

## I

Index  
   , hochgestellter, 45  
   , tiefgestellter, 44  
   -Übereinstimmungsregeln, 237  
 Industrieroboter, 5, 8, 11  
   , weltweiter Bestand, 12  
   , weltweiter Umsatz, 12  
   , Zugferd der, 11

Inertia, *siehe* Massenträgheit  
 inertielle Verkopplung, 252  
 infinitesimal kleine Bewegung, 195  
 infinitesimaler Drehvektor, 160, 247  
 Inkreisradius, 132  
 innere Bewegung, *siehe* Nullraumbewegung  
 Integratorblöcke, 264  
 Interpolationspolynom, 30  
 inverse homogene Transformationsmatrix, 57  
 InvEuler323, 110  
 Isolierlack, 34

## J

Jacobi-Matrix, 24, 156, 219, 239, 247  
   , algebraische, 160  
   , allgemeine Definition, 265  
   , analytische, 160, 164  
   , Drehgeschwindigkeits-, 156  
   , Euler-, 162  
   , geometrische, 156, 160  
   , Lineargeschwindigkeits-, 156  
   , mathematischer Einschub zum Rang, 168  
   , Nullraum, 175  
   , Spaltenrang, 166  
   , Zeilenrang, 165

## K

Kante, 59  
 Kardan  
   -Aufhängung, 79  
   -Winkel, 79  
 Kern einer Matrix, *siehe* Nullraum  
 Kettenregel, 153  
 Kinästhetik, 9  
   , Feedback, 11  
 Kinematik, 20, 27, 43  
   , Begriffsdefinition, 42  
   , Beschleunigungs-, 190  
   , differenzielle, 27, 43  
   , direkte, 20, 43, 89  
   , Euler323-, 137  
   , geschlossene, 215  
   , Geschwindigkeits-, 23, 43, 148, 150  
   , inverse, 20, 42, 89, 118  
   , Klassifikation, 215  
   , Kugel-, 206  
   , offene, 215

- , Parallel-, 16, 17, 88
- , Rückwärts-, 89
- , Seriell-, 15–17, 88
- , Vorwärts-, 89
- kinematisch
  - bestimmt, 215
  - unbestimmt, 215
- kinematische Redundanz, 166
- Kinetik, 27, 43, 211
- kleinste Quadratsumme, 201
- Knoten, 59
- Kollisionsfreier Pfad, 29
- Konfiguration, 21, 120
  - , 1, 2, 121
  - , Ellenbogen oben, unten, 121
  - , Hand links, rechts, 121
  - , KR30, 122
  - , links, rechts, 129
  - , oben, unten, 121
  - , Turm links, rechts, 121
- Koordinaten
  - , exponentielle, 82
  - , generalisierte, 216, 218
  - , homogene, 56
  - , Minimal-, 216
  - , verallgemeinerte, 216
  - , Zylinder-, 234
  - unabhängig, 230
- Koordinatensystem
  - , beschreibendes, 45
  - , Bezugs-, 44
  - , darstellendes, 237
  - , Endeffektor-, 45
    - , Achsbezeichnungen, 45
  - , Grundlagen, 44
  - , Inertial-, 44
  - , körpereigenes, 46
  - , lokales, 46
  - , Mess-, 237
  - , Welt-, 44
- körpereigenes Koordinatensystem, 46
- Kraft
  - , Coriolis-, 253
  - , d'Albertsche Hilfs-, 216
  - , eingeprägte, 217
  - , externe, 193, 194, 207
  - , generalisierte, 220, 244, 248
  - , konservative, 221
  - , Lagerreaktions-, 198, 216, 233
  - , nichtkonservative, 221, 244
    - , Antriebskraft, 245
    - , Reibung, 247
  - , Normal-, 245
  - , Rückstell-, 193
  - , verallgemeinerte, 196
  - , verlorene, 218
  - , Zentrifugal-, 253
  - , Zwangs-, 217
- Kräfte-Momenten-Gleichgewicht, 193
- Kreisel
  - kräfte und -momente, 249
  - kräftematrix, 250, 253
  - kräftevektor, 250, 253
- künstlicher Mensch, 1
- L**
- Lage, 26, 42
  - , Soll-, 118
  - energie, *siehe* potentielle Energie
- Lagerreaktionskräfte, 198
- Lagrange, 217
  - Funktion, 173, 222
- Lagrangesche Bewegungsgleichung, 216, 217, 222
- Lastfall, 27
- Leonardo da Vinci, 3
- lineares Gleichungssystem
  - , äquivalentes, 200
  - , Bestimmtheit, 167
  - , homogenes, 175
  - , überbestimmtes, 167, 177
  - , unterbestimmtes, 167, 169
- Lösung
  - , analytische, 119, 126
  - , geschlossene, 119, 126
  - , numerische, 119, 126
- Lösungen
  - , Anzahl nicht abzählbar, *siehe* Singularität
- Lösungsschar
  - , einparametrisch, 183
- Lösungsverfahren
  - , algebraisches, 120
  - , geometrisches, 120
- Lösungsvielfalt, 121, 172, 204, 205

**M**

- Manipulation, 8, 42
- Manipulator, 10, 11, 42
  - , 2-DoF Ellenbogen-, 133
  - , Aiko, 171
  - , anthropomorpher, 7, 186
  - , anthropomorpher 6-DoF, 137, 138
  - , articulated, 15
  - , artikulierter 3-DoF Ellenbogen, 159
  - , artikulierter Ellenbogen-, 16
  - , artikulierter planarer 3-DoF Ellenbogen-, 99, 129
  - , Bezeichnungen, 12
  - , Delta-, 17
  - , Gelenkarm-, 15
  - , Grad der Überbestimmtheit, 170
  - , horizontaler Knickarm, 16
  - , kartesischer-, 17
  - , kartesischer 2-DoF, 144, 168
  - , Knickarm-, 15
  - , KR30, 106, 122
  - , LBR iiwa, 171
  - , planarer 2-DoF Ellenbogen-, 131, 143, 180, 191, 197, 256
  - , planarer 3-DoF Ellenbogen-, 96, 119, 126, 144, 149, 214
  - , planarer 4-DoF Ellenbogen-, 170, 182
  - , redundanter, 171
  - , SCARA-, 16
  - , Schwenkarm-, 16
  - , überbestimmter, 166, 169, 171
  - , unteraktuierter, 166, 175
  - , unterbestimmter, 166, 175, 204
  - , vollbestimmter, 166, 167
  - Arten, 12
  - Bestimmtheit, 166, 206, 207
    - , Bedingungen, 166
  - mit einem Drehgelenk, 223
  - segment, 87
    - , starr, 88
- Manipulator mit Gelenkreihenfolge
  - Translation-Rotation, 272
- Manipulator mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Drehachsen und Punktmassen, 271
- Manipulierbarkeit, 174
  - smaß, 174
- Maschine
  - , CNC-, 4
    - , Gleichstrom-, 31
    - , NC-, 4
- Massenfertigung, 5
- Massenmatrix, 241
  - , Eigenschaften und Bedeutung, 252
- Massenschwerpunkt, *siehe* Schwerpunkt
- Massenträgheit, 252
- Massenträgheitsmoment, 227
  - , axiales, 230
  - , Tensor, 230
- Master-Slave, *siehe* Master-Slave-System
- Master-Slave-System, 9, 10
- Matrix
  - , Geschwindigkeits-Kopplungs-, 249
  - , homogene Transformations-, 56
  - , Kern, 175
  - , Kreiselkräfte-, 250, 253
  - , Massen-, 241
  - , Moore-Penrose-Inverse, 173
  - , Nullraum, 175
  - , orthonormale, 54, 71
  - , Pseudo-Links-Inverse, 173
  - , Pseudo-Rechts-Inverse, 173
  - , Rotations-, 52
  - , schiefsymmetrische, 82
  - Exponentielle, 82
- Mechanik, 27, 211
- Mechatronik, 18
- Mehrkörper-System, 211
- menschliche Hand, 171
- menschlicher Arm, 171
- Mensch-Roboter-Kollaboration, 11, 200
- Methode der kleinsten Quadrate, 201
- Minimalkoordinaten, 216
- Minimierungsproblem, 172
- MKQ, *siehe* Methode der kleinsten Quadrate
- MKS, *siehe* Mehrkörper-System
- Modellbildung
  - der Kinematik, 43
- Modellfehler, 35
- Moment
  - , externes, 207
  - , Lagerreaktions-, 216, 233
  - , nichtkonservatives, 244
  - , verallgemeinertes, 195
- Monte-Carlo-Vorgehen, 34
- Moore-Penrose-Inverse, *siehe* Pseudo-Inverse
- Motor
  - , bürstenlos, 31

- Motorcontroller, 31  
 Motorkonstante, 34  
 Motorstrom, 34  
 MRK, *siehe* Mensch-Roboter-Kollaboration  
 Multifunktionsroboter, 37
- N**
- NC-Maschine, 4  
 Nebenachsen, 15  
 Nebenbedingung  
   , nichtintegrale, 217  
 nicken, 79  
 Normalenvektor, 46  
 normal-vector, *siehe* Normalenvektor  
 Normierung, 44  
 Nullmomentenregelung, 20  
 Nullniveau, 221, 242  
 Nullposition, 83, 93  
 Nullraum, 175  
   -bewegung, 15, 26, 174, 185  
   , Beispiel, 26  
   der Jacobi-Matrix, 175, 203
- O**
- OA-Neigen, 7  
 ökonomische Nische, 9  
 offene kinematische Kette, 215  
 optimale Lösung, 173  
 Optimalitätsbedingung, 173  
 Optimierung, 126  
 Orientierung, 26  
 orthonormale Matrix, 54, 71  
 Ortsvektor, 45
- P**
- Paracelsus, 2  
 Parameterschätzfehler, 35  
 Passivitätseigenschaft, 250, *siehe* Regelung,  
   passivitätsbasierte  
 perspektivische Transformation, 56  
 Perturbation, 35  
 Pfad, 28, 149  
 Pfadplanung, 28  
 Pick&Place, 8  
 Pieper, 140  
 Pose, *siehe* Lage
- Position, 26  
 positiv definit, 252  
 Potentialfeld-Methode, 30  
 Potentialfunktion, 221  
 Prinzip  
   der Mechanik, grundlegendes, 217  
   der virtuellen Arbeit, 194, 196, 210, 217  
   von d'Alembert, 218  
 Programmed Article Transfer, 5  
 Projektmanagement, 37  
 Proportionenlehre, 3  
 Pseudo-Inverse  
   , links, 173, 201  
   , rechts, 173  
 Pseudo-Kugelgelenk, 136  
 PUMA, 7, 15  
 Punktschweißen, 6
- Q**
- quadratische Form, 230, 249
- R**
- Rang, 168  
   -abfall-Kriterien, 169  
   -invarianz, 169  
 Rapid-Prototyping, 27  
 Raum  
   , Arbeits-, 20, 29  
   , Gelenk-, 29  
 Rechte-Hand-Regel, 66, 152  
 Rechtssystem, 66  
 redundante Kinematik, *siehe* kinematische  
   Redundanz  
 Redundanz, 166  
   , Nutzung, 172  
 Regelung, 35  
   , antriebsseitige, 35  
   , dezentrale, 35  
   , PD-, 35  
 Reibmodell, 246  
 Reibung  
   , Arten der, 245  
   , Gelenk-, 245  
   , Gleit-, 245  
   , Haft-, 245  
   , Kraftmodell, 246  
   , viskose, 245

- Richtungsvektor, 45
- Roboter, 1
- arm, 7, 10, *siehe* Manipulator
  - Arten
    - , cartesian, 17
    - , gantry type, 17
    - , Linear-, 17
    - , Portal-, 17
    - , Übersicht, 14
  - arten, 9
  - dichte, 12
- rollen, 79
- Rotation
- , Elementar-, 67
  - , Euler-, 73
  - des Bezugskoordinatensystems, 52
  - in bewegten Achsen, 74
  - in festen Achsen, 80
  - mit Matrix-Exponentieller, 82
  - mit Quaternionen, 81
  - um äquivalente Drehachse, 80
- Rotationen
- , verkettete, 69
  - im 2D, 63
  - im 3D, 66
- Rotationsmatrix, 52
- , 2D, 63
  - , 3D, 67
  - , Eigenschaften, 69
  - , elementar-, 68
  - , Euler
    - , ZYZ, 75
  - , graphische Ermittlung, 72
  - , inverse, 54
  - , Kommutativgesetz, 71
  - , Multiplikationsrichtung, 70
  - , transponierte, 54
  - , zeitliche Ableitung, 161
- Rotationsreihenfolge, 111
- Rotationswinkel, *siehe* Drehwinkel
- RPY-Winkel, 79
- Rückstellmoment, 193
- Ruheposition, 193
- R.U.R., 1
- S**
- Satz über Umkehrfunktionen, 188
- Schaltschrank, 32
- Scheinkraft, *siehe* Corioliskraft
- schiefsymmetrische Matrix, 82
- Schnittkräfte, 198
- Schraubenregel, 66, 150, 196
- Schwerpunkt, 224
- koordinaten, 225
- Sicherheitsanalysen, 200
- Signalflussplan
- , Simulation der Bewegung eines Manipulators, 264
- Singularität, 23, 121, 166, 175, 177
- , Basis-Kinematik 2, 133
  - , Begrenzungs-, 120, 179
  - , Einschränkung der Bewegungsrichtungen, 189
  - , Euler-, 76
  - , interne, 176, 177
  - , nahe Umgebung, 191
  - , notwendige Bedingung, 178
  - , praktische Auswirkungen, 189
  - , Zusammenhänge, 186
- Singularitätsbedingung, 177
- Singularwertzerlegung, 169
- sliding-vector, *siehe* Gleitvektor
- snake, 171
- Soll
- Bahn, 35
- Spannarbeit, 194
- Spline
- Interpolation, 30
- Starrkörper, 88, 213
- System, 213
- Statik, 26, 148, 192
- , inverse, 200
  - , Nebenbedingung, 202
- statisch
- bestimmt, 215
  - überbestimmt, 216
  - unbestimmt, 216
  - unterbestimmt, 215
- stehende Matrix, 37
- Steifigkeit, 16, 17
- Steiner-Anteil, 229
- Steuerung, 35
- Stillstandsverluste, 33
- Stribeck-Kurve, 246
- Stromregelung, 32
- Struktogramm
- , Basiskinematik 2, 143

, InvEuler323, 110  
 System  
 , Mehrkörper-, 211  
 , Starrkörper-, 213  
 Systemzustände, 264

## T

Taille, 7  
 TCP, 45  
 Teachen, 20  
 Telepräsenz- und Teleaktions-System, 9  
 Teleskopachse, 88  
 Tensor, 230  
 Tool-Center-Point, 45  
 topologische Anordnung, 43, 83  
 Torsion, 216  
 totales Differenzial, 219  
 Trägheitsmoment, *siehe*  
   Massenträgheitsmoment  
   , langer dünner Stab, 235  
 Trägheitstensor, *siehe* Tensor der  
   Massenträgheitsmomente  
   , Bezugskordinatensystem, 236  
   , Indizes, 236  
   , Tabellen, 232  
   , Umrechnung, 237  
   eines Stabs, 233  
   eines zusammengesetzten Körpers, 268  
 Transformation  
   , Hauptachsen-, 232  
   , homogene, 56  
   , perspektivische, 56  
 Transformationsgraph, 59  
 Transformationsmatrix  
   , homogene, 56  
   , inverse homogene, 57  
 Translation, 52  
 Translationsvektor, 44, 52  
 Transparenz, 9  
 trapezförmiger Geschwindigkeitsverlauf, 30  
 trigonometrischer Pythagoras, 123  
 Tripod, 17  
 Turm-Drehen, 7

## U

UA-Drehen, 7  
 UA-Neigen, 7

überbestimmt, 167  
 Unimate 1900, 5  
 Unimation, 5  
 unterbestimmt, 167  
 Unwucht, 233

## V

Vektor  
 , Annäherungs-, 46  
 , approach, 46  
 , Basis-, 49  
 , Drehmoment-, 196  
 , Erdbeschleunigungs-, 242  
 , gebundener, 45  
 , Gleit-, 46  
 , Gravitations-, 249  
 , infinitesimaler Dreh-, 247  
 , kollinear, 24, 178  
 , komplanar, 178  
 , Komponentenschreibweise, 45  
 , Koordinatenschreibweise, 45  
 , Kreiselkräfte-, 250, 253  
 , Normalen-, 46  
 , Orts-, 45  
 , Richtungs-, 45  
 , sliding, 46  
 , Translations-, 44, 52  
 , verallgemeinerter Gelenkmomenten-, 195,  
   211, 244  
 , verallgemeinerter Kraft-, 196  
 , verallgemeinerter Momenten-, *siehe*  
   verallgemeinerter  
   Gelenkmomentenvektor  
   , Verschiebe-, 52  
 verallgemeinerter Gelenkmomentenvektor, 195,  
   211, 244  
 verallgemeinerter Kraftvektor, 196, 247  
 Verbiegung, 216  
 Verkettungs-Regel, 52, 59  
 Verluste  
   , drehzahlabhängige, 33  
 Verschiebevektor, 52  
 Verspannungen, 216  
 Verträglichkeitsbedingung, 200, 204  
 Verwindungswinkel, *siehe* DH-Parameter  
 virtuelle  
   , Ladung, 30

- Arbeit, 218, *siehe* Prinzip der virtuellen Arbeit  
 Verrückung, 26, 195, 218, 244  
   , kartesische, 196  
 Verschiebung, *siehe* virtuelle Verrückung  
 virtuelles elektrisches Feld, 30  
 Viskosität, 246  
 Volumenelement  
   , kartesisches, 228  
   in Zylinder-Koordinaten, 234  
 Volumenintegral, 227  
   , Begrenzungsfläche, 228  
 Vorschub, 88, 93  
 Vorzeichenfunktion, 245  
 Vorzeichenkonvention, 221
- W**
- Wälz  
   -körper, 246  
   -lager, 246  
 Wärmeverluste, 33
- Weg, *siehe* Pfad  
 Welt, 44  
 Weltkoordinatensystem, 44  
 Wertigkeit eines Gelenks, 213  
 Wiederholgenauigkeit, 17  
 Winkelgeschwindigkeitssensor, 164  
 wirtschaftliche Statistiken, 12
- Z**
- Zähigkeitskoeffizient, 246  
 Zange-Drehen, 7  
 Zentrifugal  
   -kräfte, 253  
   -momente, 231  
 zufallsorientierte Wegenetz-Methode, 29  
 Zwangsbindung, 212  
   , holonom, 217  
   , nichtholonom, 217  
   durch Führungslinie, 212  
 Zwischenkreisspannung, 34  
 ZYZ Euler-Winkel, 73